群論和核譜

G. 拉卡 著

高等教育出版社

本書是以色列耶路撒冷大学教授G. 拉卡(Giulio Racah)于1951年春在美国普林斯頓高等研究所討論班上的講演記录。原書名为 Group Theory and Spectroscopy。本書分两大部分，第一部分包括四講，介紹李群的理論。第二部分也包括四講，說明如何把群表示論用到原子核結构問題上去。

本書可作为物理系理論物理或原子物理專业的教师或高年級学生研究原子核壳層模型的参考書。

群 論 和 核 譜

G. 拉 卡 著

梅 向 明 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版业營业許可証出字第054号）

人民教育印刷厂印装　新华书店发行

統一書号13010.671　开本850×1168 $^{1}/_{32}$　印張2$^{10}/_{16}$

字數57,000　印數0001—3,000　定价(4)￥0.32

1959年9月第1版　1959年9月北京第1次印刷

目　　录

第一講　关于連續群的一般概念

这些講座是討論如何把群論应用到核譜和核結构的問題上去，为此，必須先建立数学工具。不过，我們有时略去严格的証明，碰到这样的情形，則注出有关文献。

§1. 連續群和无穷小群

我們先給出一組 n 个变数 $x_0^i(i=1, \cdots, n)$，它們可以看成某个空間中一点的坐标。現在考虑方程組

$$x^i=f^i(x_0^1, \cdots, x_0^n; a^1, \cdots, a^r), \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1}$$

其中出現的 a^ρ 是一組 r 个独立参数。略去指标，我們可以把这方程組或类似的关系式写成下列形状：

$$x=f(x_0; a) \text{ 或 } x=S_a x_0. \tag{1'}$$

这些方程定义了依賴参数組 a 的一組变換 S，它把向量 x_0 映为 x。我們将假定 f^i 有所有需要的导数，同时 f^i 是**本質地**(essentially)依賴于参数，这就是說，不会有参数不同的两个变換，它們对于所有的 x_0 的值都是相同的，所以，r 是完全地和唯一地确定一个变換的参数的最小数目。

变換 f 的集合称为构成一个群，如果它滿足以下两个条件：

i) 連續实施这一集合中两变換的結果是这集合中另一个变換。形式地說，如果 $x=f(x_0; a)$ 并且 $x'=f(x; b)$，則存在一組参数 c^ρ 使得

$$c^\rho=\varphi^\rho(a; b), \tag{2}$$

$$x'=f(x; b)=f(f(x_0; a); b)=f(x_0; c)=f(x_0; \varphi(a; b)). \tag{3}$$

ii) 对应每一个变換存在唯一的逆变換，它也屬于此集合，卽：

巳知方程(1),則存在一参数 $\bar{a}$ 使得 $x_0=f(x, \bar{a})$。

如果变換的雅谷比不等于零的話:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_0}\right| \neq 0, \tag{4}$$

則可确保 $\bar{a}$ 的唯一性。

变 x_0 为 x, 然后再把 x 变回为 x_0, 由 i) 我們得到屬于群的一个变換，它由参数組 a_0 来决定。因为变換是本質地依賴于参数，因此所得的 a_0 不依賴于开始时的参数的特殊值。变換 $f(x; a_0)$称为么变換。

我們可以取:

$$a_0^\rho=1, \quad (\rho=1, \cdots, r),$$

因为这并沒有添加限制条件，r 称为群的**阶**(注意这名詞和有限群中所用的不同)。

我們还希望讀者記住下列定义:

一个群到另一个群的映象称为是**同态的**或者是一个**同态**，如果它保持群的乘法。如果再添加一个条件: 两群元素間的对应是一一的,則我們把这样的映象称为**同构**。因为变換(1)的組合律是用参数 a 来表示的,因此,两变換的变数数目 n 卽使不同，它們也可以是同态的或者甚至是同构的。

同态于巳知群的綫性变換群称为这巳知群的**表示**。

苏菲斯·李(Sophus Lie)的連續群論的基本观念是: 不去考虑整个群，而是它邻近么元素的一部分，由所謂**无穷小变換**組成。因此,我們把一点在一个变換下的有限位移,考虑成一連串无穷小位移——我們把它們想象成一个广义的速度場，这个場描写一点从原始位置 x_0 到它最后位置 x 的运动。

对于 x 我們現在有两个等价表达式:

$$\text{a)}\ x=f(x_0; a) \quad \text{或} \quad \text{b)}\ x=f(x; 0) \tag{5}$$

对应于它們，我們可用这两种方法中的一个来表示一个变换，从它們可以得到这样的結果：点 x 的新分量和旧分量差一无穷小，这无穷小量可以由对(5a)微分或在(5b)中引入一无穷小参数而得到：

$$x+dx=f(x_0;a+da) \quad 或 \quad x+dx=f(x,\delta a);$$

或者(采用暗和約定)

$$dx=\frac{\partial f(x_0;a)}{\partial a^\sigma}da^\sigma \quad 或 \quad dx=\left(\frac{\partial f(x;a)}{\partial a^\sigma}\right)_{a=0}\delta a^\sigma. \tag{6}$$

后式可写成

$$dx^i=u_\sigma^i(x)\delta a^\sigma,\quad u_\sigma^i(x)=\left(\frac{\partial f^i(x;a)}{\partial a^\sigma}\right)_{a=0}, \tag{7}$$

其中 $u_\sigma^i(x)$ 就定义了上面所說的“速度場”。用(2)式中的符号我們能写成

$$a+da=\varphi(a;\delta a),$$

因为从(2)和(5)可得 $\varphi(a;0)=a$, 我們有

$$a+da=a+\left(\frac{\partial\varphi(a;b)}{\partial b^\tau}\right)_{b=0}\delta a^\tau,$$

因此，da 是 δa 的綫性組合：

$$da^\rho=\mu_\tau^\rho(a)\delta a^\tau,\quad \mu_\tau^\rho(a)=\left(\frac{\partial\varphi^\rho(a;b)}{\partial b^\tau}\right)_{b=0} \tag{8}$$

解出 δa, 我們得

$$\delta a^\sigma=\lambda_\rho^\sigma(a)da^\rho, \tag{8'}$$

其中

$$\lambda\mu=I,\ 即\ \lambda_\rho^\sigma\mu_\tau^\rho=\delta_\tau^\sigma. \tag{9}$$

从(6)、(7)和(8′)，我們得第一基本公式：

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^\rho}=u_\tau^i(x)\lambda_\rho^\tau(a). \tag{A}$$

如果 u 是表示变换(1)的速度場，方程(A)应是完全可积的，换言之，对任意 n 个常数 x_0 它可有一組解。可积条件 $\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^\sigma\partial a^\rho}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial a^\rho\partial a^\sigma}$ 变成

$$\left(u^j_\chi\frac{\partial u^i_\nu}{\partial x^j}-u^j_\nu\frac{\partial u^i_\chi}{\partial x^j}\right)\lambda^\rho_\chi\lambda^\nu_\rho+u^i_\nu\left(\frac{\partial\lambda^\nu_\sigma}{\partial a^\rho}-\frac{\partial\lambda^\nu_\rho}{\partial a^\sigma}\right)=0, \tag{9}$$

并且，利用(9)式可得

$$u^j_\chi\frac{\partial u^i_\nu}{\partial x^j}-u^j_\nu\frac{\partial u^i_\chi}{\partial x^j}=c^\tau_{\chi\nu}(a)u^i_\tau, \tag{10}$$

其中

$$c^\tau_{\chi\nu}(a)=\left(\frac{\partial\lambda^\tau_\rho}{\partial a^\sigma}-\frac{\partial\lambda^\tau_\sigma}{\partial a^\rho}\right)\mu^\rho_\chi\mu^\sigma_\nu. \tag{11}$$

