

高等数学

下册

GAODENG SHUXUE

李德新 张朝阳 编

GAODENG SHUXUE

厦门大学出版社

高等数学

下册

GAODENG SHUXUE

李德新 张朝阳 编

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/李德新, 张朝阳编. —厦门: 厦门大学出版社,
2003. 8

ISBN 7-5615-2807-5

I. 高… II. ①李…②张… III. 高等数学-高等学校-教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059551 号

厦门大学出版社出版发行

(地址: 厦门大学 邮编: 361005)

<http://www.xmupress.com>

[xmup @ public. xm. fj. cn](mailto:xmup@public.xm.fj.cn)

三明地质印刷厂印刷

2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 8.75 插页: 2

字数: 218 千字 印数: 1—7 200 册

定价: 16.00 元

本书如有印装质量问题请寄承印厂调换

前 言

由于现代科学技术特别是电子计算机技术的迅猛发展,数学在各个领域中的应用日趋普遍.数学成了学习每门现代科学技术都必须掌握的通用语言,而以数学思维为代表的清晰周密的思辩推断的能力,更是做好任何工作都必不可缺的基本素质.

为了适应高等教育、高等院校向综合性或多科性发展的时代要求,我们根据高等数学课程自身的特点,结合同仁们多年教学实践和长期交流合作的基础上编写了这套《高等数学》(上、下册)教材.

在确保农、林、医、经、管、文、工等专业数学课程教学基本要求的前提下,本书对高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的阐述力求严谨简明,详略适当,同时突出了微积分基本思想在农、经、工以及生命科学中的应用,可作为非数学专业本科生的公用教材,也可供科技人员参考.

本书共 12 章,分上、下两册,上册 7 章,下册 5 章.每节后附有习题,每章后另附有总习题.总习题分 A、B 两组,A 组是客观题,是基本题,含填空题和选择题等;B 组是主观题,是提高题,含计算、证明、应用题.习题量丰富,题型覆盖面广,有利于各种门类不同教学要求的筛选使用.

本书由张朝阳、李德新编写.张朝阳负责第二、三、四、五、六、七、十二章的编写和上册的统稿.李德新负责第一、八、九、十、十一章的编写和下册的统稿.

陈同英教授,林文浩、姜永、温永仙副教授为本书编写付梓提供了许多宝贵意见和建议,在此谨表诚挚的谢意.

编者才学疏浅,书中不足之处在所难免. 敬请使用本书的教师和读者们不吝评正.

编 者

2003 年 6 月

目 录

前 言

第八章 空间解析几何与向量代数	(1)
§ 8.1 空间直角坐标系	(1)
一、空间点的直角坐标	(1)
二、空间两点间的距离	(3)
习题 8.1	(4)
§ 8.2 曲面及其方程	(5)
一、曲面方程的概念	(5)
二、空间中的平面及其方程	(5)
三、球面	(7)
四、柱面	(8)
五、旋转曲面	(10)
六、二次曲面	(11)
习题 8.2	(13)
§ 8.3 空间曲线及其方程	(16)
一、空间曲线的一般方程	(16)
二、空间曲线在坐标面上的投影	(16)
习题 8.3	(17)
§ 8.4 向量及其线性运算	(19)
一、向量的概念	(19)
二、向量的加减法	(20)
三、向量与数的乘法	(21)

习题 8.4	(23)
§ 8.5 向量的坐标	(24)
一、向量的分解与向量的坐标	(24)
二、向量线性运算的坐标表示法	(25)
三、向量的模与方向余弦	(26)
四、向量在数轴上的投影	(28)
习题 8.5	(29)
§ 8.6 数量积 向量积 混合积	(30)
一、两向量的数量积	(30)
二、两向量的向量积	(33)
三、向量的混合积	(37)
习题 8.6	(38)
§ 8.7 平面及其方程	(40)
一、平面的点法式方程	(40)
二、平面的一般方程	(41)
三、两平面的夹角	(43)
四、点到平面的距离	(44)
习题 8.7	(45)
§ 8.8 空间直线及其方程	(46)
一、空间直线的点向式方程与参数方程	(46)
二、空间直线的一般方程	(47)
三、两直线的夹角	(48)
四、直线与平面的夹角	(49)
五、有关空间直线与平面的杂例	(49)
习题 8.8	(52)
总习题八	(53)
第九章 多元函数的微分学	(56)
§ 9.1 多元函数	(56)
一、区域	(56)

