特邀江苏多名特高级教师联合打造

高考2006 基础大跨越

3+1+1

高考一轮复习过关提高用书

数学

江苏课改自主命题版

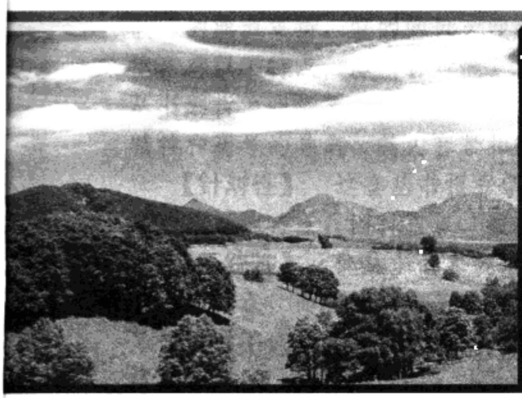
内蒙古人民出版社

特邀江苏多名特高级教师联合打造

高考2006

基础大跨越

3+1+1



高考一轮复习过关提高用书

数学

丛书主编：崔建兵

本册主编：张佳伟 李文顺

本册编委：张佳伟 李文顺 周 斌 孙 志
李德勇 钱旭琴 郑志刚 王 峰

江苏课改自主命题版

内蒙古人民出版社

丛书主编：崔建兵
责任编辑：朱莽烈
装　　帧：严　静

图书在版编目(CIP)数据

高考基础大跨越 / 崔建兵编著. 呼和浩特:内蒙古人民出版社. 2005.5

ISBN 7-204-07926-4

Ⅰ.高… Ⅱ.崔… Ⅲ.①语文课-高中-升学参考资料 ②数学课-高中-升学参考资料 ③英语课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049237 号

高考基础大跨越

崔建兵 编著

*

内蒙古人民出版社出版

(呼和浩特市新城区新华大街祥泰大厦)

江苏省南京大学印刷厂印刷

开本:850×1168 1/16　印张:37　字数:900 千字

2005 年 5 月第一版　2005 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1-10000 册

ISBN 7-204-07926-4/G·1920　定价: 120.80 元(全三册)

如发现印装质量问题,请与我社联系。联系电话: (0471)4971562 4971659

前　言

新时代，新奉献，新跨越。《高考基础大跨越》系列丛书，是由江苏各地区知名学校的特、高级教师联袂策划、精心打造的教辅精品，是奉献给2006届高中毕业生的一份厚礼。

《高考基础大跨越》丛书的编撰，得到了江苏省部分“四星级”中学的特、高级教师的鼎力支持，它的问世为我们广大考生送来了福音。此丛书与其它复习资料相比，有以下特点：即“针对性”突出、“系统性”明晰、“操作性”灵活，从而使该丛书解析简明扼要、突出重点、点拨到位，难易各有适度。充分体现新课程的理念精神和高考的导向，其内容紧扣新教材。

【针对性】 这套丛书根据新的考纲，特别是针对全国考卷及部分省市（自主命题）试卷的特点，因科布点，按考点设计复习训练，具有较强的针对性。

【系统性】 此丛书的系统性体现在两个方面。第一，将各学科的内容，化解为各个知识点，而各知识点又构成了较为系统的知识网络。第二，就一个知识点而言，又勾画出了该点的知识网络。知识网络的勾画，清晰地体现了各知识点的连贯性与层次性。

【操作性】 本套丛书依据各学科的考点（或知识点），按照知识网络——重点提示——典型例题导引——基础题练习——能力题冲刺训练的顺序编排。在各考点（或知识点）知识网络的背景下，“重点提示”重在点击此考点（或知识点）的鲜明特点及须注意的问题；“典型例题导引”精选了近几年的高考例题，精析了解题过程，交待了解题方法，揭示了解题规律；“基础题练习”注重于知识的广度，侧重于基础的夯实；“能力题冲刺训练”注重于知识的深度，侧重于能力的提升。以此编排，具有较强的实用性和操作性，充分提高分析问题和解决问题的能力。

