21世纪高等院校教材

大学文科数学

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

主编　刘元骏

内蒙古大学出版社

●21 世纪高等院校教材

大学文科数学

内蒙古自治区数学教材编委会　组编

主编　刘元骏

编著　刘元骏　李志远　闫在在

陈向华　特古斯

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/刘元骏主编.

—呼和浩特:内蒙古大学出版社,2002.7

ISBN 7-81074-367-8

Ⅰ.大… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 056081 号

大 学 文 科 数 学

刘元骏　主编

内蒙古大学出版社出版发行

内蒙古自治区新华书店经销

内蒙古政府机关印刷厂印制

开本:850×1168/32　印张:11.75　字数:295 千

2002 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

印数:1—2000 册

ISBN 7-81074-367-8/O·33

定价:16.00 元

序

内蒙古自治区的高等教育事业起步于20世纪50年代初。经过近50年的发展,我区的高等教育无论从规模上,还是质量上都取得了长足的发展。特别是近些年来,全区高等院校的招生数量成倍增长,部分院校的合并使得一些高校的办学规模迅速壮大,形成了几所万人大学。与此同时,各高校对各自的专业及课程设置都做了较大的调整,以适应当今日益发展变化的高等教育事业。面向21世纪,在科学技术日新月异,社会对人才的知识结构、层次要求越来越高的新形势下,我们的高等教育的教学水平,特别是教材建设都应有一个更新更高的要求。

回顾50年来的发展,虽然我区高等教育的教学科研水平有了较大的提高,但与之相应的教材建设的现状还不尽如人意,绝大多数主干课程的教材还沿用一些传统教材,有些甚至是20世纪七八十年代的版本。有些院校的教材选用则有一定的随机性,在几种版本的教材之中换来换去。其间,虽然部分院校也组织力量编写了一些基础课及专业课教材,但大都是各成体系,缺乏院校间的协作与交流,形不成规模,质量亦无法保证,常常滞后于学科的发展与课程的变化。这都与我区高等教育的发展极不协调。诚然,区外部分地区高校的教学科研水平比我区要高,一些教材的质量好,我们可以直接利用,但这并不能成为我们不搞教材建设的理由。好的教材还需要相应的教育资源条件与之相对应才能取得良好的教学效果,从而达到促进教学质量提高之目的。应当承认,由于经济发展的相对落后,我区高校所招学生的基础和学校的教学条件比起全国重点名牌大学相对要差一些。因而,我们高校的教材也应从实际出发,结合自己学校和学生的特点,逐步探索、建立一套

适合自治区教育资源条件的教材体系，促进自治区高校教学科研水平的提高，多出人才，出好人才。

值得欣喜的是，随着自治区教育科学水平的提高，我区高校教育领域的一些有识之士逐渐认识到，面向21世纪，未来高校之间的竞争就是学校的产品——学生质量的竞争。要想培养出高水平、高素质的学生，使我区的高校在这种竞争中立于不败之地，除各高校应努力提高自身的教学组织管理水平、提高教师的素质外，还应积极主动地加强与区内外高校的协作、交流，取长补短，走联合发展的道路，使我区高等教育的整体水平能够在较短的时间内得到提高。为此，在有利于规范高校教材体系，促进高校教育质量的提高，加强各高校教学科研人员之间的协作与交流的原则下，由自治区教育厅牵头，内蒙古大学出版社组办、资助，联合全区高等院校的有关专家、学者共同组建成立一些相关专业的教材编委会，以求编写适合我区高等教育特点的教材，逐步建立、完善自治区高等教育的教学、教材体系，并开展一些与教学相关的科研工作。我们希望，通过教材编委会这种工作模式，建设一批高质量的教材，带出一支高水平的师资队伍，培养出大批高素质的人才。

我坚信，在自治区教育厅的指导下，在编委会各位专家、学者的辛勤工作下，在各院校的相互理解、相互协作、相互支持下，我们一定能够克服发展过程中的困难，逐步推出一批高质量、高水平的教材，为推进内蒙古自治区高等教育事业做出重要的贡献。