二、多元函数的概念	(59)
三、二元函数的极限	(62)
四、二元函数的连续性	(64)
习题 9.1	(65)
§ 9.2 偏导数	(67)
习题 9.2	(71)
§ 9.3 高阶偏导数	(72)
习题 9.3	(74)
§ 9.4 全微分	(75)
习题 9.4	(79)
§ 9.5 复合函数与隐函数的求导法	(80)
一、多元复合函数的求导法	(80)
二、隐函数的求导法	(87)
习题 9.5	(90)
§ 9.6 多元函数的极值	(93)
一、极值的概念及求法	(93)
二、最大值与最小值应用问题	(95)
三、条件极值,拉格朗日乘数法	(97)
习题 9.6	(101)
总习题九	(103)
第十章 重积分	(107)
§ 10.1 二重积分的概念和性质	(107)
一、二重积分的概念	(107)
二、二重积分的性质	(110)
习题 10.1	(111)
§ 10.2 二重积分的计算	(113)
一、利用直角坐标计算二重积分	(113)
二、利用极坐标计算二重积分	(121)
习题 10.2	(126)

§ 10.3 二重积分的应用	(129)
一、曲面的面积	(129)
二、平面薄片的质心	(132)
三、平面薄片的转动惯量	(134)
习题 10.3	(135)
§ 10.4 三重积分	(136)
一、三重积分的概念	(136)
二、三重积分的计算	(137)
三、三重积分的应用	(143)
习题 10.4	(144)
§ 10.5 积分的统一描述	(146)
一、积分的概念	(146)
二、积分的性质	(148)
习题 10.5	(149)
总习题十	(150)
第十一章 无穷级数	(152)
§ 11.1 常数项级数的概念与性质	(152)
一、常数项级数的概念	(152)
二、级数收敛的必要条件	(155)
三、级数的性质	(156)
习题 11.1	(157)
§ 11.2 数项级数的审敛法	(159)
一、正项级数及其审敛法	(159)
二、交错级数及其审敛法	(165)
三、绝对收敛与条件收敛	(167)
习题 11.2	(169)
§ 11.3 幂级数	(171)
一、函数项级数的一般概念	(171)
二、幂级数及其收敛性	(172)

三、幂级数的运算及其性质	(175)
习题 11.3	(178)
§ 11.4 函数展开成幂级数	(179)
一、函数展开成幂级数的条件	(179)
二、函数展开成幂级数的方法	(183)
习题 11.4	(185)
§ 11.5 幂级数的应用	(187)
一、函数值的近似计算	(187)
二、求定积分的近似值	(188)
三、欧拉公式	(189)
习题 11.5	(191)
§ 11.6 傅立叶级数	(192)
一、三角函数系的正交性	(193)
二、周期为 2π 的周期函数的傅立叶级数	(193)
三、一般周期函数的傅立叶级数	(199)
习题 11.6	(201)
总习题十一	(202)
第十二章 微积分在经济学上的应用	(205)
§ 12.1 经济学中常用的若干函数	(205)
一、需求函数	(205)
二、供给函数	(206)
三、总成本函数	(206)
四、总收益函数	(207)
五、总利润函数	(208)
六、生产函数	(208)
习题 12.1	(209)
§ 12.2 极限与连续 复利和贴现	(211)
一、连续复利	(211)
二、贴现问题	(212)

习题 12.2	(213)
§ 12.3 导数在经济分析中的应用	(214)
一、边际函数	(214)
二、函数的弹性	(218)
习题 12.3	(222)
§ 12.4 函数最值理论在经济管理中的应用	(224)
一、单变量的优化决策	(224)
二、多变量的优化决策	(230)
习题 12.4	(234)
§ 12.5 定积分在经济学中的应用	(237)
一、由边际函数求总函数	(237)
二、资本的现值与投资问题	(239)
习题 12.5	(241)
§ 12.6 微分方程在经济管理中的应用	(242)
习题 12.6	(245)
总习题十二	(247)
习题答案	(250)
参考书目	(267)

第八章 空间解析几何与向量代数

空间解析几何与平面解析几何相类似,也是用代数方法来研究空间几何图形.它是学习多元函数微积分的必要基础.