同学们：愿我们的资料能给你带来丰硕的成果，同时以此书为引导使你踏上成功之路。

编　者

2005年6月

目 录

第一章　集合与简易逻辑

第二章　函数

第三章　数列

第四章　三角函数

第五章　平面向量

第六章　不等式

第七章　直线与圆的方程

第八章　圆锥曲线

第九章　直线、平面、简单几何体

第十章　排列、组合、二项式定理

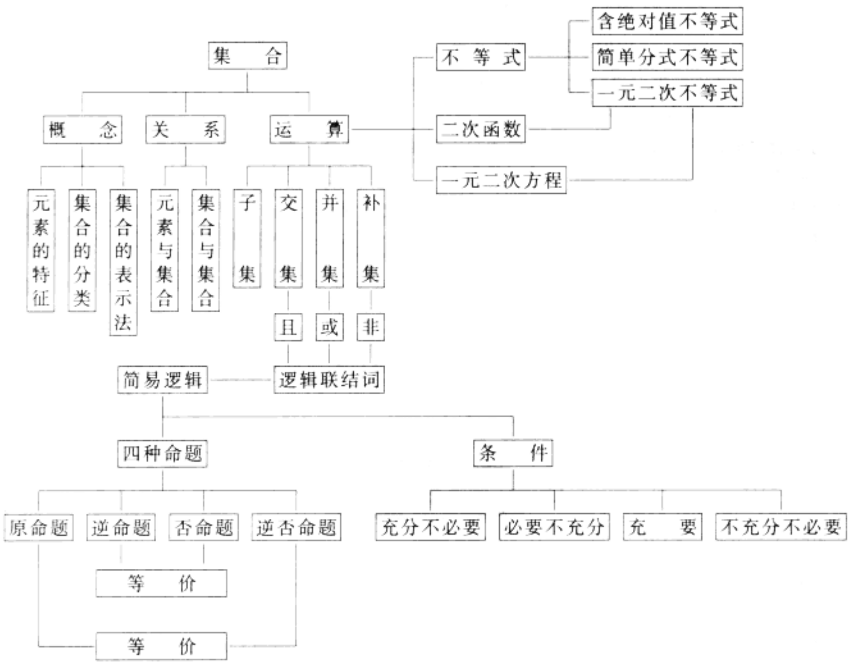
第十一章　概率与统计

第十二章　导数

第一章　集合与简易逻辑

本章知识解析

1. 知识网络



2. 高考新要求

(1) 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念,了解空集和全集的意义,了解属于、包含、相等关系的意义,掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2) 理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义,理解四种命题及其相互关系,掌握充要条件的意义.

集合论是现代数学的重要基础,数学概念与推理都离不开逻辑.

集合语言、逻辑语言的掌握体现了高中数学发展符号意识这一重要目标.符号语言能力是思维简洁、准确表述的具体体现,在高中数学各章节中都有广泛的运用.

集合思想,无疑是一种基本的数学思想.以集合论为基础,运用统一的语言,采用合理化的方法,为现代数学的结构化、形式化、统一化提供了较好的表达、组织方式.因此在复习中应强调渗透和运用集合的语言、思想和方法.

转化思想也是一种基本的数学思想,命题的转化可以是等价的,也可以是不等价的,主要依据于四种命题间的关系和充要条件的有关知识,这在后续知识的学习中会大量体现.

第一节　集合的概念与运算

基础夯实·蓄能

1. 集合中元素的三要素

(1) 确定性:对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,这是集合的最基

本特征.

(2) 互异性：集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的)，相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素.

(3) 无序性：在一个集合中，通常不考虑它的元素之间的顺序，也就是说$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$.

2. 常用的集合的表示法

常用的有列举法、描述法、区间表示法和图示法.

有限集常用列举法表示，而无限集常用描述法或区间表示.

描述法表示集合时，集合中元素的集义取决于它的"代表元"如：

$A=\{y\mid y=\sqrt{x^2-2x+3}\}$中的元素为函数$y=\sqrt{x^2-2x+3}$的函数值

$B=\{x\mid y=\sqrt{x^2-2x+3}\}$中的元素为函数$y=\sqrt{x^2-2x+3}$的自变量的取值

$C=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2-2x+3}\}$中的元素为函数$y=\sqrt{x^2-2x+3}$的图象上的点

3. 元素与集合、集合与集合之间的关系

(1) 元素与集合之间的关系是"属于"或"不属于"：一对象x是集合A的元素称x属于A，记作$x\in A$，否则称x不属于A，记作$x\in A$.

(2) 若集合A中任一元素都是集合B的元素，则称A是B的子集，记作$A\subseteq B$(或$A\subset B$)读作A包含于B，或记作$B\supseteq A$(或$B\supset A$)读作B包含A. 若A是B的子集且B中至少存在一个元素不属于A，则称A是B的真子集，记作$A\subsetneqq B$，读作A真包含于B，或记作$B\supsetneqq A$，读作B真包含A，若$A\subseteq B$且$B\supseteq A$，则$A=B$.

(3) 常用集合之间的包含关系

$O\subsetneqq N^*\subsetneqq N\subsetneqq Z\subsetneqq Q\subsetneqq R$

4. 交"$\cap$"、并"$\cup$"、补"$\complement$"是集合与集合的运算，它们的运算结果仍是集合，分别称为两个集合的交集、并集、补集. 它们的意义是：交，$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$；并，$A\cup B=\{x\mid x\in A$或$x\in B\}$；补，$\complement_{\cup}A=\{x\mid x\in\cup$，且$x\in A\}$. $\cup$为全集，全集是相对的，可以人为指定.

精要感悟·助跑

例 1 (2000·上海)集合$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=\{x,y\mid(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$其中$r>0$，若$A\cap B$中有且仅有一个元素，则$r$的值是________.

【说明】本题考查集合、两圆位置关系等基本知识及基本运算能力.

解：集合A表示以原点为圆心，2为半径的圆上的点集，集合B表示以$(3,4)$为圆心，r为半径的动圆上的点集. 依题意$A\cap B$只有一个元素，即表示两圆只有一个公共点，于是两圆应内切或外切.

(1) 若两圆外切则有$(r+2)^2=3^2+4^2$解得$r=3$或$r=-7$(舍)

(2) 若两圆内切，则有$(r-2)^2=3^2+4^2$解得$r=7$或$r=-3$(舍)

$\therefore r=3$或7

点评：本题的关键词语是$A\cap B$只有一个元素，马上想到两圆处于相切状态，进一步想，相切有内切和外切两种情形，从而进行分类讨论.