2002年3月19日

前　　言

数学对自然科学和工程技术的重要性是不言而喻的。大家都知道,对接受高等教育的理工科学生来说,数学是一门重要的基础课程,这是因为工科学生需要用数学表述工程技术的一般原理,需要用数学进行设计与计算;理科的学生需要用数学的语言描述物质运动的规律和模式,需要用数学的手段探索和揭示各种自然现象的机理。但是,社会与人文学科专业的学生为什么也要接受近代数学的教育,这是一个需要认真回答的问题。

首先应该指出,社会与人文学科远离数学的时代已经过去。当代文化发展的特征之一是数量化的研究方法越来越快地渗透到各个领域,并日益显现其强大的推动作用。不仅仅在传统的经济学领域,其他像语言文字、政治、历史、管理、军事等学科的研究领域都有深入利用数学方法和工具取得突破性研究成果的生动例证。数学思想与方法的运用正在影响并改变着社会与人文学科工作者观察世界的角度、思考问题的方法以及资料、数据的收集整理方式。随着计算机的普及与迅猛发展,可以这样说,近代数学的修养已经成为当代社会与人文学科工作者和文科专业大学生的必备素质。

在大学文科专业开设数学课程是近几年来我国高校在推进素质教育过程中为改善文科学生的知识结构、完善文科学生的思维方式所做的尝试。国内一些高等院校自 90 年代开始陆续开设了文科数学的课程并出版了一些教材,但是由于对本课程的认识不一,定位不准,这些教材在内容的选定、处理的方法以及要求的深度上均有很大的差距。内蒙古大学数学系于 1999 年制定了文科数学课程的教学大纲,2000 年秋季开始给全校文科专业开设大学数学课程。通过对这两届文科学生的教学实践,我们感到要把这门新的课程建设好,急需一本便于教师使用、便于学生阅读的好教材。于是借鉴已出版教材的经验教训,总结两年来教学过程中的得失,在教育部新世纪教学改革工程项目《大学数学分层次教学的研究与实践》的思想框架指导下编写了这本教材。

本教材的编写遵循以下几个原则:

1. 教材的内容围绕课程开设的目的——改变文科学生知识结构,完善文科学生思维方式来取舍。既要严肃认真又要深入浅出地介绍近代数学的必备基础知识,并通过对这些知识的介绍,使学生受到理性思维的熏陶。从目前国内多数文科数学的教材内容来看,这些基础知识大体围绕一元微积分、线性代数和概率统计三部分展开,有的还要增加其他一些文科学生

比较感兴趣的数学内容,这一思路和我们在1999年制定的文科数学教学大纲基本一致。

2.教材的各章内容相对独立,由教师根据课时和学生的实际状况选择讲授的内容和顺序。总篇幅大体上比一个学期周4的必修课内容稍多一些。课堂上没有讲到的内容可以在选修课上介绍,不开选修课时,可供学生课外阅读。

3.文科学生学习数学的目的不在于对数学方法和数学技术的掌握与应用,而是对数学文化与思维方式的了解与认可,特别是贯穿于整个数学学科的无与伦比的理性精神的鉴赏。基于这种认识,一些重要的基本概念和背景应该认真介绍,尽量"原滋原味",而技术性、方法性的训练则应适可而止。

4.教材中简要地介绍了一些数学史的资料,以便让文科学生了解重要数学概念产生和演进的历史。这些内容的介绍放在各章的最后一节,尽量使学生在阅读这些历史资料时具有一定的数学基础。

5.我国已故数学家华罗庚教授曾感慨地说:"大哉数学之为用"。学完数学课程的人应该对数学的应用有一些类似的感受:数学确实有用! 本教材各章节的内容都展示了一些数学模型的实例,选编这些实例的目的仍然在于了解与鉴赏,并不要求文科学生具有解决实际问题的应用能力。

