经济数学（二）

LINEAR ALGEBRA

线性代数

区兆丞\主编

首都经济贸易大学出版社

经济数学(二)

线性代数

主　编　区兆丞
副主编　吕淑红

首都经济贸易大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/区兆丞主编. —北京:首都经济贸易大学出版社,2005.9

ISBN 7-5638-1321-7

Ⅰ.线… Ⅱ.区… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 084487 号

线性代数

区兆丞 主编

出版发行 首都经济贸易大学出版社

地　　址 北京市朝阳区红庙(邮编 100026)

电　　话 (010)65976483　65065761　65071505(传真)

E-mail publish@cueb.edu.cn

经　　销 全国新华书店

照　　排 首都经济贸易大学出版社激光照排服务部

印　　刷 北京泰锐印刷有限责任公司

开　　本 787 毫米×980 毫米　1/16

字　　数 297 千字

印　　张 15.5

版　　次 2005 年 9 月第 1 版 第 1 次印刷

印　　数 1~3 000

书　　号 ISBN 7-5638-1321-7/O·28

定　　价 21.00 元

前　言

为适应财经类高校教学改革的形势，按照教学大纲的基本要求，我们编写了本套经济数学教材。本套教材包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三大部分，本教材是其中的第二本。参加本教材编写工作的都是有多年教学实践的教师，他们在编写过程中结合自己的经验并参考了大量国内外的资料，使本教材在众多的同类教材中具有独特的优势，主要表现在以下几方面：

第一，更注重数学学科的系统性和科学性。在教材内容的结构上，许多地方打破了传统教材的框架，增加了一些必要的概念和结论，使整个体系更为严密完整。例如本书增加了线性空间的结构和线性变换的内容，该部分内容能够使学生对线性代数有更深入的理解。

第二，更注重经济类学生的特点。根据大纲对经济类学生的要求以及学生的现状，在教材中尽量避开繁复的或需用更多数学基础的定理证明，但对证明过程能够体现线性代数理论基本思想和基本方法的重要定理大多都给出了证明。这样便于学生从整体上把握教材的内容，加深对重要内容和方法的理解与掌握。

第三，更注重兼顾各个层次学生的不同需要。本教材内容丰富，并有大量例题。教师可根据对不同层次学生的要求，选取其中的部分内容讲授。习题由浅入深，分为 A 类习题和 B 类习题，各类习题都包括填空题、选择题和计算证明题。A 类习题相对容易，符合教学大纲对学生的

基本要求。B类习题相对难，适合有更大兴趣的学生练习。此外，每章最后还编排了典型例题分析，其中的例题具有灵活性、综合性，都有一定难度，大多与考研水平相当。

第四，注重与教学软件结合。本教材最后一章介绍了数学软件Mathematica的使用，帮助有余力的学生进一步理解和掌握教材内容，为学生能更生动活泼主动地学习提供了新的方法和工具。

本教材由首都经济贸易大学的教师编写，其中第一章和第五章由区兆丞编写；第二章由董春华编写；第三章由吕淑红编写；第四章由郭文英编写；第六章由孙激流编写。

本书尚有不足之处，敬请指教。

编　者

2005年8月

目　录

第一章　行列式

§1.1　行列式的定义

一、排列与逆序

定义 1.1　由 n 个不同的数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 阶排列，简称为排列.

例如，3241 是一个 4 阶排列，25314 是一个 5 阶排列.

n 阶排列的总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots 21=n!$

例如，3 个数的不同排列共有 $3!=3\times2\times1=6$ 个，它们是

$$123,132,213,231,312,321$$

定义 1.2　排列中的一对数，若左边的数大于右边的数(不一定相邻)，则称它们构成一个逆序. 在 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，其逆序总数称为此排列的逆序数，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如，在 5 阶排列 45231 中，数对 42,43,41,52,53,51,21,31 构成逆序，因此 $N(45231)=8$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

逆序数为零的排列，如 $123\cdots n$，规定是偶排列.

【例 1】 计算下列各排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性：

(1)536214；

(2)$n(n-1)(n-2)\cdots321$.

解　计算 n 阶排列的逆序数常用的方法有以下两种. 一是按由前往后的顺序

(或由后往前)分别算出排列中每个数码后面比它小的数码的个数(或前面比它大的数码的个数),即算出排列中每个数码的逆序数,它们的和即为所求排列的逆序数.二是按数码由小到大(或由大到小)的顺序,分别算出每个数码前面比它大的数码的个数(或后面比它小的数码的个数),即分别算出 $1,2,\cdots,n-1,n$ 这 n 个数码的逆序数,它们的和即为所求排列的逆序数.

(1)由前往后数排在每个数码后面比它小的数码个数,分别是 4,2,3,1,0.故所求排列的逆序数为

$$N = 4+2+3+1+0 = 10$$

此排列为偶排列.

(2)排在 $n,(n-1),\cdots,3,2$,后面比它小的数码个数分别是 $(n-1),(n-2),\cdots,2,1$.故排列的逆序数为

$$N=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=$$
$$\frac{1}{2}[(n-1)+1]\cdot(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

当 $\frac{1}{2}n(n-1)=2k$,即 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时,N 为偶数,此时排列为偶排列;当 $\frac{1}{2}n(n-1)=2k+1$,即 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时,N 为奇数,此时排列为奇排列.

把一个排列的某两个数交换位置,其余各数位置不变,得到另一个排列,这样的变换称为一个对换.

例如,45231 对换 5,1 变为 41235,此时 $N(41235)=3$.

定理 1.1 任意一个排列经过一次对换后,排列改变其奇偶性.

证 先证明邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_r abb_1\cdots b_s$,对换 a,b 变为 $a_1\cdots a_r bab_1\cdots b_s$.在这两个排列中,除 a,b 外其他任意两个数的顺序均未改变;a,b 以外的任一个数与 a 以及与 b 的顺序也未改变,只有 a,b 的顺序改变了.当 $a<b$ 时,对换后增加了一个逆序;当 $a>b$ 时,对换后减少了一个逆序.所以排列 $a_1\cdots a_r abb_1\cdots b_s$ 与 $a_1\cdots a_r bab_1\cdots b_s$ 的奇偶性不同.

再证一般对换情形.

设排列为 $a_1\cdots a_r ab_1\cdots b_s bc_1\cdots c_t$,将 a,b 对换得 $a_1\cdots a_r bb_1\cdots b_s ac_1\cdots c_t$,这可以看做先将排列 $a_1\cdots a_r ab_1\cdots b_s bc_1\cdots c_t$ 做 s 次相邻对换变为

$$a_1\cdots a_r abb_1\cdots b_s c_1\cdots c_t$$

再做 $s+1$ 次相邻对换变为

$$a_1\cdots a_r b b_1\cdots b_s a c_1\cdots c_t$$

共经 $2s+1$ 次相邻对换使 a,b 对换，所以两排列的奇偶性不同.

定理 1.2 $n(n\geqslant 2)$阶排列总数中，奇偶各占一半，即奇排列数等于偶排列数为$\frac{n!}{2}$.（证明略）

二、n 阶行列式

定义 1.3 由 n 行 n 列共 n^2 个数构成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示所有取自不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$（相同元素的不同排列不重复计算）的代数和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(i_1i_2\cdots i_n) \\ (j_1j_2\cdots j_n)}} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中，$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 称为行列式的一般项. $\sum\limits_{\substack{(i_1i_2\cdots i_n) \\ (j_1j_2\cdots j_n)}}$ 表示对$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 在一组足标取定后，另一组足标取遍所有 n 阶排列求和.

调换一般项中任意两个数的位置，乘积的值没变，行标和列标的排列都做了一次对换，逆序数的奇偶性都变了，但它们逆序数之和的奇偶性没有变（和的大小变了），所以行列式又可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(t_1t_2\cdots t_n)} (-1)^{N(t_1t_2\cdots t_n)} a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(s_1 s_2 \cdots s_n)} (-1)^{N(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{s_1 1} a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n}$$

【例2】 判断下列乘积是否为行列式展开的代数和中的一项,如是写出该项的符号.

(1)$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{54}$;(2)$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{56}$;

(3)$a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54}$;(4)$a_{21}a_{33}a_{12}a_{54}a_{45}$.

解 (1)不是,因为 a_{44}、a_{54}都取自第4列;

(2)不是,a_{56}取自第6列但只有5个数相乘;

(3)是,$N(21345)=1$,符号为负;

(4)是,$N(23154)+N(13245)=3+1=4$,符号为正.也可将 $a_{21}a_{33}a_{12}a_{54}a_{45}$ 调整为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{45}a_{54}$,则 $N(21354)=2$,符号为正.

【例3】 已知 $a_{i1}a_{2j}a_{54}a_{13}a_{4k}$是5阶行列式中的一项,问 i,j,k 取何值?

解 由于每一项中的元素取自不同的行,不同的列,所以行标 $i=3$,列标 j、k 可取2、5.若 $j=2,k=5$,则 $N(32514)+N(12435)=6$.若 $j=5,k=2$,则 $N(32514)+N(15432)=11$.因为 $a_{i1}a_{2j}a_{54}a_{13}a_{4k}$前是正号,所以 $i=3,j=2,k=5$.

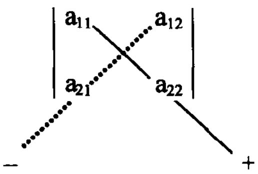
n 阶行列式所表示的代数和共有 $n!$ 项.2阶行列式展开的代数和中有 $2!=2$ 项,3阶行列式展开的代数和中有 $3!=6$ 项,4阶行列式展开的代数和中有 $4!=24$ 项.1阶行列式$|a|$就是 a.行列式有时简记为$|a_{ij}|$.