例 2 设集合$A=\{-3,a^2,1+a\}$，$B=\{a-3,a^2+1,2a-1\}$，若$A\cap B=\{-3\}$，求实数a的值

【说明】本题考查集合的基本概念和运算

解：由$A\cap B=\{-3\}$知$a^2\neq-3$，$1+a\neq-3$，而$a-3$，a^2+1，$2a-1$中恰有一个为-3，根据实数性质，只有$a-3$或$2a-1=-3$

① 若$a-3=-3$，则$a=0$，$a^2=0$，$1+a=1$

$a-3=-3$，$a^2+1=1$，$2a-1=-1$，这样$A\cap B=\{-3,1\}$与已知$A\cap B=\{-3\}$不合，故$a=0$舍去；

② 若$2a-1=-3$，$a=-1$则$a^2=1$，$1+a=0$，$a-3=-4$，$a^2+1=2$满足题设，故所求$a=-1$.

点评：上述解法先期求得的a值是$A\cap B=\{-3\}$的必要条件，但不是充分条件，为使a值满足$A\cap B=\{-3\}$，且不违反集合的特性，应进行检验. 为什么要进行检验呢?因为原题中的a是作为$A\cap B=\{-3\}$的充分条件给出来的，忽视了原条件的充分性，很容易出错.

例 3 已知全集$S=R$，$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，若$A\cap B\subseteq C$，求实数$a$的值范围.

【说明】 本题考查二次不等式的解、集合的运算和分类讨论的数学思想方法.

解：集合 A、B、C 中的元素都是用不等式来描述其性质的，A、B 中不含参数，可先行解出 $A=(-2,3)$，$B=(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

所以 $A\cap B=(2,3)$

又 C 中不等式为 $(x-3a)(x-a)<0$

要使 $A\cap B\subseteq C$，需对 C 的解集分类讨论：

(1) 若 $a>0$，则 $3a>a$，$C=(a,3a)$

结合数轴得 $\begin{cases}a\leqslant 2\\3a\geqslant 3\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant a\leqslant 2$；

(2) $a=0$ 时，$C=\varnothing$，不满足题意；

(3) $a<0$ 时，$C=(3a,a)$ 结合数轴知 $\begin{cases}3a\leqslant 2\\a\geqslant 3\end{cases}$ 无解

综上　a 的取值范围为 $[-1,2]$

点评：此例从集合关系 $A\cap B\subseteq C$ 入手进行分类讨论，在讨论过程中又借助数轴确定 a 的取值范围，可见在解题过程中，要注意集合关系，数形结合、分类讨论的综合运用.

例 4　已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，求 a 为何实数时，使 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立.

【说明】 本题考查一元二次方程的解和集合的关系及运算

解：A 中方程含有参数，先解出 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$

由条件知 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，将 3 代入方程得 $a^2-3a-10=0$ 解之 $a=5$ 或 -2

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$ 此时 $A\cap C=\{2\}$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾；

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$ 此时满足 $\varnothing\subseteq A\cap B$，且 $A\cap C=\varnothing$，故 $a=-2$.

点评：由题可知 $A=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$，$A\cap B$ 是非空集合，即 2 或 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解. 又由 $A\cap C=\varnothing$ 可知 2 和 -4 都不是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，因此 3 是该方程解，求出 a 的值后，还需代入方程求解，看是否满足前面两个条件.

能力强化·突破

练习(A 级)

1. 若集合 $S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T$ 是　(　　)

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

2. 满足 $\{a\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d\}$ 的集合 A 的个数是　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

3. (2004 年·全国文) 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,5\}$，则 $A\cap(\complement_R B)$ 等于　(　　)

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\{1,3\}$

4. (2004 年江苏高考题) 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$，$Q=\{x\mid |x|\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$ 则 $P\cap Q$ 等于　(　　)

A. $\{1,2\}$　　B. $\{3,4\}$　　C. $\{1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

5. 设集合 $A=\{x\mid x\leqslant 2\sqrt{3}\}$　$a=\sqrt{11}$，则　(　　)

A. $a\subsetneqq A$　　B. $a\notin A$　　C. $\{a\}\in A$　　D. $\{a\}\supsetneqq A$

6. 集合 $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的关系是　(　　)

A. $\{0\}=\varnothing$　　B. $\{0\}\in\varnothing$　　C. $\varnothing\in\{0\}$　　D. $\varnothing\subseteq\{0\}$

7. 已知 $A=\{$菱形$\}$，$B=\{$正方形$\}$，$C=\{$平行四边形$\}$，那么 A、B、C 的关系是________.

8. 设 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x>a\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围是________.

9. 集合 $A=\{x\mid -2<x<-1$ 或 $x>1\}$，$B=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$，若 $A\cup B=\{x\mid x>-2\}$，$A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，则 a、b 的值分别为________.

10. 设集合 $A=\{(x,y)\mid 2x+y=1\}$，$B=\{(x,y)\mid ax^2+2y^2=a\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的取值范围为________.

11. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$

(1) 若 A 只有一个元素，试求 a 的值，并求出这个元素.

(2) 若 A 是空集，求 a 的取值范围.

12. 设集合 $A=\{x \mid x^2+4x=0, x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0, x\in \mathbf{R}\}$ 若 $A\cup B=A$，求实数 a 的取值范围.

