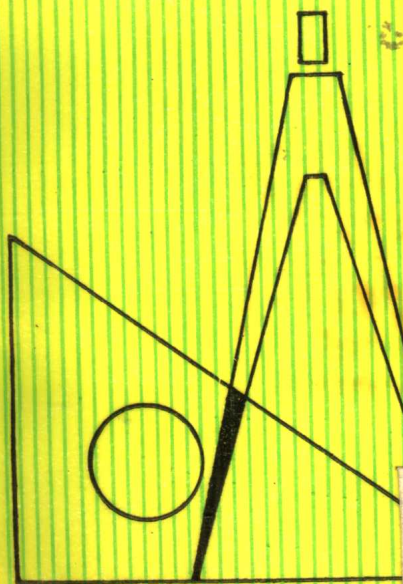


周又之 贾中裕 陈家让 编

上册

职工中专数学辅导



G633.6/ZYZ

工业出版社

职工中专数学辅导

上册

周又之 贾中裕 陈家让 编



机械工业出版社

内 容 简 介

本书是根据职工中等专业学校的数学课本而编写的。分上、下两册。上册为初等数学内容,包括有理数与对数、函数及其图象、三角函数、直线与二次曲线及数列等。下册为高等数学内容,包括行列式与矩阵初步、一元函数的微积分、概率初步等。

本书章节编排的顺序与职工中等专业学校的数学课本的顺序基本一致。每章中都有学习重点和例题分析,通过对一些典型例题的分析,辅导学员弄清基本概念,掌握解题思路,总结解题方法;在每章后面还列出练习题和自我检查题,可供学员复习总结时自我检查使用。为方便读者,在每章后附有略解或答案。

本书不仅适用于职工中专,对电视中专及职工高中也适用。

职 工 中 专 数 学 辅 导

上 册

责任编辑 孙 瑞

周又之 贾中裕 陈家让 编

机械工业出版社出版 (北京阜成门外百万庄南街一号)
(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市密云县 印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 787×1092 1/32 · 印张 11 7/8 · 字数 285 千字
1987年5月北京第一版·1987年5月北京第一次印刷
印数 0,001—5,650 · 定价 2.90 元

统一书号: 7033 · 6372

前 言

目前,我国广大职工、干部积极地接受成人教育,而职工中专是成人教育中的一个重要方面。为了帮助职工中专学员学好数学课,掌握数学基础知识和加强基本技能的训练,我们参照现行职工中专的数学教材,编写了这本数学辅导书。

职工中专的数学课程的特点是内容横向跨度大,包括初等数学和高等数学两部分。本书分上、下两册。上册为初等数学内容,包括指数与对数、初等函数、三角函数式的变换、直线和二次曲线及数列等。下册为高等数学内容,包括行列式与矩阵初步、一元函数的微积分、概率初步等。

本书编写顺序与职工中专数学教材的顺序基本一致,每章中都有学习重点和例题分析,通过对一些典型例题的分析,辅导学员弄清基本概念,掌握解题思路,总结解题方法;在每章后面还列出练习题和自我检查题,可供学员复习总结时自我检查使用。为方便读者,在每章后附有略解或答案。

我们希望通过阅读本书,能有助于学员加深对教材的理解,正确掌握基本概念,抓住重点,提高解题能力。

本书不仅适用于职工中专,对电视中专及职工高中也适用。汪光顺同志对本书进行了认真审阅,并提出许多宝贵意见,在此深表谢意。由于我们水平有限,错误在所难免,敬希望读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第一章 指数与对数	1
§ 1.1 指数	1
练习 1-1	10
§ 1.2 对数	12
练习 1-2	19
自我检查题	20
练习题及自我检查题答案或略解	23
第二章 函数及其图象	26
§ 2.1 函数	26
练习 2-1	32
§ 2.2 正比例函数和反比例函数	33
练习 2-2	37
§ 2.3 一次函数	37
练习 2-3	40
§ 2.4 二次函数	41
练习 2-4	54
§ 2.5 幂函数	56
练习 2-5	62
§ 2.6 指数函数和对数函数	64
练习 2-6	71
自我检查题	72
练习题及自我检查题答案或略解	73
第三章 三角函数	85
§ 3.1 任意角的三角函数	85
练习 3-1	99

