华罗庚金杯赛专题辅导

吉林教育出版社

华罗庚金杯赛专题辅导

裘中沪　常庚哲　等编著

吉林教育出版社

华罗庚金杯赛专题辅导 裘中沪 常庚哲 等编著

责任编辑：王铁义 封面设计：张 迅

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米 32开本 7.125印张 124,000字

1988年3月第1版 1988年3月第1次印刷

发行：吉林教育出版社 印数：1—100,000册 定价：1.30元

印刷：吉林市印刷厂 ISBN 7-5383-0359-6 / G·339

努力前进

攀登科学高峰

陳省身題

一九八六年五月

前　　言

写给学生

这不是指导升学考试的书。

谁不知道升学考试是天字第一号的大事！小学、初中、高中、大学，为了每步升格，没完没了地考；做不完的习题，背不完的答案；买不完的参考材料塞满了你的小书包。你已经倒胃口了。为祖国也好，为爹妈也罢，升学考试可不是件愉快的事。面对各种各样的"升学必读"，你望而生畏了，盼望世界上再不要有什么新书才好！

然而，现在我们又拿出一本新书塞给你。

我们已经声明，这不是指导升学考试的书。写这本书是为了"华罗庚金杯"少年数学竞赛。

既然是竞赛，那就象踢足球、游泳、开摩托车，不是枯燥无味的。竞赛令人跃跃欲试，何况"竞赛"前面还冠以数学家华罗庚的名字。

我们确实想在竞赛中，发现一批"小华罗庚"。但这仅是一个想法。更重要的，是通过竞赛的训练，让更多的学生体会到：数学既有趣又有用。数学修养会在一切未来的职业中显现其重要作用。今天的数学家，许多人是当年取得竞赛奖牌的少年；而当年竞赛

榜上无名者，也有许多人成了有作为的人物。竞赛中可能成功，可能失败，成败并不是最重要的。朝夕坚持锻炼的人们不能都拿冠军，然而体魄坚强必然终生受益。

怎样读这本书？

它不同于教科书，不一定从第一页开始，直到最后。你可以从任何一节开始。遇到卡住的地方，可以暂时越过去。

读这类书，要勤于思考。多作联想和类比，要知道什么是举一反三。

不要迷信现有的解答：即或它们是对的，但可能还有更漂亮的做法。

提倡在平凡的事实中，领悟更多的道理。例如，$0+1=1+0=1$，除了加法交换律，你还能说些什么？

记住宋朝张载的一句话：

于不疑处有疑，方进矣。

写给教师

神圣的升学率竞赛压倒一切。如果还有数学竞赛的话，那是重点学校的事。有谁指望"非重点"里会有"华罗庚"！

如果仅着眼于几场竞赛的成绩，确实如此。

假若扩展视野，情况则不同了。

我们面临一场挑战！

我们曾得过几项世界第一。但，老祖宗创建的那光辉的一页，还要谈论多久？张口“造纸”，闭口“印刷术”，可是眼前这本装帧不算精美的小书，费力岂止九牛二虎！（不会被误解为对编辑出版的怨气吧。相反，我们真诚地感谢出版社的有关同志。他们为出版本书克服了许多困难，付出了辛勤劳动。）喜欢谈“世界第一”的人，本意可能是好的。据说，举办数学竞赛，中国古已有之，乃世界第一。我们没有考证。不过，即或真个第一，也未必有多大现实意义；有人说，现代科技中国落后于西方，但数学却不落后，君不见，某某某…

问题就在这里。

诚然，多有几位数学尖子极有作用。但全线战局如何估计呢？有时候，前面对手的背影清晰可见，很令人着急。但是，当前面的人跑得无影无踪时，反而心安理得，不觉落后啦。

迎接挑战，要几代人接力。从娃娃做起的说法是有远见的。要造就一大批优秀人才，启蒙教育至关重要。而启蒙教育之艰辛，唯从事者理解；教师之外，难觅知音。

建议您看看马希文等同志的“答卷”（见“我们的答卷（代序）”，《“华罗庚金杯”少年数学邀请赛》，中国数学会普及工作委员会编，测绘出版社，1987）。

我们赞同他们的看法。目前教育制度的某些方面

限制了教师们才能的发挥。不适当地强调统一，乃至发展成一套八股，十分有害。统一大纲，统编教材，统一考试，标准教案，还有典型教学模式……。过分致力于此，必导致灾难。从教育的客观规律上说，迟早得到报复。

学生数学能力的培养，方法与途径各种各样。大到安排恰当的活动，小到利用一道例题。不管怎样，过分强调某种模式的统一，那是造蛋糕，不是培养人。我们要尽少划区域，尽多留空间，让孩子们自由飞翔。