练习(B级)

1. 数集 $M=\{2n+1, n\in z\}$ 数集 $N=\{4k\pm 1, k\in z\}$ 之间的关系是 ( )
   A. $M\subsetneqq N$　　B. $M\supsetneqq N$
   C. $M=N$　　D. $M\neq N$
2. 设全集 $I=\{(x,y) \mid x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y) \mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y) \mid y\neq x+1\}$，那么 $\complement_I(M\cup N)$ 等于 ( )
   A. O　　B. $\{2,3\}$
   C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y) \mid y=x+1\}$
3. (2002 · 上海) 若全集 $I=R$，$f(x)$，$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x \mid f(x)<0\}$，$Q=\{x \mid g(x\geqslant 0)\}$，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集用 P、Q 表示为________.
4. 参加大型团体表演的学生共 240 人，他们面对教练站成一行，自左向右按 1,2,3,4,5,…… 依次报数，教练要求他们牢记各自所报的数，并做以下动作：先让报数是 3 的倍数的全体同学向后转；接着让报数是 5 的倍数的全体同学向后转；最后让报数是 7 的倍数的人体同学向后转，则此时还有________人面对教练，面对教练的同学中，自左向左第 66 个同学所报的数是________.
5. 已知集合 $A=\{x \mid x^2+(a+2)x+1=0, x\in \mathbf{R}\}$，若 $A\cap R_+=O$，求实数 a 的取值范围.
6. 若椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=a^2(a>0)$ 与连续两点 $A(1,2)$，$B(3,4)$ 的线段没有公共点，求 a 的范围.
7. 已知集合 $A=\{x, xy, lg(xy)\}$，$B=\{0, |x|, y\}$，若 $A=B$，求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots\cdots+\left(x^{2003}+\frac{1}{y^{2003}}\right)$ 的值.
8. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$，且集合 $A=\{x \mid x=f(x)\}$，$B=\{x \mid f[f(x)]=x\}$
   (1) 求证 $A\subseteq B$；(2) 如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

第二节　含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

1. 实数 a 的绝对值：

$$|a|=\begin{cases} a(a>0) \\ 0(a=0) \\ -a(a<0) \end{cases}$$

2. $a>0$ 时，$|x|>a \Leftrightarrow x^2>a^2 \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$.
   $|x|<a \Leftrightarrow x^2<a^2 \Leftrightarrow -a<x<a$
3. 当 $c>0$ 时，$|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$，
   $|ax+b|<c \Leftrightarrow -c<ax+b<c$

4. 一元二次不等式的标准形式：$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 和 $ax^2+bx+c<0(a>0)$. 在解一元二次不等式时，一般应先把不等式化为标准形式，若对应方程有实根时，计算出两实根，若 $ax^2+bx+c>0(a>0)$，则解在两根之外；若 $ax^2+bx+c<0(a>0)$，则解在两根之内.

5. 解绝对值不等式常会用"零点分段法"、"定义法"、"两边平方法"、"数形结合"思想、"等价转化"思想、"分类讨论"思想等，其目的是将绝对值不等式转化为"熟知"的不含绝对值的不等式进行求解. 即"化生为熟"、"化繁为简"，体现"化归思想"的应用.

6. 理解一元二次函数图象与一元二次方程、一元二次不等式的关系，掌握一元二次不等式的图象解法.

精要感悟·助跑

例 1 解不等式 $|x^2-3|>2x$

【说明】 本题考查含绝对值的等式的解法

解法一: (定义法) 1° 当 $x^2-3\geqslant 0$ 即 $x\geqslant\sqrt{3}$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 时,

$x^2-3>2x$ 即 $x^2-2x-3>0$ 则 $x>3$ 或 $x\leqslant-\sqrt{3}$

2° 当 $x^2-3<0$,即 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时,$-x^2+3>2x$. 即 $x^2+2x-3<0$

则 $-3<x<1$,因此 $-\sqrt{3}<x<1$

综上,原不等式的解集为 $\{x\mid x>3$ 或 $x<1\}$

解法二: (两边平方法) 1° 当 $x\geqslant 0$ 时,原不等式可化为

$(x^2-3)^2>4x^2$,即 $x^4-10x^2+9>0$.

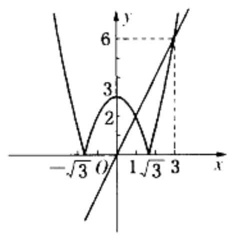
从而,得 $x>3$ 或 $x<-3$ 或 $-1<x<1$　故 $x>3$ 或 $0\leqslant x<1$;

2° 当 $x<0$ 时,$x^2-3\neq 0$,即 $x\neq\pm\sqrt{3}$,$\therefore -\sqrt{3}<x<0$ 或 $x<-\sqrt{3}$

综上,原不等式的解集为 $\{x\mid x>3$ 或 $x<1\}$

解法三: (图象法) 令 $y_1=|x^2-3|$,$y_2=2x$,分别在平面直角坐标系中画出 $y_1=|x^2-3|$ 和 $y_2=2x$ 的图象,如图,解方程 $|x^2-3|=2x$ 可得 $x_1=1$,$x_2=3$($\because x\geqslant 0$)

故满足 $y_1>y_2$ 的不等式即原不等式的解集为 $\{x\mid x>3$ 或 $x<1\}$



解法四: (利用等价转化) 原不等式可化为

$x^2-3>2x$ 或 $x^2-3<-2x$

$\therefore x>3$ 或 $x<-1$,或 $-3<x<1$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x\mid x>3$ 或 $x<1\}$

点评: 比较上述各种解法,解法一、解法二分类讨论,不重不漏,全面周到,解法三形象、直观,但总体来讲,解法四较为简捷、直接.