因为 u 和 a 无关，将(10)式对 a^ρ 微分給出

$$\frac{\partial c^\tau_{\chi\nu}(a)}{\partial a^\rho}u^i_\tau=0.$$

但是这些 a 假定是本質的，所以根据(7)式这些 u 是綫性无关的，因此这些 c 和 a 无关。方程(10)变成

$$u^j_\chi\frac{du^i_\nu}{\partial x^j}-u^j_\nu\frac{\partial u^i_\chi}{\partial x^j}=c^\tau_{\chi\nu}u^i_\tau, \tag{B$_1$}$$

洞时从(11)得

$$\frac{\partial\lambda^\tau_\rho}{\partial a^\sigma}-\frac{\partial\lambda^\tau_\sigma}{\partial a^\rho}=c^\tau_{\chi\nu}\lambda^\chi_\rho\lambda^\nu_\sigma, \tag{B$_2$}$$

(B$_1$)是速度場产生一个群的必要条件，(B$_2$)則是与它相关的 a 的对应的限制条件。

x 上的一个无穷小变换作用在任意一个函数 $F(x)$ 上誘导出下列变化：

$$dF(x)=\frac{\partial F}{\partial x^i}dx^i=\delta a^\sigma u^i_\sigma\frac{\partial F}{\partial x^i}\equiv\delta a^\sigma X_\sigma F, \tag{12}$$

其中

$$X_\sigma=u^i_\sigma(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{13}$$

(12)式指出：$F(x)$ 的每一个无穷小变换由算子 X 的綫性組合所产生，X 称为群 S 的无穷小算子。由(B$_1$)知它滿足关系

$$X_\rho X_\sigma-X_\sigma X_\rho\equiv[X_\rho X_\sigma]=c^\tau_{\rho\sigma}X_\tau, \tag{14}$$

显然

$$c^\tau_{\rho\sigma}=-c^\tau_{\sigma\rho}. \tag{C$_1$}$$

把(14)代入雅谷比恒等式

$$[[X_\rho X_\sigma]X_\tau]+[[X_\sigma X_\tau]X_\rho]+[[X_\tau X_\rho]X_\sigma]=0,$$

我們得 $$c^\mu_{\rho\sigma}c^\nu_{\mu\tau}+c^\mu_{\sigma\tau}c^\nu_{\mu\rho}+c^\mu_{\tau\rho}c^\nu_{\mu\sigma}=0. \qquad (C_2)$$

我們已指出，如果 f^i 形成一个群，則条件(C)成立。这命题的逆亦成立，这一点包括在李氏三定理中，这些定理我們不加証明而陈述如下。

I. 如果存在 $f^i=x^i$ 滿足(A)，則它們构成一个群。

II. 如果存在滿足(B_1)的这样一些 u，則差一同构可确定滿足(B_2)的一些 λ，使得方程(A)是可积的。

III. 对滿足(C)每一組的 c，存在一些 u 滿足(B_1)。

我們将把群 S 的一个无穷小变换写成形式 $S_a=1+\delta a^\sigma X_\sigma$，其中 δa^σ 是一阶无穷小量。如果我們組合这样两个变换，我們得

$$S_aS_b=(1+\delta a^\rho X_\rho)(1+\delta a^\sigma X_\sigma)=1+\delta a^\rho X_\rho+\delta a^\sigma X_\sigma,$$

其中一阶非零无穷小項被保持了下来。因此，与 S 中的乘法运算相对应的，是 S 的无穷小群的加法。如果一阶量为零，我們就要考虑高阶量。但是李氏第二定理肯定在这情形下不会超出二阶无穷小，就是說我們仅仅怕碰到**交換子**(commutators)，它的表达式是 $S_aS_bS_a^{-1}S_b^{-1}$，找出它的对应二阶无穷小算子 $\delta a^\rho\delta b^\sigma[X_\rho X_\sigma]$ 是包括在无穷小算子的綫性流形中。