§ 8.1 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

在空间任取一点 O ,过点 O 引三条互相垂直的数轴,它们都以 O 为原点,而且一般都具有相同的长度单位.这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称坐标轴.它们的正方向按“右手规则”确定:即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正方向以 $\pi/2$ 角度转向 y 轴正方向时,大拇指的指向就是 z 轴的正方向.这样确定的三条数轴就构成了一个空间直角坐标系,点 O 称为坐标原点(图 8-1).

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面,另外还有 yOz 面和 zOx 面.三个坐标面把空间分为八个部分,每个部分叫做一个卦限,共八个卦限,其顺序是这样规定的,在 xOy 坐标上方,从 x, y, z 三个坐标轴为正的那个卦限开始,按逆时针方向,依次是第 I、II、III、IV 卦限,在 xOy 坐标面下方与上面的四个卦限依次对应的是第 V、VI、VII、VIII 卦限(图 8-2).

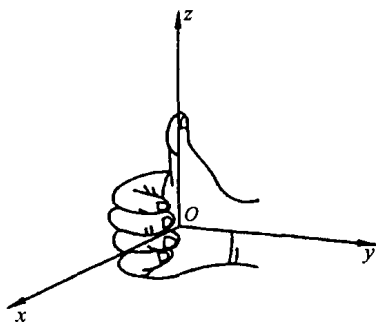


图 8-1

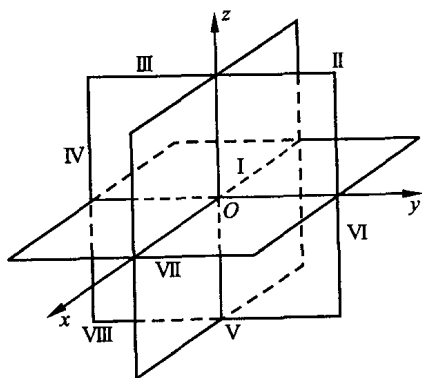


图 8-2

取定了空间直角坐标系后,就可以建立起空间点与三元有序数组之间的对应关系. 设 M 为空间一点,过 M 作三个平面分别垂直于三条坐标轴,它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 P, Q, R 三点,这三点在坐标轴上的坐标分别为 x, y, z . 这样空间的点 M 就惟一地确定了一有序数组 (x, y, z) . 反之,对惟一的有序数组 (x, y, z) ,也可以在 x, y, z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R ,过 P, Q, R 三点分别作 x, y, z 轴的垂直平面,这三个平面相交于点 M ,于是任给一个有序数组 (x, y, z) 也惟一地确定了空间的点 M ,这样就建立空间点 M 与三元有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系,

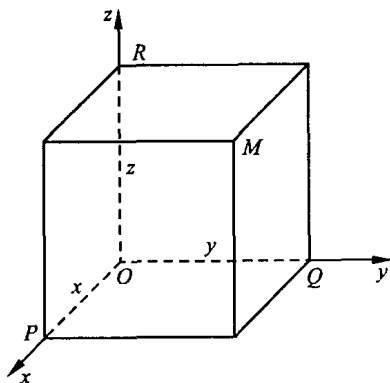


图 8-3

这个有序数组 (x, y, z) 称为点 M 的坐标,记为 $M(x, y, z)$,并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标,纵坐标,竖坐标(图 8-3).

显然,原点的坐标为 $(0,0,0)$,在 x,y,z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0), (0,y,0), (0,0,z)$,在 xOy, yOz, zOx 坐标面上的点的坐标分别为 $(x,y,0), (0,y,z), (x,0,z)$.

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间的两点,过 M_1, M_2 各做三个平面分别垂直于三个坐标轴,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-4).