例 2 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$(其中 $a\in\mathbf{R}$)的解集依次记为 A 与 B,求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

【说明】 本题主要考查解绝对值不等式、二次不等式、子集等知识以及等价转换能力和对参数分类讨论能力.

解: 由 $\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$ 得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$

$\therefore A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1,x\in\mathbf{R}\}$

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$

当 $3a+1\geqslant 2$ 即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时,得 $B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1,x\in\mathbf{R}\}$

当 $3a+1<2$ 即 $a<\dfrac{1}{3}$ 时,得 $B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{R}\}$

$\therefore$ 当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$ 时,由 $A\subseteq B$,得 $\begin{cases}2\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 3a+1\end{cases}$　$\therefore 1\leqslant a\leqslant 3$

当 $a<\dfrac{1}{3}$ 时,由 $A\subseteq B$,得 $\begin{cases}3a+1\leqslant 2a\\ a^2+1\leqslant 2\end{cases}$　$\therefore a=-1$

故使 $A\subseteq B$ 的大的取值范围是 $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$

点评: 分类讨论的方法,它采用"化整为零,各个击破"的策略. 分类讨论的实质,是在分类的前提下,增加了题设的条件,从而能使问题得以解决. 分类讨论的目的是处理和化解问题解答过程中遇到的障碍,不分类讨论就难以进行下去,因此说分类讨论是解题过程的必然发展结果,决不是人为和随意的操作,同时也不要在无障碍时提前分类讨论.(能统不分)

例 3 解不等式 $56x^2-ax-a^2<0$

【说明】 本题考查应用分类讨论思想解一元二次不等式的能力

解: $\because 56x^2-ax-a^2<0\Leftrightarrow(7x-a)(8x+a)<0$

1° 当 $a>0$ 时，∵ $\frac{a}{7}>-\frac{a}{8}$

∴ 原不等式的解集为 $\{x\mid -\frac{a}{8}<x<\frac{a}{7}, a>0\}$

2° 当 $a<0$ 时，∵ $\frac{a}{7}<-\frac{a}{8}$

∴ 原不等式的解集为 $\{x\mid \frac{a}{7}<x<-\frac{a}{8}, a<0\}$

3° 当 $a=0$ 时，得 $56x^2<0$，其解集为 $\varnothing$.

点评：将此题中字母 a 的范围加以确定，则题目可以确定，就解法而言，得出解集后又可由解集逆向思维确定字母系数.

例 4 （2003·全国理）已知 $c>0$，设 p：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减，q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R. 如果 p 和 q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

【说明】 本题主要考查绝对值不等式、函数性质等知识的应用以及逻辑推理能力和分类讨论问题的能力.

解：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上恒大于 1.

∵ $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, x\geqslant 2c\\ 2c, x<2c\end{cases}$

∴ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 R 上的最小值为 $2c$.

∴ 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $R\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果 p 正确且 q 不正确，则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$.

如果 p 不正确且 q 正确，则 $c\geqslant 1$.

所以 c 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$

点评：本题的两次分类讨论建立在符合逻辑的基础上，这一点应注意掌握.

练习（A 级）

1. 不等式 $|x+2|+|x-1|<4$ 的解集为 （　　）

A. $\{x\mid -2<x<1\}$　　B. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$

C. $\left\{x\mid x<\frac{3}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\mid -\frac{5}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$

2. 设不等式 $|x-a|<b$ 的解集为 $(-1,2)$，则 a 与 b 的值为 （　　）

A. $a=1, b=3$　　B. $a=-1, b=3$

C. $a=-1, b=-3$　　D. $a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$

3. 在实数范围内，若关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 的解集是空集，那么 （　　）

A. $a<0$ 且 $b^2-4ac<0$　　B. $a<0$ 且 $b^2-4ac\leqslant 0$

C. $a>0$ 且 $b^2-4ac\leqslant 0$　　D. $a>0$ 且 $b^2-4ac>0$

4. 设 $M=\{x\mid |x|>2\}$，$P=\{x\mid x<3\}$，则下列结论正确的是 （　　）

A. $M\cup P=M$　　B. $M\cap P=\{x\mid 2<x<3\}$

C. $M\cup P=R$　　D. $M\cap P=\{x\mid x<-2\}$

5. 不等式 $\frac{x-1}{2x+1}\leqslant 1$ 的解集是 （　　）

A. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>\frac{1}{2}\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>-\frac{1}{2}\}$

C. $\{x\mid x<-\frac{1}{2}$ 或 $x\geqslant 2\}$　　D. $\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant -\frac{1}{2}\}$

6. 若 $ax^2+5x+c>0$ 的解集是 $\left\{x \mid \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$，则 a 和 c 的值为　　（　　）

A. $a=6, c=1$　　B. $a=6, c=-1$

C. $a=-6, c=1$　　D. $a=-6, c=-1$

7. 设 $A=\{x \mid |x+2|\geqslant 5\}$，$B=\{x \mid -x^2+6x-5>0\}$，则 $A\cup B=$ ______.

8. 函数 $y=\sqrt{|2x-1|-3}$ 中的自变量 x 的允许取值范围为 ______.

9. 不等式 $x^2-2|x|-3\leqslant 0$ 的解集为 ______.

10. 不等式 $(x^2-2x-2)(x^2-2x+2)<0$ 的解集为 ______.

