电视教学用书

高中数学精要

（下册）

湖南师范大学附中编

電子工業出版社

高中数学精要

（下册）

湖南师范大学附中　编

電子工業出版社

内 容 简 介

本教材是按照国家教委1986年重新审定的教学大纲的要求，以现行数学课本为依据编写的：本书共50讲，每讲由“要点”、“典型例题”、“习题”三大部份组成．全书重点突出，例题灵活、多样，习题精炼、全面，便于学生掌握重点，澄清疑点，提高解题技能．为进一步开拓学生思路，书中对历届高考命题进行了综合分析．为便于自学，书中解答详细，习题附有参考答案．

本书是高中、职业高中、中专和技校学生升学考试的综合复习资料，也可以作为教师和成人教学参考．

高 中 数 学 精 要

（下册）

湖南师范大学附中　编

＊

电子工业出版社出版（北京市万寿路）

电子工业出版社发行　各地新华书店经销

长沙铁道学院火车头印刷厂印刷

＊

开本：787×1092毫米　1/32　印张：8.25　字数：192.5千字

1988年8月第一版　1988年8月第一次印刷

印数：1—30000册　定价：2.50元

ISBN7-5053-0364-3/G·44

出版说明

随着社会主义建设和经济体制改革的不断深入，普及科学文化知识越来越显得十分重要。为了充分利用电视讲座这种新的教学形式，我部将开办“学生学习辅导”电视教学节目。教材将由电子工业出版社出版并公开发行。主要内容包括“数学、语文、英语、化学、物理”等系列教学节目。

此项教学节目主要帮助学生系统地复习现行课本的主要内容，以形象的教学，使学生掌握各学科的基本知识和基本技能，注重培养分析问题和解决问题的能力。最终达到开拓思路，提高运用所学知识的目的。

为使此项工作能顺利进行，我们特邀请湖南地区重点学校的有经验的老师，参与节目的制作和教材的编写。教材按照国家教委现行教学大纲的要求并依据现行教学课本进行编写。

在此，我们对一切参与此项工作的同志表示谢意。

湖南电视台电教部

1988年5月

前　　言

本讲座是为了帮助在校学生、在职职工及有志于数学学习的同志系统地复习现行中学数学课本的基本内容，以适应升学考试或工作需要。

本教材按照国家教委1986年重新审定的教学大纲的要求，以现行课本的基本内容为依据进行编写的。同时综合历届高考命题的特点，概括地提出了数学的重点、难点、主要的解题思路与方法。不仅注意例题的灵活、多样性；而且侧重解题思路的分析与解题方法的归纳。总之，着眼于逻辑思维和解题能力的培养与提高。

本教材共50讲，每讲分“要点”、“典型例题”、“习题”三大部分组成。习题并附有答案，便于学生自学。

为了编出质量高、内容好，便于自学的教材，我们组织了几位长期从事数学教学的老师，在总结多年教学经验基础上，编写了这本教材。

本教材是由数学教研组的任基德、盛平渠、席少云、黎长昭、刘巨涛、谢承铁等编写。由湖南电视台电教部羊利华、周汝善审阅。

由于编者水平有限，疏漏不当之处在所难免，敬请读者斧正。

湖南师范大学附中

1988年5月

第三十二讲　数学归纳法

要　　点

数学归纳法是论证关于自然数的命题〔记作 $P(n)$〕是否正确的一种重要方法。

1. 论证依据：

自然数的基本性质，即自然数有最小数，而无最大数；每个自然数都有一个后继数。

2. 论证步骤：

(1) 证明 $P(n_0)$（$n_0\in N$，如 $n_0=1$ 或 2 等）成立；

(2) 假设当 $n=k$（$k\geqslant n_0$，$k\in N$）时，$P(k)$ 成立，证明 $P(k+1)$ 也成立。

根据(1)和(2)，对任意自然数 n（$n\geqslant n_0$），$P(n)$ 都成立。

论证过程的结构模式是：…成立，…成立，…也成立，…都成立。

论证过程的两步缺一不可，第一步是递推的基础，第二步是递推的根据。难点在第二步，关键在于如何由 $P(k)$ 成立推证 $P(k+1)$ 也成立。第二步中，必须用上“当 $n=k$ 时结论正确”这一假设条件。否则，要么证明有错误，要么所用的方法不是数学归纳法。

典 型 例 题

例1 用数学归纳法证明

$$1-2+4-8+16-\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}\cdot\frac{2^n}{3}+\frac{1}{3}.$$

证： (1) 当$n=1$时，左边$=1$，右边$=(-1)^0\frac{2^1}{3}+\frac{1}{3}$

$=1$，等式成立；

(2) 假设$n=k$时，等式成立，即

$$1-2+4-8+16-\cdots+(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}$$

$$=(-1)^{k-1}\cdot\frac{2^k}{3}+\frac{1}{3};$$

那么，当$n=k+1$时，

$$\text{左边}=[1-2+4-8+16-\cdots+(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}]$$

$$+(-1)^k\cdot 2^k$$

$$=(-1)^{k-1}\cdot\frac{2^k}{3}+\frac{1}{3}+(-1)^k\cdot 2^k$$

$$=(-1)^k\left(2^k-\frac{2^k}{3}\right)+\frac{1}{3}$$

$$=(-1)^k\cdot\frac{3\cdot 2^k-2^k}{3}+\frac{1}{3}$$

$$=(-1)^k\frac{2^{k+1}}{3}+\frac{1}{3}$$

$$=(-1)^{(k+1)-1}\cdot\frac{2^{k+1}}{3}+\frac{1}{3},$$

所以，当$n=k+1$时，等式也成立。

由(1)、(2)知，对于一切$n\in N$，等式都成立。

注：在推证$P(k+1)$的过程中，可视$P(k)$成立为已知条件，$P(k+1)$成立则是求证目标。一般是先亮出目标〔如本题的$(-1)\cdot\frac{2^{k+1}}{3}+\frac{1}{3}$〕，以便有目的地逐步达到。

例2 用数学归纳法证明

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)。$$

证：(1) 当$n=1$时，左边$=1^4=1$，右边$=\frac{1}{30}\times1\times2\times3\times5=1$，等式成立；

(2) 假设当$n=k$时等式成立，即

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1),$$

当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}左边&=(1^4+2^4+3^4+\cdots+k^4)+(k+1)^4\\&=\frac{1}{30}k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)+(k+1)^4\\&=\frac{1}{30}(k+1)[k(2k+1)(3k^2+3k-1)+(k+1)^3\\&=\frac{1}{30}(k+1)(6k^4+39k^3+91k^2+89k+30)\\&=\frac{1}{30}(k+1)[(6k^4+12k^3)+(27k^3+54k^2)\end{aligned}$$

$$+(37k^2+74k)+(15k+30)]$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)(6k^3+27k^2+37k+15)$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)[(6k^3+9k^2)+(18k^2+27k)$$

$$+(10k+15)]$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)(2k+3)(3k^2+9k+5)$$

$$=\frac{1}{30}(k+1)(k+2)(2k+3)[3(k+1)^2+3(k+1)$$

$$-1]$$

所以，当$n=k+1$时，等式也成立。

由(1)、(2)知，对于一切$n\in N$时，等式都成立。

例3 用数学归纳法证明

① x^n-y^n(n为正偶数)能被$x+y$整除。

② $(3n+1)7^n-1$能被9整除。

① **证：**(1) 当$n=2$时（不能从1取起！），$x^n-y^n=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$能被$x+y$整除；

(2) 假设$n=2k$时($k\in N$)，$x^{2k}-y^{2k}$能被$x+y$整除。那么

$$x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}=x^2\cdot x^{2k}-y^2\cdot y^{2k}$$
$$=x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2).$$

因为$x^{2k}-y^{2k}$与x^2-y^2都能被$x+y$整除，所以$x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)$能被$x+y$整除。即当$n=k+1$时，命题也成立。

由(1)、(2)知，对一切正偶数n，命题都成立。

注：先凑“假设”中的形式$(x^{2k}-y^{2k})$，再凑成各项都含

有能被$x+y$整除因式的形式。

② **证**：(1) 当$n=1$时，$(3n+1)7^n-1=4\times7-1=27$能被 9 整除；

(2) 假设$n=k$时，$(3k+1)7^k-1$能被 9 整除，那么：

$$\begin{aligned}[3(k+1)+1]7^{k+1}-1&=[(3k+1)+3]\cdot7\cdot7^k-1\\&=7(3k+1)7^k+21\cdot7^k-1\\&=7[(3k+1)7^k-1]+21\cdot7^k+6\\&=7[(3k+1)7^k-1]+21[(3k\\&\quad+1)7^k-1]-63k\cdot7^k+27\end{aligned}$$

因为$(3k+1)7^k-1$，63，27都能被 9 整除，所以$[3(k+1)+1]7^{k+1}-1$能被 9 整除。

当$n=k+1$时，命题也成立。

由(1)、(2)知，对一切$n\in N$，命题都成立。

例4 用数学归纳法证明

$$(1+2+3+\cdots+n)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geqslant n^2$$

证：(1) 当$n=1$时，左边=右边=1，结论成立；

(2) 假设$n=k$时，结论成立。

即 $$(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\geqslant k^2$$

则 $$[(1+2+3+\cdots+k)+(k+1)]\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right]$$

$$=(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

$$+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}(1+2+3+\cdots+k)+1$$

$$>k^2+(k+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+1$$

$$=k^2+\frac{3k}{2}+\frac{3}{2}+\frac{k}{2}+1$$

$$>k^2+2k+1=(k+1)^2$$

当$n=k+1$时，结论也成立。

所以，对于一切$n\in N$，结论都成立。

注：(1) 在论证$P(k+1)$成立时本题采用了缩小的方法；(2) 本题验证"$n=2$"可以省略，因为当$n=1$时，左边＝右边保证了左边$\geqslant$右边成立。

例5 设n为自然数，对于$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，证明

$|\sin n\theta|\leqslant n\sin\theta$。

证：(1) 当$n=1$时，$|\sin\theta|=\sin\theta$，结论成立；

(2) 假设$n=k$时，结论成立，即$|\sin k\theta|\leqslant k\sin\theta$。

当$n=k+1$时，

$$|\sin(k+1)\theta|$$

$$=|\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta|$$

$$\leqslant|\sin k\theta\cos\theta|+|\cos k\theta\sin\theta|$$

$$\leqslant|\sin k\theta|+|\sin\theta|$$

$$\leqslant k\sin\theta+\sin\theta$$

$$=(k+1)\sin\theta$$

当$n=k+1$时，结论也成立。

由(1)、(2)知，对一切$n\in N$，结论都成立。

例6 用数学归纳法证明

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1).$$

证：(1) 当$n=1$，左边$=1$，右边$=2(\sqrt{2}-1)$。

$\because$ $1-2(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2>0$，

左边>右边，

$\therefore$ 不等式成立。

(2) 假设$n=k$时，不等式成立，即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-1)$$

要证$n=k+1$时不等式成立，只需证

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$>2(\sqrt{k+2}-1)\text{成立。}$$

由假设，只需证$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}>2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$，

只需证$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$，

只需证$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1}}>\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$，

上式显然成立，所以，当$n=k+1$时，不等式也成立。

由(1)、(2)知，对一切$n\in N$，不等式都成立。

注：在完成第二步时，有意识地注意到结论，运用了“执果索因”这一分析法的技巧。

例7 求证

$$\sin\alpha+2\sin2\alpha+3\sin3\alpha+\cdots+n\sin n\alpha$$

$$=\frac{(n+1)\sin n\alpha-n\sin(n+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

证：(1) 当$n=1$时，

左边$=\sin\alpha$，

$$右边=\frac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha)}=\sin\alpha,$$

左边=右边，等式成立；

(2) 假设$n=k$时，等式成立，即

$$\sin\alpha+2\sin2\alpha+3\sin3\alpha+\cdots+k\sin k\alpha$$

$$=\frac{(k+1)\sin k\alpha-k\sin(k+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

当$n=k+1$时，

$$左边=(\sin\alpha+2\sin2\alpha+3\sin3\alpha+\cdots+k\sin k\alpha)$$
$$+(k+1)\sin(k+1)\alpha$$
$$=\frac{(k+1)\sin k\alpha-k\sin(k+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$+(k+1)\sin(k+1)\alpha$$
$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\Big[(k+1)\sin k\alpha-k\sin(k+1)\alpha$$
$$+4(k+1)\sin(k+1)\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big]$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}[(k+1)\sin k\alpha-k\sin(k+1)\alpha$$

$$+2(k+1)\sin(k+1)\alpha(1-\cos\alpha)]$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\{(k+2)\sin(k+1)\alpha$$

$$-[2(k+1)\sin(k+1)\alpha\cos\alpha-(k+1)\sin k\alpha]\}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\{(k+2)\sin(k+1)\alpha-(k+1)$$

$$[\sin(k+2)\alpha+\sin k\alpha-\sin k\alpha]\}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{k}{2}}[(k+2)\sin(k+1)\alpha$$

$$-(k+1)\sin(k+2)\alpha].$$

当$n=k+1$时，等式也成立。

由(1)、(2)知，对于一切$n\in N$，等式都成立。

例8 用数学归纳法证明

凸n边形($n>3$)可以变成一个和它等积的三角形。

证： (1) 当$n=4$时，连结A_1A_3，过A_4作A_1A_3的平行线交A_2A_3的延长线于A_5，如图32-1所示，显然$\triangle A_1A_2A_5$与凸四边形$A_1A_2A_3A_4$等积，故命题成立。

(2) 假设$n=k(k\geqslant4)$时命题成立，即凸k边形可以变成一个和它等积的三角形，对于凸$k+1$边形来说，我们可以连结A_1A_k，过A_{k+1}作A_1A_k的平行线交$A_{k-1}A_k$的延长线于A_{k+2}，从

而得到一个与凸$k+1$边形$A_1A_2\cdots A_{k+1}$等积的凸k边形$A_1A_2\cdots A_{k-1}A_{k+2}$，如图32-2所示。由假设，进而可得到一个与之等积的三角形，所以当$n=k+1$时，命题也成立。

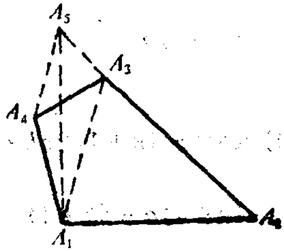

图32-1

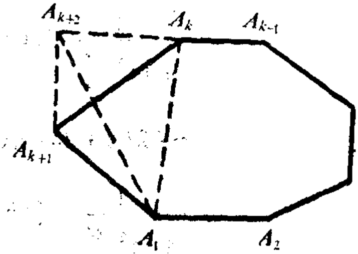

图32-2

由(1)、(2)知，对于一切大于3的自然数n，凸n边形都可以变成一个和它等积的三角形.

习 题 三 十 二

1. 用数学归纳法证明

(1) $1+3+9+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$;

(2) $\dfrac{1^2}{1\times3}+\dfrac{2^2}{3\times5}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2. 用数学归纳法证明

(1) $11^{n+2}+12^{2n+1}$能被133整除；

(2) 多项式$x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$能被多项式x^2+x+1整除.

3. 求证$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n\text{个根号}}<\sqrt{a}+1\ (a>0)$。

4. 设$f_n(x)=f\{f[\cdots f(x)]\}$，$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

用数学归纳法证明$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$。

5. 求证

$$\cos\alpha+2\cos2\alpha+3\cos3\alpha+\cdots+n\cos n\alpha$$

$$=\frac{(n+1)\cos n\alpha-n\cos(n+1)\alpha-1}{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

第三十三讲 比较大小、不等式的证明(一)

要 点

1. 由于复数不能比较大小，所以比较大小以及研究不等式的问题均在实数内进行．比较大小的方法一般有：

(1) 求差法：若$a-b>0$，则$a>b$；

若$a-b=0$，则$a=b$；

若$a-b<0$，则$a<b$．

(2) 求比法：若$b>0$，且$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$；

若$b\neq 0$，且$\frac{a}{b}=1$，则$a=b$；

若$b>0$，且$\frac{a}{b}<1$，则$a<b$．

(3) 介量词(参量法)：若$a>c$，$c>b$则$a>b$．

(4) 函数法：利用函数的增减性进行比较．

2. 要证明一个不等式都可以认为是要比较不等号两边的大小，也就都可以用"比较大小"中的方法——比较法来处理．

3. 综合法是由已知条件或已被证明的基本不等式出发，运用不等式的性质，推导出所要证明的结论．综合法是"由因