§2. 参数群和伴随群

把(8)式和(7)式比較，我們会看到函数 μ 和 u 在形式上是很类似的。事实上，由群的組合律所决定的参数之間的关系(2)中，$\varphi(a;b)$ 本身可以如(1′)那样看成是定义了的一个群：

$$a'^\rho=\varphi^\rho(a;b),$$

这关系可以看成把 a 映为 a' 的一个映象，变換的参数为 b。我們将証明这些变換构成同构于 S 的一群 P_1，称为**第一参数群**。事实上，如果 $a'=\varphi(a;b)$ 并且 $a''=\varphi(a';c)$，則

$$a''=\varphi(\varphi(a;b);c)=\varphi(a;\varphi(b;c)),$$

其中最后等式由变换 f^i 的結合性質导出。因此我們看到第一参数群的組合律和原来变换 f^i 的群相同。

对于变量 b 的类似变换群 $\varphi(a;b)$ 称为**第二参数群** P_2。P_2 是反同构于 S 的，这就是說，如对应因子的次序相反时，則成为同构。但是因为 $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$，又因为一个群如果包括 x 則必定也包括 x^{-1}，因此，两者事实上是同构的。命 a（或 c）是屬于第一（或第二）参数群的一个变換。命 P_1 的运算变 b 为 $b'=\varphi(b,a)$，P_2 的运算变 b' 为 $b''=\varphi(c,b')$。則显然有

$$b''=\varphi(c,b')=\varphi(c,\varphi(b;a))=\varphi(\varphi(c;b);a).$$

因此 P_1 的每一元素和 P_2 的每一元素可換。

这些 μ 是 P_1 的速度場[見方程(8)]，并且它們定义了无穷小算子

$$A_\tau=\mu^\rho_\tau(a)\frac{\partial}{\partial a^\rho}. \tag{15}$$

对应地，对于 P_2

$$B_\tau=\bar{\mu}^\rho_\tau(b)\frac{\partial}{\partial b^\rho}. \tag{16}$$

另一个要考虑的很有用的运算是共軛运算：給出 S 中一个元素 Sa，对于群的每一元素 S_b 对应一个元素 $S_{b'}=S_aS_bS_a^{-1}$。运算 $b\to b'$ 是把群映为它本身的一一映象，它依賴于 S_a，称为 S 上由 S_a 决定的共軛运算。現在考虑当 S_a 跑遍 S 的所有元素时所得的共軛运算的集合。这些共軛运算本身构成一个变換群，由 S_a 的参数所参数化，但是一般地不同构于 S。容易看出，S 同构于它的共軛群的必要和充分条件是它的么元素，是唯一和 S 所有元素可对易的元素。

如果把 $x'=S_ax$ 看成是一个坐标变換，我們都熟知下列結果：把 S_b 作用于 x 的函数。然后把 x 換成 x'，等效于 S_b（經过 S_a）的共軛运算作用于 x' 的同一函数：

$$S_{b'}x' = S_a S_b x = (S_b x)'.$$

这就是説，如果一个运算在新的坐标系 x' 中来考虑时，它的参数的变化由共轭运算来决定。考虑参数群上共軛群的好处是：如果 S_e 是一无穷小变换，則它的共軛元素 $S_a S_e S_a^{-1}$ 也是无穷小变换，不管 S_a 的大小如何。

如果在第一个坐标系下 S_e 是表为 $S_e = 1 + \varepsilon e^\rho X_\rho$ 的，則經过变换 S_a 后，同一变换 S_e 将表为 $1 + \varepsilon e'^\rho X'_\rho$，因此

$$e'^\rho X'_\rho = e^\rho X_\rho, \tag{17}$$

变换群 $e^\rho \to e'^\rho$ 称为**伴随群**。我們希望确定由么元素邻域的变换 S_a 产生的共軛变换的无穷小算子。由于 $S_a = 1 + \delta_a^\sigma X_\sigma$ 和 $S_\rho = 1 + \varepsilon X_\rho$，我們有

$$S'_\rho = 1 + \varepsilon X'_\rho = S_a S_\rho S_a^{-1} = (S_a S_\rho S_a^{-1} S_\rho^{-1}) S_\rho = \\ = (1 + [\delta a^\sigma X_\sigma, \varepsilon X_\rho]) \cdot (1 + \varepsilon X_\rho),$$

或者，由(14)

$$X'_\rho - X_\rho \equiv dX_\rho = \delta a^\sigma [X_\sigma, X_\rho] = c_{\sigma\rho}^\tau \delta a^\sigma X_\tau,$$

从(17)，我們有

$$de^\tau X_\tau = -e^\rho dX_\rho = e^\rho c_{\rho\sigma}^\tau \delta a^\sigma X_\tau$$

或

$$de^\tau = e^\rho c_{\rho\sigma}^\tau \delta a^\sigma. \tag{18}$$

如果 E_σ 是伴随群的无穷小算子，把(18)和(7)与(13)比較后得

$$E_\sigma = e^\rho c_{\rho\sigma}^\tau \frac{\partial}{\partial e^\tau} \tag{19}$$

§ 3. 子群、單純群和半單純群

a) 一个群称为是**阿倍尔**的，如果它的所有元素对乘法是可交换的。由交换子和方括号之間的对应关系可以知道，一个阿倍尔群的所有方括号为零，因此所有的构造常数为零：

$$c_{\rho\sigma}^\tau = 0. \tag{20}$$

b）群 S 的一个**子群**是 S 中滿足群的假定的一組子集。因此，如果 $X_1, X_2, \cdots, X_p$ 是一子群的无穷小算子，这个群的构造常数必須滿足关系

$$c_{\rho\sigma}^{\tau}=0.\ (\rho, \sigma \leqslant p, \tau>p) \tag{21}$$

c）群 S 的一个**不变子群** H 是 S 的一个子群，它包括它的元素的所有共軛(元素)。因此，如果 S_n 屬于 H，則对于 S 的任一元素 S_x 来說，$S_xS_nS_x^{-1}$ 也屬于 H。假若如此，交換子 $S_xS_nS_x^{-1}S_n^{-1}$ 也屬于 H。因此，H 的无穷小元素和 S 的任一无穷小元素的方括号也屬于 H。如果 $X_1, X_2, \cdots X_p$ 是 S 的一个不变子群的无穷小标子，S 的构造常数应該滿足

$$c_{\rho\sigma}^{\tau}=0.\ (\rho \leqslant p, \tau>p) \tag{22}$$

d）一个群是**單純的**，如果除了么元素外它沒有其他不变子群。

e）一个群是**半單純的**，如果它除了么元素外沒有其他阿倍尔不变子群。

一个群有阿倍尔不变子群和沒有这种子群的区别是重要的，因为阿倍尔子群，尽管看起来似乎最容易处理，可是下面的例子指出从表示論的观点来說却是最麻煩的。

我們考虑一維的直綫运动群，其中变換 $x'=x+a$ 后再經过变換 $x''=x'+b$ 是等价于变換 $x''=x+a+b$ 的。这个群能用二阶的正方矩陣来表示，上面的組合律应該是

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

不过，这个特殊表示中沒有一个矩陣能够經过相似变換而变为对角矩陣，这一个特性是和阿倍尔性質紧密相关的。事实上，我們在后面将指出半單純群絕不会产生这种情形。此外，我們仅对群論在物理中的应用感到兴趣，而在那里只用到半單純群。因此我們

将仅限于半單純群的研究，为了这一点，我們首先要找出区别半單純群的准則。

这样的准則很容易用一个对称二阶張量来构成，这張量可以由 $c^{\tau}_{\rho\sigma}$ 作出如下：

$$g_{\rho\sigma}=c^{\mu}_{\rho\lambda}c^{\lambda}_{\sigma\mu}. \tag{23}$$

如果群是半單純的，必須有

$$\det|g_{\rho\tau}|\neq 0. \tag{24}$$

因为，假定它有一阿倍尔不变子群，它的元素的指标記为 $\bar{\rho}, \bar{\sigma}, \cdots$，則

$$\begin{aligned} g_{\rho\bar{\sigma}} &= c^{\mu}_{\rho\lambda}c^{\lambda}_{\bar{\sigma}\mu} \\ &= c^{\mu}_{\rho\bar{\lambda}}\ c^{\bar{\lambda}}_{\bar{\sigma}\mu}\ [\text{由 (22)}] \\ &= c^{\bar{\mu}}_{\rho\bar{\lambda}}\ c^{\bar{\lambda}}_{\bar{\sigma}\bar{\mu}}\ [\text{由(22)}] \\ &= 0. \qquad [\text{由(20)}] \end{aligned}$$