11. 若不等式 $|x+1|-|x-2|>m$ 的解为一切实数，求实数 m 的取值范围.

12. 设 $f(x)=x^2+ax+b$，若 $f(2)=2$ 且 $f(x)\geqslant x$ 恒成立，求实数 a,b 的值.

（B 级）

1. 若关于 x 的不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集为 $\varnothing$，则 a 的取值范围是　　（　　）

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

2. 设 $\{x \mid |m-2x|>n, n>0\}=\{x \mid x<-5$ 或 $x>4\}$，则 m^2+n 的值为　　（　　）

A. -8　　B. 10　　C. 8　　D. 80

3. 若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是　　（　　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$　　C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,-2)$

4. 若关于 x 的不等式 $a^2-4+4x-x^2>0$ 成立时，不等式 $|x^2-4|<1$ 成立，则正数 a 的取值范围是______.

5. 对于定义在 R 上的函数 $f(x)$，若实数 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个不动点，若二次函数 $f(x)=x^2-ax+1$ 没有不动点，则实数 a 的取值范围是______.

6. 关于 x 的不等式 $\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$ 的解集为 $\{x \mid 4<x<b\}$，求 a,b 的值.

第三节　逻辑联结词与四种命题

1. 命题的概念

（1）命题是可以判断真假的语句，命题由题设和结论两部分构成；命题有真假之分——数学中的定义、公理、定理、公式等都是真命题.

（2）逻辑联结词有“或”、“且”、“非”，不含逻辑联结词的命题叫做简单命题，由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题，复合命题的构成形式有三种：“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”.

（3）判断复合命题真假的方式——真值表

p	真	真	假	假
q	真	假	真	假
p 且 q	真	假	假	假

p	真	真	假	假
q	真	假	真	假
p 或 q	真	真	真	假

p	真	假
非 p	假	真

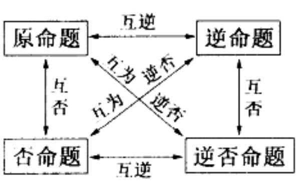
2. 命题的四种形式及相互关系

（1）命题的四种形式.

原命题：若 p 则 q　　逆命题：若 q 则 p

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$　　逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$

（2）四种命题的关系



注意：① 原命题与逆否命题，逆命题与否命题是等价关系.

② 注意区分“命题的否定”与“否命题”是两个不同概念.

命题 p 的否定为非 p，它记作 $\neg p$，一般只是否定命题 p 的结论. 否命题是对原命题“若 p 则 q”既否定它的条件，又否定它的结论.

3. 反证法

用反证法证明命题的一般步骤为：

(1) 假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立

(2) 从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾

(3) 由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

其理论依据是如果非 p 是假命题，则 p 是真命题，推出矛盾常见以下几种：

(1) 与公理、定理、定义矛盾；

(2) 与熟知的事实矛盾；

(3) 与已知矛盾；

(4) 与不同方向推出的其他结论矛盾.

以下情形适宜用反证法证明：

(1) 难以甚至无法由已知条件直接证明结论的；

(2) “至多”、“至少”型问题；

(3) 唯一性的证明；

(4) 问题的结论本身以否定形式给出的；

(5) 要证命题的逆命题是正确的.

精要感悟·助跑

例 1 分别写出下列各组命题构成的“p 或 q”、“p 且 q”、“非 p”形式的复合命题：

(1) p：$\sqrt{5}$ 是有理数，q：$\sqrt{5}$ 是无理数；

(2) p：方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号不同，

q：方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根绝对值不同.

【说明】 本题考查复合命题的有关知识.

解：(1) p 或 q：$\sqrt{5}$ 是有理数，或是无理数；

p 且 q：$\sqrt{5}$ 既是有理数，也是无理数；

非 p：$\sqrt{5}$ 不是有理数

(2) p 或 q：方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号不同或两根绝对值不同；

p 且 q：方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号不同且两根的绝对值也不同；

非 p：方程 $x^2+2x-3=0$ 的两根符号相同.

点评：解此类题一定要明确“或”、“且”、“非”的概念及命题的有关知识，方能正确解题.

例 2 下列各组命题中，满足“p 或 q”为真、“p 且 q”为假、“非 p”为真的是 （　　）

A. p：$0=\varnothing$；q：$0\in\varnothing$

B. p：在 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos 2A=\cos 2B$，则 $A=B$

q：$y=\sin x$ 在第一象限是增函数

C. p：$a+b\leqslant 2\sqrt{ab}\,(a,b\in\mathbf{R})$；

q：不等式 $|x|>x$ 的解集为 $(-\infty,0)$

D. p：圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的面积被直线 $x=1$ 平分；

q：椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的一条准线方程是 $x=4$

【说明】 本题考查真、假命题的概念

解：∵ 非 p 为真，故 p 为假，由 p 或 q 为真，故 q 为真.

∴ 满足条件的选项只有 C.

点评：应用真值表辅助求解更有效

例 3 判断下列命题的真假，并写出它逆命题、否命题、逆否命题，同时，也判断这些命题的真假.

(1) 若 $ab \leqslant 0$，则 $a \leqslant 0$ 或 $b \leqslant 0$；

(2) 若 $a > b$，则 $ac^2 > bc^2$；

(3) 若在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 $b^2 - 4ac < 0$，则该二次函数图象与 x 轴有公共点.