6.文科与理工科学生的数学基础有一定的差距,这一差距会随着中学教学改革的前进而逐渐减小,要改变低估文科学生数学接受能力的思维定势。应该看到,经过高考选拔的文科学生都具有一定的数学水平,本教材不打算再从中学文科数学教学的水平上退下来,迁就文科学生中不愿学习数学的一部分学生的不良情绪。

本书由内蒙古自治区数学教材编委会组编,第一章由内蒙古大学刘元骏执笔,第二章由包头师范学院陈向华执笔,第三章由内蒙古工业大学阎在在执笔,第四章由内蒙古师范大学李志远执笔,本书中关于数学史料的内容由内蒙古师范大学特古斯执笔并分别置于第一、二、三章的最后一节,习题答案分别由各章作者执笔。全书由刘元骏统稿,其中第三章和有关数学史料的内容由内蒙古大学杜清晏审读。鉴于本书编写时间仓促,错误定会不少,敬请使用本书的教师和读者批评指正。

刘元骏　于内蒙古大学

2002年7月3日

目　录

第一章　一元微积分 ………… 1
1.1　函数 ………… 1
1.1.1　实数集 ………… 1
1.1.2　函数 ………… 6
1.1.3　函数的一般性态 ………… 9
1.1.4　复合函数 ………… 11
1.1.5　反函数 ………… 12
1.1.6　初等函数 ………… 14
习题 1.1 ………… 14
1.2　极限 ………… 16
1.2.1　数列极限 ………… 16
1.2.2　函数极限 ………… 18
1.2.3　无穷大量与无穷小量 ………… 22
1.2.4　极限的性质 ………… 25
1.2.5　连续的概念与性质 ………… 30
习题 1.2 ………… 36
1.3　导数与微分 ………… 38
1.3.1　导数概念的背景与定义 ………… 38
1.3.2　求导法则与公式 ………… 43
1.3.3　导数概念在经济学上的应用 ………… 48
1.3.4　高阶导数 ………… 50
1.3.5　微分 ………… 52
习题 1.3 ………… 55
1.4　导数的应用 ………… 57
1.4.1　中值定理 ………… 57
1.4.2　函数的单调性 ………… 60

1.4.3 函数的极值 …… 61
1.4.4 极值的简单应用 …… 65
习题 1.4 …… 69
1.5 不定积分 …… 70
1.5.1 原函数与不定积分的概念 …… 70
1.5.2 不定积分的性质 …… 72
1.5.3 换元法与分部积分法 …… 75
习题 1.5 …… 79
1.6 定积分 …… 80
1.6.1 定积分的概念与性质 …… 80
1.6.2 微积分基本定理 …… 85
1.6.3 定积分的应用 …… 92
1.6.4 广义积分 …… 98
习题 1.6 …… 102
1.7 微积分发展演进简史 …… 103
1.7.1 有关的概念 …… 104
1.7.2 概念的演化 …… 110
1.7.3 严格的表达 …… 118

第二章 线性代数介绍 …… 126
2.1 行列式 …… 126
2.1.1 二元一次方程组与二阶行列式 …… 126
2.1.2 三元一次方程组与三阶行列式 …… 129
2.1.3 n 阶行列式 …… 133
2.1.4 行列式的性质 …… 136
2.1.5 行列式的计算 …… 139
2.1.6 克莱姆法则 …… 142
习题 2.1 …… 147
2.2 矩阵 …… 149
2.2.1 矩阵的概念 …… 149

2.2.2 矩阵的运算 …… 152
2.2.3 逆矩阵 …… 158
2.2.4 矩阵的初等变换与秩 …… 162
习题 2.2 …… 170
2.3 线性方程组 …… 172
2.3.1 消元法 …… 172
2.3.2 应用举例 …… 182
习题 2.3 …… 185
2.4 线性代数发展简史 …… 186
2.4.1 中算家的线性方程组 …… 186
2.4.2 关孝和的行列式 …… 192
2.4.3 西方的行列式和矩阵 …… 195