嘉当(Cartan)指出：条件(24)不仅是必要的，而且也是充分的。

我們可以利用張量 $g_{\mu\nu}$ 来定义逆变向量之間的正交关系，或者利用它們来降低一个張量的上指标以构成新的張量。例如

$$c_{\rho\sigma\lambda}=c^{\tau}_{\rho\sigma}g_{\tau\lambda}, \tag{25}$$

这新張量是完全反称的，因为由(23)知

$$\begin{aligned} c_{\rho\sigma\lambda} &= c^{\tau}_{\rho\sigma}c^{\nu}_{\tau\mu}c^{\mu}_{\lambda\nu} = -c^{\tau}_{\sigma\mu}c^{\nu}_{\tau\rho}c^{\mu}_{\lambda\nu}-c^{\tau}_{\mu\rho}c^{\nu}_{\tau\sigma}c^{\mu}_{\lambda\nu}\ [\text{由}(C_2)]= \\ &= c^{\tau}_{\sigma\mu}c^{\nu}_{\rho\tau}c^{\mu}_{\lambda\nu}+c^{\tau}_{\mu\rho}c^{\nu}_{\tau\sigma}c^{\mu}_{\nu\lambda}\ [\text{由}(C_1)]. \end{aligned}$$

最后一行导出所求的性質。因为它在指标的循环排列下不变，可是另一方面由 $c_{\rho\sigma\lambda}$ 的作法知道它对于 ρ 和 σ 是反称的。

如果群 S 是半單純的，則嘉当准則(24)肯定：我們能由 $g_{\rho\sigma}$ 求出逆張量 $g^{\rho\sigma}$，利用后者我們可以提升張量的下指标或者定义协变向量間的正交关系。

作为上面所述内容的例子，我們考虑三維剛体运动群，它包括

平移和轉动。无穷小轉动由算子 $L_j\,(j=1,2,3)$ 所产生，L_j 滿足

$$[L_1, L_2]=iL_3 \text{ 等等.} \tag{26}$$

无穷小位移的算子是 $P_1=L_4, P_2=L_5, P_3=L_6$, 它們彼此可对易幷滿足

$$[L_1, L_5]=iL_6 \text{ 等等.}$$

因此，仅有的非零构造常数是

$$c^3_{12}=c^1_{23}=c^6_{15}=c^4_{26}=c^5_{34}=c^2_{31}=c^5_{61}=c^6_{42}=c^4_{53}=i.$$

再加上(C_1)給出的对应序列。对于 $g_{\rho\sigma}$ 我們找到

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=4,\quad g_{44}=g_{55}=g_{66}=0,\quad g_{\rho\sigma}=0\ (\rho\neq\sigma).$$

如同嘉当准則所要求的那样，$g_{\rho\sigma}$ 的行列式为零，因为平移构成了一个阿倍尔不变子群。

如果我們仅考虑由(28)定义的三維轉动群，我們發現它是單純的，幷且度量張量是

$$g_{\rho\sigma}=2\delta_{\rho\sigma}. \tag{27}$$

第二講　半單純群的分类

§1. 无穷小群的标准型

为了要对一个半單純群的无穷小算子集找到一个标准坐标系，我們考虑下列形式的特征值問題

$$[AX]=\rho X, \tag{28}$$

其中 A 是任意固定的无穷小算子 $A=a^{\mu}X_{\mu}$，同时 $X=x^{\nu}X_{\nu}$ 是对应于特征值 ρ 的一个特征向量。用 (14) 我們能把 (28) 明显地写为

$$a^{\mu}x^{\nu}c_{\mu\nu}^{\tau}X_{\tau}=\rho x^{\tau}X_{\tau},$$

因为无穷小算子是綫性无关的，由此导出

$$(a^{\mu}c_{\mu\nu}^{\tau}-\rho\delta_{\nu}^{\tau})x^{\nu}=0. \tag{29}$$

从(29)我們得出特征方程

$$\det(a^{\mu}c_{\mu\nu}^{\tau}-\rho\delta_{\nu}^{\tau})=0. \tag{30}$$

如果現在存在 r 个綫性无关的特征向量，它們可以作为 r 維空間的坐标系的基，不过如果特征方程有重根的話，則一般不存在 r 个綫性无关的特征向量。平常在物理問題中，矩陣的黑密脫(Hermite)或对称的条件肯定了 r 个綫性无关的特征向量的存在性，但是对于半單純无穷小群嘉当已指出：如果 A 是这样地选擇，使特征方程 (30) 有最大数目的不同的根，則仅在 $\rho=0$ 时才可能有重根；假定 l 是这根的重数，对应这个根有 l 个彼此可对易的綫性无关的特征向量 $H_1,\cdots,H_l$。l 称为半單純群的**秩**（因为 A 和本身可对易，因此一个半單純群的秩至少为 1)。

我們将用拉丁指标 $1,\cdots,l$ 表示 l 維子空間中的坐标，这子空間是被 H_i 所生成的，同时用希腊指标 $\alpha,\cdots,\nu$ 来表示 $r-l$ 維子空間

的坐标，这子空間由不等于零的各不同的根 $\alpha, \cdots, \nu$ 所对应的特征向量 $E_\alpha, \cdots, E_\nu$ 生成。对于后一种指标"賵和"約定不一定采用。至于 ρ, σ, τ 这三个指标，則專門用来表示整个 r 維空間。

基向量 H_i 和 E_α 由下列关系所确定：

$$[A\ H_i]=0, \quad (i=1, \cdots, l) \tag{31}$$

$$[A\ E_\alpha]=\alpha E_\alpha. \tag{32}$$

此外，因为 A 是一个特征值为零的特征向量，它可写成下列形式：

$$A=\lambda^i H_i, \tag{33}$$

为了要刻划 $c^\tau_{\rho\sigma}$，現在我們来討論这些 H 和 E 的交換子。

首先，由嘉当定理，我們有：

$$[H_i H_k]=0 \text{ 或 } c^\tau_{ik}=0. \tag{34}$$

其次，我們考慮 $[H_i E_\alpha]$，为此我們写

$$[A[H_i E_\alpha]]+[H_i[E_\alpha A]]+[E_\alpha[A H_i]]=0,$$

由(31)和(32)知，这是

$$[A[H_i E_\alpha]]=\alpha[H_i E_\alpha]. \tag{35}$$

因此，$[H_i E_\alpha]$ 是(28)式屬于 $\rho=\alpha$ 的一个特征向量，而且因为这些特征向量是不退化的，我們必須有：

$$[H_i E_\alpha]=\alpha_i E_\alpha \text{ 或 } c^\tau_{i\alpha}=\alpha_i \delta^\tau_\alpha. \tag{36}$$

从(32)、(33)和(36)得

$$\alpha=\lambda^i \alpha_i. \tag{37}$$

从現在起文字 α 或术語"根"或者用来記公式(37)或者是 l 維空間里协变分量为 α_i 的向量。

最后要找 $[E_\alpha E_\beta]$，我們求出

$$[A[E_\alpha E_\beta]]+[E_\alpha[E_\beta A]]+[E_\beta[A E_\alpha]]=0.$$

由(32)式知，这是

$$[A[E_\alpha E_\beta]]=(\alpha+\beta)[E_\alpha E_\beta]. \tag{38}$$

因此，如果 $\alpha+\beta$ 是一根，則 $[E_\alpha E_\beta]$ 属于根 $\alpha+\beta$ 的特征向量，如果 $\alpha+\beta$ 不是根，則它为零。如果 $\alpha+\beta$ 是一非零根，我們命

$$[E_\alpha E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta} \text{ 或 } c_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta}=N_{\alpha\beta}. \tag{39}$$