【说明】本题考查应用不等式、二次函数等知识判定命题真假的能力

解：(1) 该命题为真

逆命题：若 $a \leqslant 0$ 或 $b \leqslant 0$，则 $ab \leqslant 0$，为假

否命题：若 $ab > 0$，则 $a > 0$，$b > 0$，为假

逆否命题：若 $a > 0$，$b > 0$，则 $ab > 0$，为真

(2) 该命题为假

逆命题：若 $ac^2 > bc^2$，则 $a > b$，为真

否命题：若 $a \leqslant b$，则 $ac^2 \leqslant bc^2$，为真

逆否命题：若 $ac^2 \leqslant bc^2$，则 $a \leqslant b$，为假

(3) 该命题为假

逆命题：若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有公共点，则 $b^2 - 4ac < 0$，为假

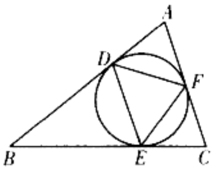
否命题：若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 $b^2 - 4ac \geqslant 0$，则该二次函数图象与 x 轴没有公共点，为假

逆否命题：若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴没有公共点则 $b^2 - 4ac \geqslant 0$，为假

点评：1. 写出一个命题的逆命题、否命题及逆否命题的关键是正确找出原命题的条件和结论，然后依照定义来写.

2. 在判断原命题及其逆命题、否命题以及逆否命题的真假时，要应用“原命题与其逆否命题同真或同假；逆命题与否命题同真或同假”来判定.

例 4 如图，已知 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切 AB、BC、CA 于 D、E、F．求证 $\triangle DEF$ 是锐角三角形.



【说明】本题考查应用反证法的能力

证明：设 $\triangle DEF$ 不是锐角三角形，不妨设 $\angle DEF \geqslant 90^\circ$，

$\because$ AB 切 $\odot O$ 于 D，$\therefore$ $\angle ADF = \angle DEF \geqslant 90^\circ$，

又 $\because$ AC、AB 都和 $\odot O$ 相切，有 $\angle AFD = \angle ADF \geqslant 90^\circ$，

$\therefore$ 在 $\triangle ADF$ 中，有 $\angle A + \angle ADF + \angle AFD > 180^\circ$

$\therefore$ 这与“三角形内角和为 180°”相矛盾

$\therefore$ 假设不成立，$\therefore$ $\angle DEF < 90^\circ$

同理可证：$\angle DFE$ 和 $\angle EDF$ 都小于 90°

因此，$\triangle DEF$ 是锐角三角形.

点评：用反证法证题过程一定要规范、完整.

能力强化·突破

练习(A 级)

1. 下列语句中不是命题的一个是 ( )

A. 雪是黑色的 B. 3 能被 2 整除 C. 火星上有生命存在 D. 这是一棵大树

2. 如果“p 或 q”与“非 p”都是真命题，那么 ( )

A. q 一定真 B. q 一定假 C. p 不一定假 D. pq 同真假

3. 下理结论正确的是 ( )

A. p 为假命题，则“p 或 q”必为假命题

B. p 为假命题，则 p 的否命题必为真命题

C. p 为真命题，则 p 的逆命题也为真命题

D. p 为假命题，则“p 且 q”必为假命题

4. 若一个命题的逆命题为真命题，那么逆命题的否命题 ( )

A. 真命题

B. 假命题

C. 不一定是真命题

D. 不一定是假命题

5. 下列命题的逆命题正确的是 ( )

A. 末位是 5 的整数，可以被 5 整除

B. 当 $x = 3$ 时，$x^2 - 2x - 3 = 0$

C. 到圆心距离不等于半径的直线不是圆的切线

D. 角平分线上的点到角的两边距离不相等

6. 命题“p:$3\in\{2,3,4\}$,q:$\{3\}\subsetneqq\{2,3,4\}$”由这组命题构成的“$p$ 或 q”、“p 且 q”、“非 p”形式的复合命题中,真假情况是 ( )

A. 真、假、真　　B. 真、真、真

C. 真、真、假　　D. 假、假、真

7. 命题“若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$,则 $ab\neq 0$”的否命题为________,命题“若 $a\neq 0$,且 $b\neq 0$,则 $a^2+b^2>0$”的逆否命题为________.

8. 命题“若 $x^2\neq 1$ 则 $x\neq 1$”的否定形式为________,否命题为________.

9. 写出命题“已知 a,b 是实数,若 $a+b$ 是无理数,则 a,b 都是无理数”的逆命题、否命题、逆否命题,并判定真假.

10. 已知 x,y,z 均为实数,且 $A=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$B=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$C=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,求证:A、B、C 中至少有一个大于 0.

练习(B 级)

1. (2004 年合肥抽样题)给出命题:p:$3\geqslant 3$,q:函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 R 上是连续函数,则在下列三个复合命题:“p 且 q”、“p 或 q”、“非 p”中,真命题的个数为 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. 命题“若$\triangle ABC$ 有一内角为$\frac{\pi}{3}$,是$\triangle ABC$ 的三内角成等差数列”的逆命题是 ( )

A. 与原命题真值相异　　B. 与原命题的否命题真值相异

C. 与原命题的逆否命题真值相同　　D. 与原命题真值相同

3. 用反证法证明命题:若整数系数一元二次方程:$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有有理数根,那么 a,b,c 中至少有一个是偶数时,下列假设中正确的是 ( )

A. 假设 a,b,c 都是偶数　　B. 假设 a,b,c 都不是偶数

C. 假设 a,b,c 至多有一个是偶数　　D. 假设 a,b,c 至多有两个是偶数

4. (2001·上海)已知 a、b 是两条不同的直线,α、β 为两个不同的平面,且 $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$,则下列命题中的假命题是 ( )

A. 若 $a/\!/b$,则 $\alpha/\!/\beta$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$,则 $a\perp b$

C. 若 a、b 相交,则 α、β 相交　　D. 若 α、β 相交,则 a、b 相交

5. (2003·全国)对于四面体 $ABCD$,给出下面四个命题,其中真命题的序号是 ( )

A. 若 $AB=AC$,$BD=CD$ 则 $BC\perp AD$

B. 若 $AB=CD$,$AC=BD$,则 $BC\perp AD$

C. 若 $AB\perp AC$,$BD\perp CD$,则 $BC\perp AD$

D. 若 $AB\perp CD$,$BD\perp AC$,则 $BC\perp AD$

6. 若 p、q 是两个简单命题,p 或 q 的否命题是真命题,则必有 ( )

A. p 真 q 真　　B. p 假 q 假

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

7. (2001·天津)在空间中

① 四点不共面,则这四点中任何三点不共线

② 若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线

以上两个命题中,逆命题为真命题的是______(把符号要求的命题序号都填上)

8. 已知命题 p:方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不等的负实根;q:方程 $4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根. 若“p 或 q”为真,“p 且 q”为假,求实数 m 的取值范围.

9. 若下列三个关于 x 的方程 $x^2-ax+4=0$,$x^2+(a-1)x+16=0$,$x^2+2ax+3a+10=0$ 中至少有一个方程有实数根,求实数 a 的取值范围.

10. 对于函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$,当 $x\in[-1,1]$ 时 $|f(x)|$ 的最大值为 M,试用反证法证明:$M\geqslant\frac{1}{2}$.

第四节　充要条件

1. 充分条件与必要条件

充分条件：如果 $p\Rightarrow q$，则 p 叫做 q 的充分条件，q 叫做 p 的必要条件，原命题成立时，命题中的条件为充分的.

必要条件：如果 $q\Rightarrow p$，则 p 叫做 q 的必要条件，q 叫做 p 的充分条件，原命题的逆命题成立时，原命题中的条件为必要的.

充要条件：如果 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，即 $p\Leftrightarrow q$，则 p 叫做 q 的充要条件，原命题及其逆命题都成立时，原命题中的条件是充要的。

既不充分又不必要条件：若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 叫做 q 的既不充分又不必要条件.

以上四种结果通常作为选择题的四个选项.

2. 利用集合间的包含关系判断命题之间的充要关系

设满足条件 p 的元素构成集合 A，满足条件 q 的元素构成集合 B.

(1) 若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 成立的充分条件

(2) 若 $A=B$，则 p 是 q 成立的充要条件

(3) $A\subsetneqq B$，则 p 是 q 成立的充分不必要条件

(4) 若 $A\nsubseteq B$，且 $B\nsubseteq A$，则 p 是 q 成立的既不充分也不必要条件.

例 1　条件 p：方程 $f(x)=x^2+(a-1)x+1=0$ 在区间 $(0,2)$ 上有两个根，条件 q：$\Delta=(a-1)^2-4\geqslant 0$，且 $f(0)>0$，$f(2)>0$，那么 p 是 q 的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【说明】本题考查充要条件的有关知识

解：∵ p 的充要条件为 $\Delta\geqslant 0$，$f(0)>0$，$f(2)>0$，

对称轴 $x=-\frac{a-1}{2}$ 有 $0<-\frac{a-1}{2}<2$　因此 $p\Rightarrow q$.

反之不成立　　∴ p 是 q 的充分不必要条件，选 A.

点评：解此类题目要紧扣定义进行判定.

例 2　已知 p 是 r 的充分条件，r 是 s 的充分条件，q 是 s 的必要条件，试判断 s 是 p 的什么条件？p 是 q 的什么条件？

【说明】考查充要条件的有关知识

解法一：作出命题之间推出关系的路径图：$p\Rightarrow r\Rightarrow s\Rightarrow q$. 知 s 是 p 的必要条件，p 是 q 的充分条件.

解法二：运用集合知识 $p\subseteq r\subseteq s\subseteq q$ 即 $p\subseteq s$，$p\subseteq q$. 因此结论同解法一.

点评：$p(x)$ 是 $q(x)$ 成立的充分条件，用集合的知识解释为 $A=\{x|p(x)\}$ 是集合 $B=\{x|q(x)\}$ 的子集合；$p(x)$ 是 $q(x)$ 成立的充要条件，用集合的知识解释为 $A=B$.

例 3　（2002·江苏）已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$

(1) 当 $b>0$ 时，若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\leqslant 1$，证明 $a\leqslant 2\sqrt{b}$.

(2) 当 $b>1$ 时，证明对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$；

(3) 当 $0<b\leqslant 1$ 时，讨论：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件.

【说明】本题考查二次函数及充要条件和综合运用不等式知识的能力.

证明：(1) 依题设，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)\leqslant 1$，说明 $f(x)$ 的最大值为 1. 而 $f(x)=-b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{a^2}{4b}$，所以 $f\left(\frac{a}{2b}\right)=\frac{a^2}{4b}\leqslant 1$.