第三章 概率论与数理统计基础 …… 201
3.1 随机事件与概率 …… 201
3.1.1 随机事件 …… 201
3.1.2 概率 …… 206
3.1.3 等可能概率模型(古典概型) …… 209
3.1.4 条件概率和全概率公式 …… 213
3.1.5 事件的独立性与贝努利概型 …… 218
习题 3.1 …… 221
3.2 随机变量及概率分布 …… 224
3.2.1 离散型随机变量 …… 225
3.2.2 连续型随机变量 …… 227
3.2.3 正态分布 …… 232
习题 3.2 …… 236
3.3 随机变量的数字特征 …… 237
3.3.1 随机变量的数学期望 …… 238
3.3.2 随机变量的方差 …… 241
习题 3.3 …… 243

3.4 数理统计基础 …… 244
3.4.1 样本及抽样分布 …… 244
3.4.2 参数估计 …… 250
3.4.3 假设检验 …… 260
习题 3.4 …… 267
3.5 概率论与数理统计发展简史 …… 270
3.5.1 古典概率论史梗概 …… 270
3.5.2 近代概率论史撮要 …… 276

第四章 几何学概览 …… 282
4.1 第五公设问题与非欧几何 …… 282
4.1.1 几何学起源 …… 282
4.1.2 欧几里得《几何原本》 …… 283
4.1.3 第五公设问题 …… 285
4.1.4 非欧几何 …… 285
4.1.5 希尔伯特公理体系及其影响 …… 291
4.2 空间解析几何 …… 295
4.2.1 空间直角坐标系 …… 297
4.2.2 向量代数 …… 300
4.2.3 平面与直线 …… 317
4.2.4 常见的曲面与空间曲线 …… 328
习题 4.2 …… 343
附表 1 标准正态分布表 …… 348
附表 2 泊松分布表 …… 349
附表 3 t 分布表 …… 351
习题答案与提示 …… 352
参考文献 …… 366

第一章　一元微积分

1.1 函　数

1.1.1 实数集

1. 集合

中学里介绍过的“集合”是近代数学里最基本的概念之一．集合论的创始人、法国数学家康托尔(Cantor. G. F. L)把我们“感觉和思维所确定的不同对象汇合成一个总体”,称之为**集合**．这就是说,集合是一些能够被确认的对象的全体．这些对象本身是什么并不重要,但要指明它的特征,以便能确认是属于这个集合,还是不属于这个集合．组成集合的对象称为元素,一般用小写字母 a, b, c, …表示,由元素构成的集合则用大写字母 A, B, C, …表示．

元素 a 属于集合 A 时,记作 $a \in A$．元素 a 不属于集合 A 时,记作 $a \notin A$．

可以用列举集合内元素的方法表示一个集合,如,由不超过 20 的正偶数组成的集合 A 可以写成 $A = \{2,4,6,\cdots,20\}$．

还可以用描述集合的元素特征的方法表示一个集合,如,具有特征 p 的元素 x 组成的集合 B 可以写成 $B = \{x \mid x \text{ 具有 } p\}$．按这种表示法,上述集合 A 还可以写成 $A = \{x \mid x = 2n, n = 1,2,3,\cdots,10\}$．

不包含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$．

若集合 A 的所有元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的**子集**,记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$,读作“A 包含于 B”或“B 包

含 A". 当 $A \subseteq B$ 且集合 B 中含有不属于 A 的元素时,称 A 是 B 的**真子集**,并记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 时,集合 A 和集合 B 的元素完全相同,称集合 A 和集合 B **相等**,记作 $A = B$.

集合之间可以建立以下三种运算 .

集合 A 与集合 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**并集**,记作 $A \cup B$. 显然

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合 A 与集合 B 的公共元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**交集**,记作 $A \cap B$. 显然

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合 A 内不属于集合 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**差集**,记作 $A \setminus B$. 显然,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$

取并集、交集和差集的运算分别称作集合的**加法**运算、**乘法**运算和**减法**运算 .

如果将所研究对象的全体元素构成的集合记作 Ω,称之为**全集**的话,则称 $\Omega \setminus A$ 为集合 A 的**余集**,并记作 $\bar{A} = \Omega \setminus A$,显然,

$$\bar{\Omega} = \varnothing, \overline{\varnothing} = \Omega, A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \varnothing, (\bar{\bar{A}}) = A.$$

集合的运算可借助于直观的**文氏图**(Venn,J. 英国数学家)予以说明 . 在文氏图上,集合中的元素以平面的点表示,集合则用平面上闭曲线所围的平面点集来表示,参见图 1.1.

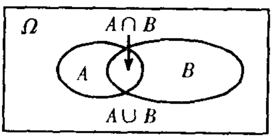

图 1.1

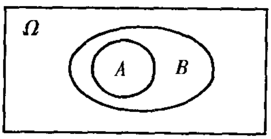

图 1.2

从文氏图 1.2 可以直观确认集合运算的下列吸收律:

$$\text{若 } A \subset B, \text{则 } A \cup B = B, A \cap B = A$$

不难看出，在代数运算中没有类似的结论．代数运算中的加法结合律、交换律以及乘法的结合律、交换律在集合运算中同样成立．

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

关于**分配律**，集合运算中除了乘法对加法的分配律之外，还有加法对乘法的分配律，这是集合运算与代数运算不相同的地方．

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

除此以外，集合运算还满足所谓的**对偶律**，又称为**德摩根**(de Morgan)**律**．

$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad (\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

以上算律均可以从集合运算的定义出发直接证明，也可从相应的文氏图中得到印证．这些算律在集合运算和逻辑推理中起着非常重要的作用．

2．**实数**

人类对数的认识经历了一个漫长的过程，而自然数则是人类最早形成的数概念，对自然数亦即正整数，我们现在有了哪些认识呢？

首先，自然数集合 $N = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ 包含着无限多个元素，例如，5 的后面有 $5+1=6$，6 的后面有 $6+1=7$，…，继续下去，永无尽头．但是，自然数集却有一个最小的“开头数 1”，有了开头数，每一个自然数后面又有一个“后继者”，这就保证了自然数的无限性．

自然数集 N 里可定义“加法”：$\forall a, b \in N$，一定存在称作 a 与 b“和”的自然数 c，记作 $c = a + b$．这种求“和”的加法运算满足加法的结合律和交换律．

自然数集 N 里可定义“乘法”：$\forall a,b \in N$，一定存在称作 a 与 b “积”的自然数 c，记作 $c = ab$. 这种求“积”的乘法运算满足乘法的结合律、交换律以及乘法对加法的分配律，而且自然数 1 与任何自然数相乘仍然等于这个自然数．

自然数集 N 里的元素可以排“序”，也就是说，$\forall a,b \in N$，a,b 之间恰有下列顺序关系之一成立：

$$a < b,\quad a = b,\quad b < a$$

这里的顺序关系“<”还满足以下“传递性”，即对 $\forall a,b,c \in N$，如果 $a < b$ 且 $b < c$，则必有 $a < c$．

以上列举的自然数性质早已为中学生所熟知，但是，正是这些内容解释了自然数最本质的特征．意大利数学家皮亚诺(G,Peano)从这些最本质的特征出发建立了自然数的公理系统，再从这些公理出发就可以严格论证自然数的其他性质与算律了．

在自然数集合里实施加法和乘法的结果仍然是一个自然数，我们对此称之为自然数对加法和乘法运算**封闭**．不过自然数集合对减法运算就不再是封闭的了，两个自然数的差可能是一个负整数．为了保持对减法运算的封闭性，只有把自然数集扩充为整数集 Z．

$$Z = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

可是，整数集 Z 对除法运算又不再是封闭的了，两个整数之商可能不再是一个整数．为了保持对四则运算的封闭性，进一步把整数集 Z 扩充成有理数集 Q.

$$Q = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$$

这样一来，在有理数集 Q 中既能保证对四则运算的封闭，还继承了自然数集 N、整数集 Z 中有关运算的算律和性质，同时在有理数集 Q 中还增添了另一重要性质——**稠密性**．所谓有理数的“稠密性”系指在任意两个有理数之间一定还存在着无穷多个有理数

显然,自然数和整数都不具备这种稠密性．有理数集的稠密性使它可以在任何精度上表示一个实际的量并进行有效的计算,因而成为一种方便的计算工具和表述手段．

有理数的稠密性给人们带来一种错觉,以为有理数会与数轴上的所有点相对应,从小到大,连续变化．现在的中学生都知道,直线上除了有理点之外,还有“很多”无理点．可是,当人们还没有建立无理数概念的时候,根深蒂固的观念是“自然数与他们的比在支配着世界”.

公元前 500 年左右,希腊人发现正方形的对角线与其边长不可公度,换句话也就是

“$\sqrt{2}$ 不是有理数!”

我们先来复述一遍中学里曾经给出的证明,假定$\sqrt{2}$是有理数,则存在互质的自然数 m,n ,使得

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad 2n^2 = m^2$$

可见 m^2 是偶数,由于任何奇数的平方和仍为奇数,故 m 必为偶数,记为 $m = 2k$,这样

$$2n^2 = 4k^2, \quad n^2 = 2k^2$$

于是 n 也成为偶数,这说明 m,n 都是偶数,不再互质,矛盾．

我们知道,由勾股定理可以证明边长为 1 的正方形对角线为$\sqrt{2}$. 那么,以数轴上的原点为圆心,$\sqrt{2}$为半径画弧,一定和数轴的正半轴相交于一点 A ,点 A 的坐标($\sqrt{2}$)一定不是有理数了! 这个看来很简单的例子,说明了一个非常重要的问题:直线上的有理点再“稠密”也会存在类似于$\sqrt{2}$的非有理点．也就是说,有理点并不能布满整个直线,而是留有“空隙”! 这种“空隙”就是我们要重新定义的**无理数**．只有作为有理数与无理数并集的**实数集**,才能具有像直线一样的连续性．

有理数的不连续性和直线上点的连续性产生了强烈的冲突，长期以来一直困惑着数学家和哲学家们，形成所谓的“无理数危机”. 直到十九世纪，由于微积分学的长足发展，作为微积分基石的实数理论不得不进行重新审视和建构的时候，问题才得到解决 .严密的实数构造理论已成为经典数学的一个丰碑，凡是要了解近代数学的人，都不能回避这一问题 . 鉴于本课程的性质，我们不去作进一步的深入讨论 .

3. **区间**

集合 $\{x | a \leqslant x \leqslant b, x \in R\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b, x \in R\}$$

类似地，开区间 (a,b) 定义为

$$(a,b) = \{x | a < x < b, x \in R\}$$

半开半闭的区间 $(a,b]$ 与 $[a,b)$ 分别定义为

$$(a,b] = \{x | a < x \leqslant b, x \in R\}$$

$$[a,b) = \{x | a \leqslant x < b, x \in R\}$$

实数集 R 还可表示为无限区间的形式：$R = (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$，其中符号 $-\infty$，$+\infty$ 分别读作负无穷大，正无穷大 . 常用的无限区间还有以下四类：

$$(-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (a, +\infty), \quad [a, +\infty]$$

分别代表哪些实数集，请自行补充 .

设 $a, \delta \in R, \delta > 0$ 以 a 为中点，长为 2δ 的开区间 $\{x | |x-a| < \delta, x \in R\}$，称之为 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$. 实数集 $\{x | 0 < |x-a| < \delta, x \in R\}$ 成为 a 的 δ **空心邻域**，记作 $U^0(a,\delta)$. 实际上，

$$U^0(a,\delta) = U(a,\delta) \setminus \{a\}$$

1.1.2 函数

映射与函数的概念，中学里已经有过介绍 . 映射是两个集合