§ 3.2 三角函数的图象和性质	102
练习 3-2	119
§ 3.3 两角和与差的三角函数	122
练习 3-3	144
§ 3.4 反三角函数与三角方程	147
练习 3-4	165
§ 3.5 解三角形	168
练习 3-5	180
自我检查题	183
练习题及自我检查题答案或略解	187
第四章 直线与二次曲线	253
§ 4.1 直角坐标系、曲线和方程	253
练习 4-1	267
§ 4.2 直线	268
练习 4-2	276
§ 4.3 二次曲线	278
练习 4-3	306
§ 4.4 坐标轴的平移	308
练习 4-4	311
自我检查题	312
练习题及自我检查题答案或略解	312
第五章 数列	325
§ 5.1 数列	325
练习 5-1	333
§ 5.2 等差数列	334
练习 5-2	351
§ 5.3 等比数列	353
练习 5-3	373
自我检查题	376
练习题及自我检查题答案或略解	377
附录 初中代数的主要内容	399

第一章 指数与对数

§1.1 指数

本节要点:

1. 掌握正整数指数幂、零指数幂、负指数指数幂、分数指数幂的概念.
2. 掌握正整数指数幂的运算法则, 明确这些法则对于所有的有理数指数幂都适用.
3. 正确运用法则, 熟练地进行各种指数的运算.

一、主要内容

1. 正整数指数

(1) 定义 $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个}} \quad (n \text{ 是大于 } 1 \text{ 的自然数})$

$$a^1 = a.$$

(2) 运算法则

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0, m, n \text{ 是自然数})$$

2. 零指数

$a \neq 0$ 时, $a^0 = 1$. 注意 0^0 没有意义, 定义 a^0 , 即定义一个

数的零次幂时,与法则 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$) 密切相关. 因此, 必须限制 $a \neq 0$.

3. 负整数指数

(1) $a \neq 0$ 时, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ 其中, p 是自然数, 零的负整数次幂没有意义.

(2) 开始学习时, 要注意分清底数和指数. 如

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{-2^4} = -\frac{1}{16};$$

$$-2^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16};$$

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1};$$

$$\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{a-b}{a+b}$$

都是错误的. 而 $(-2)^{-4}$ 表示的是 -2 的 -4 次幂, 应为 $\frac{1}{(-2)^4}$; -2^{-4} 表示的是 2 的 -4 次幂的相反数, 应为 $-\frac{1}{2^4}$.

上述各题的正确结果是:

$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16};$$

$$-2^{-4} = -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16};$$

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b};$$

$$\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b+a}{b-a}.$$

(3) 引进负整数幂以后, $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}$, 其中 m 、

n 为自然数. 特别地, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = (ab^{-1})^n = a^n b^{-n}$. 所以, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 和 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 可以统一成 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, 其中 m, n 可以是整数, $a \neq 0$. $(ab)^n = a^n b^n$ 和 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$) 可以统一成 $(ab)^n = a^n b^n$, 其中 n 可以是整数. 这时幂的运算法则可归并为以下的三条:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ (a^m)^n &= a^{mn} \\ (ab)^n &= a^n b^n \end{aligned}$$

其中, m, n 均为整数, $a \neq 0, b \neq 0$.

有了负整数指数幂的概念, 分式可以写成整式的幂的形式. 在指数运算中, 要注意灵活运用有关概念和法则, 如

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} &= (2^{-1})^{-3} = 2^3 = 8; \\ (0.1)^{-2} &= (10^{-1})^{-2} = 10^2 = 100; \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n. \end{aligned}$$

4. 科学记数法

(1) 要掌握的科学记数法, 它在生产或科学实验中应用广泛. 同时也是求常用对数的首数的必要准备. 于是要学会把一个数用科学记数法表示出来; 也要学会将一个科学记数法表示的数写成普通形式的数.

(2) 将一个数写成科学记数法的形式 $a \times 10^n$ (其中 a 表示一位整数或带一位整数的小数, n 为整数), 10 的幂指数 n 的绝对值, 等于小数点向左或向右移动的位数. 如

$$127.43 = 1.2743 \times 10^2;$$

↑
2 位

$$0.0000125 = 1.25 \times 10^{-5}.$$

$\begin{array}{c} \text{└───┐} \\ \text{5 位} \end{array}$

5. 根式

(1) 二次方根 如果 $x^2 = a$, 那么, x 就叫做 a 的二次方根. 一个正数 a 的平方根有两个, 它们互为相反数, 用“ $\pm\sqrt{a}$ ”表示. 零的平方根是零. 负数没有平方根(在实数范围内).

正数 a 的正的平方根, 叫做 a 的算术平方根, 记作 $\sqrt{a}$. 零的算术根是零, 即 $\sqrt{0} = 0$.

(2) n 次方根 如果 $x^n = a$ (n 是大于 1 的整数), 那么, x 叫做 a 的 n 次方根. 一个正数的偶次方根有两个, 它们互为相反数. 用“ $\pm\sqrt[n]{a}$ ”表示. 正数的奇次方根是一个正数, 负数的奇次方根是一个负数. 所以, 当 n 是奇数时, a 的 n 次方根用“ $\sqrt[n]{a}$ ”表示. 零的任何次方根是零, 即 $\sqrt[n]{0} = 0$.

正数 a 的正的 n 次方根, 叫做 a 的 n 次算术根. 零的 n 次算术根是零.

(3) 根式 我们把表示方根的代数式叫做根式. 如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{-10}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt[3]{m^2-2m}$ 等.

如果 $\sqrt[n]{a}$ 是一个根式, 那么就有:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a;$$

当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n} = a$;

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$.

(4) 根式的基本性质

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0).$$

特别地, $\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m \quad (a \geq 0)$.

其中, m 是自然数, n 和 p 是大于 1 的整数.

(5) 最简根式 符合下列三个条件的根式叫做最简根式:

- 1) 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数;
- 2) 被开方数不含分母;
- 3) 被开方数的指数和根指数互质.

6. 分数指数

(1) 定义

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

其中, $a > 0$, m, n 都是自然数, $n > 1$.

应当注意, 零的正分数次幂是零, 零的负分数次幂没有意义. 还应指出, 当指数是分数时, 如果没有特别说明, 底数都表示正数.

(2) 关于整数指数幂的运算法则, 对于分数指数幂也同样适用. 但对于分数指数幂的底数必须要求大于0.

(3) 引进分数指数后, 幂的运算法则与根式的运算法则可以统一.

因为根式的乘法、除法、乘方、开方, 除特殊情况外, 一般

分数指数幂	根式	若 $\frac{1}{n} = \alpha, \frac{1}{m} = \beta$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$	
$(ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha} b^{\alpha}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$
$(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(a^{\alpha})^m = a^{\alpha m}$
$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$

利用分数指数进行比较简便。所以,我们进行根式运算时,一般都利用分数指数进行。

如前所述,分数指数幂的运算中,要求每一个底数应是正数,如 $(-1)^{\frac{1}{3}}$ 和 $(-1)^{\frac{2}{3}}$ 是不相等的, $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$,而 $(-1)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$ 。

7. 有理数指数

引进了负整数指数,零指数,分数指数以后,指数概念可扩充到有理数范围。就是说,幂 a^α 中 α 可取任意有理数,一般要求底数 $a > 0$ 。对于有理数指数幂的运算,满足以下运算法则:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta};$$

$$(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$

其中 $a > 0$, $b > 0$; α, β 为有理数。(顺便提一下, α, β 也可任意实数)

进行指数运算时,要灵活运用有关的概念和法则。如

$$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} \left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} &= \left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} \\ &= -\frac{2}{3}; \end{aligned}$$

$$\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}} = (a^{-1}+b^{-1})ab = b+a;$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^{-2}y^{-5}} \div \sqrt[4]{16x^{-5}y^8} &= (x^{-2}y^{-5})^{\frac{1}{2}} \cdot (2^4x^{-5}y^8)^{-\frac{1}{4}} \\ &= x^{-1}y^{-\frac{5}{2}} \cdot 2^{-1}x^{\frac{5}{4}}y^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{-1} x^{\frac{1}{4}} y^{-4\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{x}}{2y^4 \sqrt{y}} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{x} \sqrt{y}}{2y^5}.
 \end{aligned}$$

指数运算的最后结果, 如果没有特别要求, 一般应将负整数次幂写成分式, 分数次幂写成最简根式。但直接以负整数指数幂或分数指数幂的形式作为最后结果也可以。

二、例题

例 1 计算下列各题:

$$(1) \left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} - (3.14)^0 + \left(-\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$(2) \frac{(a^{\frac{8}{5}} \cdot b^{-\frac{6}{5}})^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}};$$

$$(3) (x^{\frac{a}{a-b}})^{\frac{1}{c-a}} (x^{\frac{b}{b-c}})^{\frac{1}{a-b}} (x^{\frac{c}{c-a}})^{\frac{1}{b-c}}.$$

解 (1) 原式 $= \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + (10^{-1})^{-2} - 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)$
 $= \frac{3}{2} + 10^2 - 1 - \frac{3}{2}$
 $= 99.$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= \frac{a^{\frac{8}{5} \times (-\frac{1}{2})} \cdot b^{(-\frac{6}{5}) \times (-\frac{1}{2})} \cdot a^{\frac{4}{5}}}{b^{\frac{3}{5}}} \\
 &= a^{-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{3}{5} + (-\frac{3}{5})} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 原式} &= x^{\frac{a}{(a-b)(c-a)}} \cdot x^{\frac{b}{(b-c)(a-b)}} \cdot x^{\frac{c}{(c-a)(b-c)}} \\
 &= x^{\frac{a}{(a-b)(c-a)} + \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(c-a)(b-c)}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}} \\
 &= x^0 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

例2 化简下列各题:

$$(1) (1-c^2)^{-\frac{1}{2}} - \{[(1+c)(1-c)]^{\frac{1}{2}} + c^2[(1+c)(1-c)]^{-\frac{1}{2}}\};$$

$$(2) \sqrt{\frac{a^{\frac{8}{3}}}{b^{\frac{5}{3}}c^{\frac{1}{3}}}} \div \frac{a^3\sqrt[4]{b}}{\sqrt{c}};$$

$$(3) \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}}.$$

解 (1) 原式 = $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - \left\{ \sqrt{1-c^2} + \frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}} \right\}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - \frac{1-c^2+c^2}{\sqrt{1-c^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{5}{6}}c^{\frac{2}{6}} \div a^2b^{\frac{1}{4}}c^{-\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{3}{2}-2} \cdot b^{-\frac{5}{6}-\frac{1}{4}} \cdot c^{\frac{2}{6}+\frac{1}{2}} \\
 &= a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{13}{12}}c^{\frac{5}{6}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 原式} &= \left[\frac{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2}{(x+y)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})} - \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2} - \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \\
 &= \frac{(x+y)(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})^2}{4xy} - \frac{2(x+y)\sqrt{xy}}{4xy} \\
 &= \frac{(x+y)^3}{4xy}.
 \end{aligned}$$

例3 若 $x=9^{-1}$, 求 $x^{-2}+2x^{-1}+1$ 的值.

$$\begin{aligned}\text{解 } x^{-2}+2x^{-1}+1 &= (x^{-1}+1)^2 \\ &= [(9^{-1})^{-1}+1]^2 \\ &= 10^2 = 100.\end{aligned}$$

例4 若 $a=16^{-1}$, $b=81^{-1}$ 求 $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$ 之值

$$\begin{aligned}\text{解 原式} &= \frac{16^{-1}-81^{-1}}{(16^{-1})^{\frac{3}{4}}+(16^{-1})^{\frac{1}{2}}(81^{-1})^{\frac{1}{4}}} \\ &\quad + \frac{(16^{-1})^{\frac{1}{2}}-(81^{-1})^{\frac{1}{2}}}{(16^{-1})^{\frac{1}{4}}+(81^{-1})^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{16^{-1}-81^{-1}}{2^{-4 \cdot \frac{3}{4}}+2^{-4 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 3^{-4 \cdot \frac{1}{4}}} \\ &\quad + \frac{2^{-4 \cdot \frac{1}{2}}-3^{-4 \cdot \frac{1}{2}}}{2^{-4 \cdot \frac{1}{4}}+3^{-4 \cdot \frac{1}{4}}} \\ &= \frac{16^{-1}-81^{-1}}{2^{-3}+2^{-2} \cdot 3^{-1}} + \frac{2^{-2}-3^{-2}}{2^{-1}+3^{-1}} \\ &= \frac{\frac{65}{16 \times 81}}{\frac{5}{24}} + \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{65 \times 24}{16 \times 81 \times 5} + \frac{5 \times 6}{36 \times 5} \\ &= \frac{39}{54} + \frac{1}{6} = \frac{8}{9}.\end{aligned}$$

例5 若 $y+y^{-1}=2$, 求 y^4+y^{-4} 的值.

$$\begin{aligned}\text{解 将 } y+y^{-1}=2 \text{ 两边平方, 得} \\ y^2+2yy^{-1}+y^{-2}=4\end{aligned}$$

又 $\because y \cdot y^{-1} = 1, \therefore y^3 + y^{-2} = 2.$

两边再平方, 得

$$y^4 + 2y^2y^{-2} + y^{-4} = 4,$$

$$\therefore y^4 + y^{-4} = 2.$$

例 6 求证: $[(2m)^0 - (m+x)^{-2}] \div [(2x)^0 - (m+x)^{-1}]^2$

$$\cdot \left[2m^0 - \frac{1 - (m-x)^2}{2mx} \right] = \frac{(m+x+1)^2}{2mx}$$

证明:

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \left[1 - \frac{1}{(m+x)^2} \right] \div \left[1 - \frac{1}{m+x} \right]^2 \\ &\quad \cdot \left[2 - \frac{1 - (m-x)^2}{2mx} \right] \\ &= \frac{(m+x)^2 - 1}{(m+x)^2} \div \left(\frac{m+x-1}{m+x} \right)^2 \\ &\quad \cdot \frac{4mx - 1 + m^2 - 2mx + x^2}{2mx} \\ &= \frac{(m+x+1)(m+x-1)}{(m+x)^2} \cdot \frac{(m+x)^2}{(m+x-1)^2} \\ &\quad \cdot \frac{(m+x)^2 - 1}{2mx} \\ &= \frac{(m+x+1)(m+x-1)}{(m+x)^2} \cdot \frac{(m+x)^2}{(m+x-1)^2} \\ &\quad \cdot \frac{(m+x+1)(m+x-1)}{2mx} \\ &= \frac{(m+x+1)^2}{2mx} \\ &= \text{右边.} \end{aligned}$$

练 习 1-1

1. 计算下列各题:

$$(1) (-3)^0 - 0^{\frac{1}{2}} + (-2)^{-2} - 16^{-\frac{1}{4}},$$

$$(2) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^8 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{8}};$$

$$(3) \frac{0.027^{-\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2} - 3^{-1}}{(-1000)^0 - \log_{10} \sqrt[3]{10}} \times (3 - 0.75)^{-\frac{1}{2}};$$

$$(4) \left(\sqrt[3]{\frac{a^{-\frac{1}{2}}b^2}{ab^{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b\sqrt{a^{-2}}}{\sqrt{ab^2}}}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$(5) \left(\frac{x^{-1}-1}{x^{-1}+1} - \frac{x^{-1}+1}{x^{-1}-1}\right)(2^{-1} - 4^{-1}x^{-1} - 4^{-1}x).$$

2. 化简下列各式:

$$(1) (ab^{-8}c^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^7b^4c^{-2})^{\frac{1}{3}} \cdot (a^{-5}bc)^{\frac{1}{6}};$$

$$(2) 8x^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{y^{-\frac{1}{3}}x} \cdot \sqrt[4]{y^{\frac{4}{3}}};$$

$$(3) (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - x^2 (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + R^2 \cdot \frac{(R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x^2 (R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(R^2 - x^2) \left[1 + \left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x}\right)^{-2}\right]}.$$

3. 若 $a = 3^{-\frac{1}{2}}$, 求 $(a+1)(a-1)^{-1}$ 的值.

4. 若 $a^{2x} = 5$, 求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值.

5. 若 $x + x^{-1} = 3$, 求 $x^2 + x^{-2}$ 的值.

6. 求证: $\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{x}}}}{c\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{x}}}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b\sqrt{c\sqrt{a\sqrt{x}}}}{a\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{x}}}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{c\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{x}}}}{b\sqrt{c\sqrt{a\sqrt{x}}}}} = 1.$