怎样用这本书？

无须多说。您就按自己的想法去做好了。本书是"拼盘"，因而从哪一部分开始可任意选取。经验表明，学生从第一页开始读的书，很少有人读到最后，这只要留心他们书页上的污痕前进到哪里便会明白。然而，如果由他们喜欢的部分开始，之后，在余下部分再挑喜欢的，如此办理，或许会读完这本书。

编写这样的书是初次尝试。中小学教师忙于教学，苦于无暇收集素材。奉献此书，一则想帮帮忙，二则也是义务感的驱动。如发现不当之处，请批评指正。

编　者

1987年12月于长春

目　　录

第 一 讲　速算与巧算
…北京数学奥林匹克学校副校长　周春荔（ 1 ）
第 二 讲　奇偶性分析…中国科技大学教授　常庚哲（13）
第 三 讲　尾数的应用
…北京数学奥林匹克学校副校长　周春荔（26）
第 四 讲　数字谜与纵横图
中国数学会普及工作委员会副主任
……………………………………袁宗沪（37）
第 五 讲　应用题图解法
中国数学会普及工作委员会副主任
……………………………………袁宗沪（54）
第 六 讲　图形的思考……吉林大学副教授　齐东旭（70）
第 七 讲　筛选与枚举
……………北京师范学院副教授　张君达（83）
第 八 讲　包含与排除
…北京数学奥林匹克学校副校长　周春荔（100）
第 九 讲　抽屉原理………吉林省教育学院　王筱棣（112）
第 十 讲　逻辑分析与推理
…北京数学奥林匹克学校副校长　周春荔（123）
第十一讲　简单数列求和…长春市实验中学　孟宪儒（135）
第十二讲　排列组合浅谈……东北师大附中　郭奕津（151）
第十三讲　统筹规划例谈
…北京数学奥林匹克学校副校长　周春荔（165）

模拟练习题　第一组
(A) 初赛模拟题 ……(183)
(B) 复赛模拟题 ……(188)
(C) 决赛模拟题 ……(194)
模拟练习题　第二组
(A) 初赛模拟题 ……(200)
(B) 复赛模拟题 ……(207)
(C) 决赛模拟题 ……(212)

第一讲　速算与巧算

数学教育界广泛流传过一个脍炙人口的故事。

德国大数学家高斯（1777—1855）读小学的时候，一天，老师为全班同学出了这样一道算式题：

$1+2+3+\cdots+99+100$ 的和是多少？

老师刚把题目说完，小高斯已经迅速、准确地说出了答案5050。这时那些按部就班一个个做加法的学生大为震惊！高斯为什么算得这样快呢？

原来小高斯是依次把这100个数头尾相加，即 $1+100$，$2+99$，$3+98$，…，$50+51$，共50对，每对都是101，总和不就是 $101\times50=5050$ 吗！

小高斯是巧妙地观察了题目的特点，利用加法运算的性质，达到了巧算的目的啊！

你想训练自己算得快、算得巧的能力吗？那你一定要善于观察所作题目的特点，要对数的性质，运算性质有很好的掌握与理解。

我们不妨在数字计算的场地里游乐一番吧！

1．观察所给数字的特点，利用凑整，拆项、平均、运算律等手段，进行速算与巧算。

例1　求和 $9+99+999+9999+99999$

解：在涉及所有数字都是9的计算中，例如999，我们常将999化成 $1000-1$ 去计算，这是小学算术中

常用的一种技巧。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (10-1)+(100-1)+(1000-1)\\
&\quad +(10000-1)+(100000-1)\\
&= 10+100+1000+10000+100000-5\\
&= 111110-5\\
&= 111105
\end{aligned}
$$

例2　$999999\times78053=?$

解：
$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= (1000000-1)\times78053\\
&= 78053000000-78053\\
&= 78052921947
\end{aligned}
$$

例3　计算 $\frac{7}{16}+\frac{5}{16}+\frac{19}{64}+\frac{3}{16}$

解： 观察特点，采用“凑1法”。

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(\frac{7}{16}+\frac{5}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}\right)\\
&\quad +\frac{19}{64}-\frac{1}{16}\\
&= 1+\frac{19-4}{64}\\
&= 1\frac{15}{64}
\end{aligned}
$$

例4　计算 3333333333^2

解：
$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 3\times1111111111\times3333333333\\
&= 1111111111\times9999999999\\
&= 1111111111\times(10000000000-1)
\end{aligned}
$$

$=1111111111000000000-1111111111$

$=1111111110888888889$

本题是设法转化成都是由数码9组成的数，变为10^n-1的形式而解决的。

例5 1966，1976，1986，1996，2006这五个数的和是多少？

解：观察知，每相邻两数后者减前者之差均等于10，可见，1986为五个数的平均数。

所求总和为$5\times1986=9930$。

例6 求和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$$

解：观察特点，分母为相邻二自然数之积，

又$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$原式=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{7\cdot8}+\frac{1}{8\cdot9}+\frac{1}{9\cdot10}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots$$

$$+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

例7 计算

$1988\times198719871987-1987\times198819881988$

解：易知$\overline{abcd}\times100010001=\overline{abcdabcdabcd}$

$$\begin{aligned}原式&=1988\times1987\times100010001-1987\\&\quad\times1988\times100010001\\&=0\end{aligned}$$

2．利用乘法公式，总结规律，进行速算与巧算。

只要用文字代替数字，就可以得到乘法一般的公式。如，常用的三个是：

〈1〉$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

〈2〉$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

〈3〉$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

速算巧算，经常是乘法公式的特殊应用。

例8 计算

$123456789^2-123456788^2$

解：应用公式〈3〉，得

$$\begin{aligned}原式&=(123456789+123456788)\times1\\&=146913577\end{aligned}$$

例9 求4001^2的值。

解：$$\begin{aligned}4001^2&=(4000+1)^2\\&=4000^2+2\times4000+1\\&=16008001\end{aligned}$$

例10 $1045\times1006=?$

解：$(10^3+a)(10^3+b)=10^3(10^3+a+b)+ab$

其中，$1045=10^3+45$，$1006=10^3+6$

$10^3(10^3+a+b)=1051000$，$ab=45\times6=270$

$\therefore\quad 1045\times1006=1051270$

速算规律是，末两位数字之和添三个0，再加上末两位数之积。

例11 $(195)^2=?$

解：末位带5的数写成$10a+5$

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$$
$$=100a(a+1)+25$$

方法是19×20再加写两个数字25，即得

38025为所求。

以上我们只是举例说明速算的一些技巧，并不是要求同学们去背某个结论，很多技巧还需要同学们去摸索创造。

3．认真观察，广泛联想，寻求答案，要记忆一些特殊的数值、数据和性质，便于速算。

例12 一个七位数与它本身相乘，其积恰为

1234567654321，求这个七位数。

解：联想乘法

$$11^2=121$$
$$111^2=12321$$

………

可以联想到$(1111111)^2=1234567654321$这样的猜测。

根据竖式运算，错位相加

$$
\begin{array}{rccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
+) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

上式恰为1111111×1111111的竖式。

所以这个七位数为1111111

例13 求 $1+3+5+7+\cdots+97+99$ 之值

解：联想到"平方数字宝塔"的游戏。

前n个奇数之和等于个数n的平方n^2

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2\\
1+3 &= 4 = 2^2\\
1+3+5 &= 9 = 3^2\\
1+3+5+7 &= 16 = 4^2\\
1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2
\end{aligned}
$$

只要我们记住了这一事实，并且可以通过下图记忆。

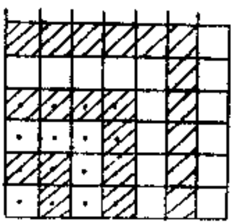

图 1.1

左下方一个格，相邻阴影拐三个格，1＋3组成边长为2的正方形。格数＝2^2

按这个规律加下去，正是平方数字宝塔的几何意义。

只要联想到头脑中已贮存的上述信息，马上会得出

$$\underbrace{1+3+5+7+\cdots+97+99}_{50个奇数}=50^2=2500$$

例14　求33334^2之值。

联想由33334的3倍与100000接近的事实，把它转化为10^n+a的形式。

解：$33334\times33334\times9$

$=100002\times100002$

$=10000400004=9\times1111155556$

$\therefore\quad 33334\times33334=1111155556$

即　$(33334)^2=1111155556$

例15　求一个二位数$\overline{ab}$使$\overline{ab}\times\overline{ab}\times\overline{ab}=314432$

解：$\overline{ab}$个位数由尾数确定，由自然数乘立方尾数规律可知，方根个位数字为8

由 314 决定$\overline{ab}$的十位数字a，由于$6^3=216<314$，$7^3=343>314$，所以$\overline{ab}$的十位数字a应为6，所以$\overline{ab}=68$

本题完全是根据运算的性质来进行速算与巧算，因此，为了进一步提高速算、巧算的能力，必须学好基础知识，基本性质，才能熟中生巧。

例16　计算$11^7=?$

解：$11^2=121$

$11^3=1331$

$11^4=14641$

………

会发现，乘幂与“杨辉三角形”有联系：