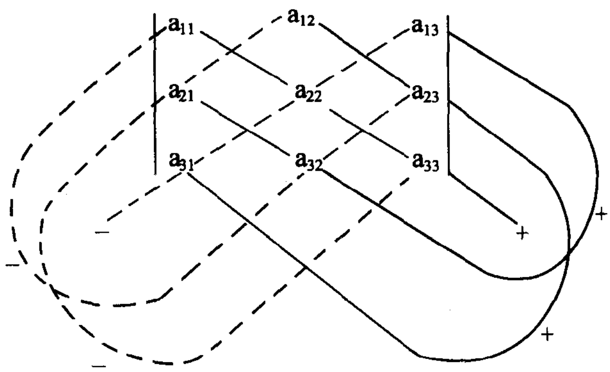
依定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

可用如下方法记忆:





图中各实线联结的元素的乘积是代数和中的正项,各虚线联结的元素的乘积是代数和中的负项.

例如:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1 - 1\times(-2) = 3+2 = 5$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 5\times 0 + 2\times 6\times(-7) + 3\times 4\times(-8) -$$

$$3\times 5\times(-7) - 2\times 4\times 0 - 1\times 6\times(-8) =$$

$$-84 - 96 + 105 + 48 = -27$$

【例 4】 计算

(1)主对角线行列式

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

(2)副对角线行列式

$$D = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

其中未写出的元素均为零.

解 (1)设 $\lambda_i=a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式一般项为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,只考虑可能不为零的项. a_{1j_1}取自第1行,只能取 $a_{1j_1}=a_{11}$;a_{2j_2}取自第2行,只能取 $a_{2j_2}=a_{22}$.如此下去则有

$$D=\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=(-1)^{N(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

(2)设 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}(i=1,2,\cdots,n)$,分析方法同(1).

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,\,n-1} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^{N(n(n-1)\cdots 1)}a_{1n}a_{2,\,n-1}\cdots a_{n1}=$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

【例5】 由定义证明上三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

证 设 D_n 的一般项为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,只考虑可能不为零的项.第 n 行只有a_{nn}可能不为零,故 a_{nj_n}取a_{nn};第 $n-1$ 行可能不为零的元素有 a_{n-1n-1} 和 a_{n-1n},但在第 n 列已取过a_{nn},故 $a_{n-1j_{n-1}}$只能取 a_{n-1n-1}.如此下去可得 $a_{nj_n}=a_{nn}$, $a_{n-1j_{n-1}}=a_{n-1n-1}$,$\cdots$,$a_{1j_1}=a_{11}$.所以 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

同样可证下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

上(下)三角形行列式的值等于主对角线元素的乘积,这是行列式计算中常用的结论.

§1.2 行列式的性质

设
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记
$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^T 为行列式 D 的转置行列式,即把行列式 D 的行按原顺序改成列得到的行列式.

性质 1.1 行列式转置后其值不变,即 $D = D^T$.

证 设
$$D = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

因为 $b_{ij} = a_{ji}$,所以

$$D^T = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D$$

此性质表明,行列式的行具有的性质对列也成立,所以以下性质只对行给出证明.

性质 1.2 交换行列式的两行(列),行列式变号,即

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & q_{qn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

证 设

$$D = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array} \qquad D_1 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{array}$$

其中 $1\cdots p\cdots q\cdots n$ 为自然数排列.

D 与 D_1 有相同的元素乘积项 $a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$，此项在 D 中的符号为 $(-1)^{N(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$；在 D_1 中，由于 p、q 两行交换，使行标排列次序交换，列标排列次序不变，此项符号由

$$(-1)^{N(1\cdots q\cdots p\cdots n)+N(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)} = -(-1)^{N(j_1\cdots j_p\cdots j_q\cdots j_n)}$$

确定，因此

$$D = -D_1$$

推论 1 两行(或两列)元素相同的行列式的值为零. 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

证 把相同的两行互换，则 $D=-D, 2D=0$，所以

$$D = 0$$

性质 1.3 行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 k，等于数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{p1} & \cdots & ka_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据行列式定义,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{p1} & \cdots & ka_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{pj_p})\cdots a_{nj_n} =$$

$$k\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{nj_n} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 行列式一行(列)所有元素的公因子可以提取到行列式的外面.(证明略)

推论 3 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零.(证明略)

性质 1.4 如果行列式某一行(列)的元素均为两数之和,则行列式可分为两个行列式之和.这两个行列式除这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一外,其余各行(列)的元素与原行列式相同.即设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则
$$D = D_1 + D_2$$

证 根据行列式定义

$$D = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} =$$

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+$$

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=$$

$$D_1+D_2$$

性质 1.5 把行列式某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{p1}+ka_{q1} & \cdots & a_{pn}+ka_{qn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q_1} & \cdots & a_{q_n} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

由性质 1.4 及推论 3 可直接得证.

【例 6】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -6 & 8 & -10 \\ 3 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 15 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} -6 & 8 & -10 \\ 3 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 15 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & 15 \end{vmatrix}=$$

$$2\times5\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}\times 1 =$$

$$10\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$-10\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-120$$