如果 $\beta=-\alpha$，則显然有

$$[E_\alpha E_{-\alpha}]=c_{\alpha-\alpha}^{i}H_i, \tag{40}$$

同时对于其余的 c，

$$c_{\alpha\beta}^{\tau}=0.\ (\tau\neq\alpha+\beta) \tag{41}$$

現在我們将指出，如果 α 是一根，則 $-\alpha$ 也是一根，这可以从張量 $g_{\alpha\tau}$ 的构成来了解。把限制条件(36)、(40)和(41)用到(23)上得出

$$g_{\alpha\tau}=c_{\alpha\ i}^{\alpha}c_{\tau\alpha}^{i}+\sum_{\beta\neq-\alpha}c_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta}c_{\tau\,\alpha+\beta}^{\beta}+c_{\alpha-\alpha}^{i}c_{\tau\ i}^{-\alpha}, \tag{42}$$

但是根据(36)和(41)，(42)右边每一項仅当 $\tau=-\alpha$ 时才存在，所以

$$g_{\alpha\tau}=0,\ (\tau\neq-\alpha) \tag{43}$$

因此，如果 $-\alpha$ 不是一个根，嘉当的半單純群的准則(24)便被破坏了。經过 E_α 的适当的归一化，我們可以令

$$g_{\alpha\,-\alpha}=1, \tag{44}$$

并且可以把我們的基这样地排列使張量 $g_{\rho\sigma}$ 写成下列形式：

$$g_{\rho\sigma}=\left(\begin{array}{c|cccc} g_{ik} & & & & 0 \\ \hline & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & & 0\,1 & \\ & & & 1\,0 & \\ & 0 & & & \end{array}\right) \tag{45}$$

因为 $\det(g_{\rho\sigma})$ 是初等行列式的乘积，由(24)知

$$\det(g_{ik})\neq 0, \tag{46}$$

此外

$$g_{ik}=\sum_\alpha c^\alpha_{i\alpha}c^\alpha_{k\alpha}=\sum_\alpha \alpha_i\alpha_k \tag{47}$$

应提起注意的是，仅当向量α_i可以生成整个l維空間时，由(47)定义的g_{ik}才有非零行列式。g_{ik}可以用作这空間的度量張量。

应用逆張量，現在我們可以建立下列有用的恒等式：

$$\begin{aligned}c^i_{\alpha-\alpha}&=g^{ik}c_{\alpha-\alpha k}=g^{ik}c_{k\alpha-\alpha}\,(\text{由下指标的反称性})=\\&=g^{ik}c^\alpha_{k\alpha}\,[\text{由}(44)]=\\&=g^{ik}\alpha_k\equiv\alpha^i\,[\text{由}(36)].\end{aligned} \tag{48}$$

所以(40)可以写为

$$[E_\alpha E_{-\alpha}]=\alpha^i H_i, \tag{49}$$

其中α^i是向量α的逆变分量。把(34)、(36)、(39)和(49)集合起来；我們求得交換关系的标准型如下：

$$\begin{aligned}&[H_iH_k]=0,\\&[H_iE_\alpha]=\alpha_iE_\alpha,\\&[E_\alpha E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},\quad \text{当}\ \alpha+\beta\ \text{是一非零根},\\&[E_\alpha E_{-\alpha}]=\alpha^iH_i.\end{aligned} \tag{50}$$

作为上述内容的一个例子，我們取三維轉动的算子，它們由L_1, L_2, L_3所产生，这些L滿足

$$[L_1L_2]=iL_3\ \text{等等}. \tag{51a}$$

如果我們取A等于L_3，下面两关系

$$[L_3, L_1\pm iL_2]=\pm(L_1\pm iL_2), \tag{51b}$$

指出$L_1\pm iL_2$是对应于$\rho=\pm1$的特征向量。用归一条件(44)得到：

$$H_1=L_3,\quad E_1=\frac{L_1+iL_2}{\sqrt{2}},\quad E_{-1}=\frac{L_1-iL_2}{\sqrt{2}}. \tag{51c}$$