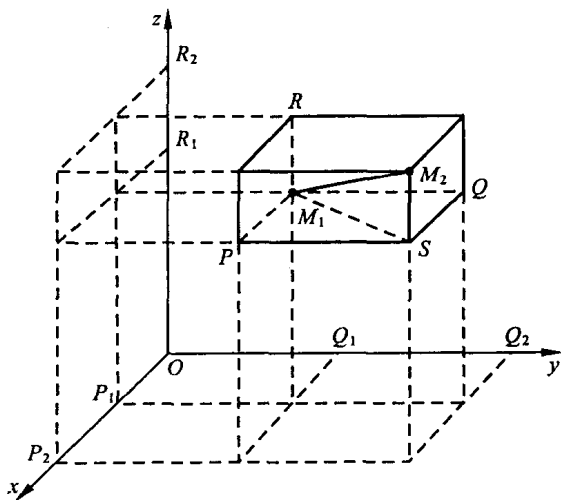


图 8-4

从图 8-4 可以看出:

$$|M_1M_2|^2 = |M_1S|^2 + |SM_2|^2,$$

而

$$|M_1S|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2,$$

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|SM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

另外, 利用图 8-4 还可获得线段 M_1M_2 的中点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的坐标为

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

例 1 求在 y 轴上的与两点 $A(1, -2, 3), B(3, 4, -1)$ 等距离的点.

解 因为所求的点在 y 轴上, 所以设该点为 $M(0, y, 0)$, 由题意有

$$|MA| = |MB|$$

即

$$\sqrt{(1-0)^2 + (-2-y)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-y)^2 + (-1-0)^2}$$

两边同平方, 解得 $y=1$, 故所求点 M 的坐标为 $(0, 1, 0)$.

习题 8.1

1. 求点 (a, b, c) 关于: (1) 各坐标面; (2) 各坐标轴; (3) 坐标原点的对称点的坐标.

2. 在 z 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和点 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

3. 试证以 $A(4, 1, 0), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

§ 8.2 曲面及其方程

一、曲面方程的概念

像在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样,在空间解析几何中,任何曲面或曲线看做点的几何轨迹.在这样的意义下,如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (8-2-1)$$

有下述关系:

(1) 曲面上任何一点的坐标都满足方程(8-2-1);

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足(8-2-1),

那么,方程(8-2-1)称为曲面 S 的方程,而曲面 S 就称为方程(8-2-1)的图形(图 8-5).

二、空间中的平面及其方程

先看一个简单的例子.

例 1 设有点 $A(1, 2, 3), B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意得,所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x, y, z)$ 为所求平面上的点,由于

$$|AM| = |BM|,$$

所以

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2}.$$

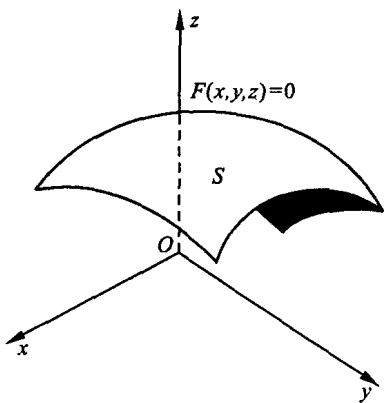


图 8-5

等式两边平方,然后化简便得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求的平面上的点的坐标所满足的方程,而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程,所以这个方程就是所求的平面方程.

可以证明(详见本章第7节),任何一个三元一次方程都是平面的方程;反之,在空间直角坐标系中,平面的方程都是三元一次方程.于是平面方程可以写成如下形式,并称之为平面的一般方程:

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (8-2-2)$$

其中 A, B, C, D 均为常数且 A, B, C 不同时为零.

当 A, B, C, D 之中某一个或两个为零时,我们应熟悉相应的平面图形的特点,具体讨论如下:

(1)若 $D=0$, 方程 $Ax+By+Cz=0$, 这是经过原点的平面.

(2)若 $C=0$, 方程 $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面.

同样, $Ax+Cz+D=0$ 是平行于 y 轴的平面; $By+Cz+D=0$ 是平行于 x 轴的平面.

(3)若 $A=0, B=0$, 方程 $Cz+D=0$ 表示平行于 xOy 面的平面.

同样, $Ax+D=0$ 是平行于 yOz 的平面; $By+D=0$ 是平行于 zOx 面的平面.

(4)若 $A=0, D=0$, 方程 $By+Cz=0$ 表示通过 x 轴的平面,

同样, $Ax+Cz=0$ 是通过 y 轴的平面; $Ax+By=0$ 是通过 z 轴的平面.

例2 设一平面通过 x, y, z 轴上三点 $P(a, 0, 0), Q(0, b, 0), R(0, 0, c)$, 求这平面的方程(其中 a, b, c 均不为零).

解 设所求的平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

因 P, Q, R 三点都在这个平面上, 所以点 P, Q, R 的坐标都满足方程, 即有: