中学数理化自学指导与评价手册

# 平面解析几何

陈汝作 黄钟麟 编

上海科学技术出版社

中学数理化自学指导与评价手册

**平面解析几何**

陈汝作　黄钟麟　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店 上海发行所发行　　上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6　字数 127,000

1988年3月第1版　1988年3月第1次印刷

印数 1—56.000

ISBN 7-5323-0275-X/G·50

定价：1.40元

# 序

目前我国的基础教育发展得相当快，但是教育质量一般不高。如何提高多数学校的教育质量是一个亟待解决的问题。我们必须实现“大面积丰收”，要使所有的中学，不仅是那些重点普通中学，而且包括一般普通中学、其他类型的中学和自学者，都能达到较高的质量标准。也就是说，每个学校都要使大多数学生取得较好的成绩。这当然是个艰巨任务，也许可以说，世界上目前还没有一个国家的基础教育达到了这样的水平。但是从国内外许多学校的教育改革经验看来，这是可以做得到的。

为了实现这个理想，首先要有明确的具体的教育目标。在总的教育目标下，中学的每个学科都应该明确整个学科的及其每个单元的教学目标。我们这几年常说，现在一般学校中许多学生只会记忆一些知识，但解决问题的能力不强，也缺乏学习的兴趣。这样的话已经说得很多，听得也很多，为什么就不能把这种现象改变过来呢？原因之一就在于没有明确的具体的学科教学目标。各科教学大纲中虽然提到了教学目标，但往往太简略、抽象，不能起具体指导作用，教师只好仍旧按自己的习惯去进行教育。上海科学技术出版社现在出版了这套《中学数理化自学指导与评价手册》，基本上参考了美国教育心理学家布卢姆的目标分类学，对每个学科、每个单元的教学目标具体地分层次地作了规定。当然，学科目标如何分类尚无定论，每门学科各有它的特点，目标分类也会有所不同，

目标是否恰当，要经过教学实践的检验。目标定出来了，教师要研究它，学生也要学习它，然后才能按照目标的要求进行教学。对实现目标的教学方法我们目前还不能提出很高的要求，只希望教师能够注意发挥每个学生的主动性、积极性。我们应该强调的一个行之有效的经验，就是每一单元教学完毕，都要按照目标进行检查，通过“形成性评价”，了解学生对哪些目标要求已经掌握了，哪些还没有掌握好。没有掌握好的地方，有的可由教师再加以指导，有的可由学生互助。学期末了，再进行“总结性的评价”。没有评价，目标必然落空。这种做法的指导思想其实并不新鲜。我们常说的打好基础、单元过关、一步一个脚印、循序渐进等，都是这个意思。问题是要认真去做，如果认真做了，你就会发现学生的水平提高得很快。按布卢姆和他的学生的实验，实验班中 70% 的学生可以达到对比班中只占 20% 的尖子学生能够达到的水平。我国有些教师的实验也得出类似的结果。

我国近年有一些教师很注意教学目标和教学评价问题，对这方面的实验跃跃欲试。但是真正动起手来，又会碰到很多困难。因为在目标的规定，评价试题的编拟，学习的指导等方面都缺乏可供参考的材料。《中学数理化自学指导与评价手册》把这些内容都包括在内，因此我觉得这套书出得很及时，对开展教育改革能起重要的作用，我相信它会受到教师们的欢迎。

刘佛年

1987 年 5 月　上海

# 出版说明

这是一套运用现代教育评价原理，促进教学质量提高的实用性自学指导与评价手册。它的程度与现行中学数理化教学大纲与统编教材相当，共二十二册。每一册包括各单元的知识要点与学习水平、到达目标与例证、形成性测验、学习指导、提高要求与例证、本章总结性测验与评价、本章答案，供有关教师、家长、学生使用。

长期以来，教师、家长习惯于用分数管理与评价学生的学习情况。为了应付这种评价，追求一个好分数往往就成了学习的直接动因。而学习知识、培养能力反而成了获取好分数的手段，成为间接动因。苏联著名教育家苏霍姆林斯基曾经一针见血地指出："一旦学生的学习受制于分数，他就失去了认识的欢乐。"学生为了追求分数，往往看不清一门功课的具体教学目标，到底应该掌握哪些知识，形成什么能力，完全处于一种被考试、测验牵着鼻子走的盲从地位。而教师也因传统教学大纲的模糊性，把握不准要教会学生什么才算完成了一门学科的教学任务。

教师与学生要争得教与学的主动权就必须将教与学应达到的目标事先而又具体地告诉他们，本书每一单元的第一部分"知识要点与学习水平"就提供了教学目标的纲要。表中既列出应该学习的知识要点，又指出每个知识要点应该达到的深度，即学习水平。这种学习水平是参照了美国著名教育心理学家布卢姆(B. S. Bloom)的教育目标分类学修订的。知

识、领会、应用、分析、综合、评价六级水平体现了能力由低到高的纵向层次。

本书的第二部分"到达目标与例证"是第一部分纲要的具体化。每一条目标都给学生提供了一种可把握的具体学习内容。对于某些一时难以用语言表述得十分清楚的行为目标，还进一步给出了评定例示，供读者理解教学目标。有了这套目标与例证，无论是教师、家长，还是学生，可以清楚地知道学完这一单元后，在那些知识要点上，应该会做些什么。

当然光有目标还不够，还必须用手段检查学生实际达到的程度。只有及时地发现教学上的不足之处，采取补救措施，才能使教学过程中的失误减到最小程度，实现教学的优化。现代教育评价参与提高教学质量的有力措施就是"形成性测验"。这是一种以检查目标到达度为目的的测验，为调节下一阶段的教学提供反馈信息。它的试题与教学目标一一对应(在每一试题后面都有括号标出该试题检查的目标序号)。

达到目标，可以增强学生学习的兴趣与自信心；没有达到目标，予以适当的指导，给学生一次重新学习的机会。本书的"学习指导"部分特为学生指出重点、难点、解题技巧、错例分析、易混淆的概念辨析，以起到矫正、补差作用。相信通过教学目标的导向，形成性测验的检查及学习指导的具体帮助，绝大多数学生都能达到他们应该达到的目标，顺利地完成学习任务。

对于学有余力的学生，书中"提高要求与例证"特为他们提供进一步学习的素材和导向，起到因材施教的作用。

教学的最佳效果模式是一个教师对一个学生的个别教学。如何使现行的班级授课制也达到一对一，个别教学的效果，是广大教学工作者与家长孜孜不倦地追求的目标，而本书

就为实现这种追求架桥铺路，凡认真按本书要求去做，每一位学生都会在原有基础上取得较大的进步。

如何运用现代教育评价原理于教学，促进大面积教学质量的提高，本书尚属开端与尝试，因此不妥之处在所难免，敬请广大读者批评指正，以期不断修订完善。

# 目　录

# 第一章　直　　线

## 一、有向线段、定比分点

### 知识要点与学习水平

| 节　　次 | 知　识　要　点 | 学习水平 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 知识 | 领会 | 应用 | 分析 | 综合 | 评价 |
| 1.1　有向线段、两点的距离 | (1) 有向直线，有向线段及其有关概念 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | (2) 有向线段的数量公式 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | (3) 平面上任意两点的距离公式 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | (4) 用解析法证明平面几何题 | ✓ | ✓ | | | | |
| 1.2　线段的定比分点 | (5) 定比分点的意义 | ✓ | ✓ | | | | |
| | (6) 定比分点坐标公式（包括线段中点的坐标公式） | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | (7) 三角形重心的坐标公式 | ✓ | ✓ | | | | |

### 到达目标与例证

#### 1.1　有向线段、两点的距离

**知识**

1．能了解有向线段及其有关概念，能掌握有向线段的数量，与有向线段长度的区别及联系。

2．能初步掌握用解析法证几何题的步骤，知道首先要根据题设条件建立适当的直角坐标系，然后根据题中所给的条件，设出已知点的坐标，并且根据题设条件及几何性质推出未知点的坐标。

**领会**

3．对于数轴上任意一条有向线段，在知道它的终点坐标与起点坐标后就能求出它的数量和长度。

［例证］ 已知数轴 $Ox$ 上的 $A$、$B$、$C$ 的坐标分别为 $-1$、2、4。(1)求 $\overline{BA}$ 的数量，$\overline{CB}$ 的长度。(2)如果在 $Ox$ 轴上还有一点 $D$，且 $DC=-2$，求 $D$ 的坐标。

**应用**

4．已知平面上任意两点的坐标，能根据两点间的距离公式求出它们之间的距离。

［例证］ 已知点 $A(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ 和 $B(\cos\beta,\ \sin\beta)$，求 $|AB|$。

## 1.2　线段的定比分点

**知识**

1．能知道一个定点分有向线段成定比 $\lambda$ 的意义，知道定点分有向线段成定比是有向线段的数量之比，而不是长度之比。

**领会**

2．定比 $\lambda$ 可取不等于 $-1$ 的一切实数值。当分点落在有向线段上时，$\lambda$ 取非负值。当分点落在有向线段的延长线上时，$\lambda$ 取负值。

［例证］ 已知 $|P_1P_2|=3$，而且 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=-\dfrac{2}{3}$，那么

$|P_1P|=$ ____，如果 $\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{3}{2}$，那么 $|P_1P|=$ ____。

**应用**

3．能应用定比分点公式及中点公式，求出分点坐标及中点坐标。或者由分点坐标(中点坐标)，及线段一个端点的坐标，求出另一个端点的坐标。

［例证］ 已知平行四边形三个顶点的坐标是 (1, 2)、(−1, −2)、(−3, 4)，求第四个顶点的坐标。

## 形成性测验

（一）选择题

1．$A$、$B$ 是数轴上两点，点 $B$ 的坐标 $x_2=-5$，而且 $BA=3$，那么点 $A$ 的坐标 $x_1$ 等于 （　）

① −8；② −8 或 −2；③ −2；④ 8。 [1.1-2]①

2．$A$、$B$ 是数轴上两点，点 $B$ 的坐标 $x_2=-5$，而且 $|BA|=3$，那么点 $A$ 的坐标 $x_1$ 等于 （　）

① −8；② −8 或 −2；③ −2；④ 8。 [1.1-2]

3．设 $P$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 $\lambda$ 为 $-\frac{1}{2}$，那么 $P$ 点落在 （　）

① 线段 $P_1P_2$ 上；② 线段 $P_1P_2$ 的延长线上；③ 线段 $P_2P_1$ 的延长线上；④ $P$ 点的位置不能确定。 [1.2-2]

4．将线段 $AB$ 延长至 $C$，使 $|AC|=3|AB|$，那么 $\frac{AC}{CB}$ 等于 （　）

① $-\frac{3}{2}$；② $\frac{3}{2}$；③ $-\frac{2}{3}$；④ $\frac{2}{3}$。 [1.2-2]

---

① 1.1-2 表示 1.1 小节到达目标与例证的第 2 点，下同。

5．将线段 $AB$ 延长至 $C$，使 $|AC|=3|AB|$，那么 $\frac{AB}{BC}$ 等于 (　　)

① 2；② $\frac{1}{2}$；③ $-\frac{1}{2}$；④ 3。 [1.2-2]

（二）填充题

1．$A$、$B$ 是数轴上两点，点 $A$ 的坐标 $x_1=-a-b$，点 $B$ 的坐标 $x_2=b-a$，那么 $AB=$____；$BA=$____；$|AB|=$____。 [1.1-3]

2．一条线段的两个端点坐标为 $(4a, b)$、$(a, 4b)$，那么这条线段的两个三等分点的坐标是 ________。 [1.2-3]

3．设点 $P$ 的坐标为 $(x, y)$，那么点 $P$ 关于原点的对称点的坐标是______，关于 $x$ 轴的对称点的坐标是______，关于 $y$ 轴的对称点的坐标是_______。 [1.2-3]

4．如果三角形三个顶点的坐标为 $(-a, 0)$、$(a, 0)$、$(a\cos\theta, b\sin\theta)$，那么三角形重心 $G$ 的坐标是_________。 [1.2-2]

（三）已知两点 $P(-1, -6)$ 和 $Q(3, 0)$，延长 $QP$ 到 $A$，使 $|AP|=\frac{1}{3}|PQ|$，求点 $A$ 的坐标。 [1.2-3]

（四）$\triangle ABC$ 顶点 $A$、$B$、$C$ 的坐标分别为 $(-1, 1)$、$(3, 2)$、$(-3, 9)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形。 [1.1-3]

（五）证明：连接四边形对边中点的二直线与连接两对角线中点的直线三线共点，且互相平分。 [1.1-2, 1.2-3]

## 学习指导

1．有向线段 $\overline{AB}$ 是一个几何图形，记为 $\overline{AB}$。$\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 是长度相等方向相反的两个不同的有向线段。有向线段 $\overline{AB}$

的长度记为 $|AB|$，是一个正的实数(长度为零的有向线段暂不讨论)，它就是线段的长度，它与方向无关，所以 $|AB|=|BA|$。有向线段 $\overline{AB}$ 的数量是一个正的或负的实数，即有向线段的长度加上一个表示方向的符号，记成 $AB$。$AB$ 和 $BA$ 互为相反数，即 $AB=-BA$。

2．对于数轴上的有向线段 $AB$，如果求它的数量，则应将终点的坐标减去起点的坐标，它的差就是对应的有向线段的数量，这里的被减数与减数绝对不能颠倒。如果求它的长度，只要求出终点，起点坐标差的绝对值就可以了。

3．用解析法证明几何题，建立的坐标系必须适当，这样可简化解题过程。通常我们可以根据图形的特点来建立坐标系。其次，必须合理地设已知点的坐标，所设的坐标既要反映点的位置，又要具有一般性。在用解析法证明平面几何题时，绝不能用特殊图形来代替一般图形，不然结论就失去一般性了。

4．定点 $P$ 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 为定比 $\lambda$，是指有向线段数量之比，因此当 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 方向相同时，$\lambda$ 取正值。当 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 方向相反时，$\lambda$ 取负值，这时 $P$ 点必在线段 $P_1P_2$（或 $P_2P_1$）的延长线上。但是 $\lambda$ 不能为 $-1$，因为当 $P$ 点落在线段的延长线上时 $|P_1P|\neq|PP_2|$。

5．在运用定比分点公式 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ 时，特别要注意这里的 $x_1$、$y_1$ 是有向线段起点的坐标，而 $x_2$、$y_2$ 是有向线段终点的坐标，$x_1$、$x_2$ 的位置(同样 $y_1$、$y_2$ 的位置)一定不能搞错，否则求得的坐标不符合要求。

例　已知两点 $A(2,3)$ 和 $B(6,-1)$。(1) 在 $AB$ 上求一点 $P$，使 $\dfrac{AP}{PB}=3$；(2)在 $AB$ 上求一点 $M$，使 $\dfrac{BM}{MA}=3$。

这里，虽然分点 $P$、$M$ 分有向线段的定比 $\lambda$ 都是 3，但是，$P$ 是有向线段 $AB$ 的分点，而 $M$ 是有向线段 $BA$ 的分点。所以在求点 $P$ 的坐标时，应以 $A$ 的坐标(2, 3)对应于公式中的 $(x_1, y_1)$，$B$ 的坐标(6, −1)对应于 $(x_2, y_2)$。而求点 $M$ 的坐标时，恰好相反。一般情况下，点 $P$ 和点 $M$ 的坐标是不会相同的。

6．在应用定比分点公式解题时，常常可以根据题意选取不同的点为分点，而且由此得到不同的 $\lambda$ 值。这时，如果分点选得比较合理，就可使解题过程较为简洁，方便。

例　已知点 $A(1, -1)$、$B(-4, 5)$，延长 $AB$ 到 $C$，使 $|AC|=2|AB|$，求 $C$ 点的坐标。

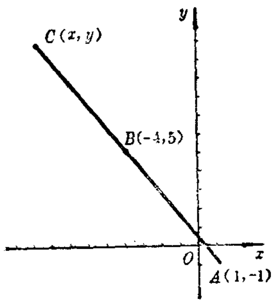


图　1-1

解法一　如图 1-1，设点 $C$ 的坐标是 $(x, y)$，并把 $C$ 看作 $AB$ 的外分点。

$\because$　$|AC|=2|AB|$，而 $|AB|=|BC|$，

$$\therefore \quad \frac{|AC|}{|CB|}=2,$$

$$\therefore \quad \lambda=\frac{AC}{CB}=-2.$$

根据定比分点公式，得

$$x=\frac{1+(-2)\times(-4)}{1+(-2)}=-9,$$

$$y=\frac{-1+(-2)\times 5}{1+(-2)}=11.$$

所以，$C$ 的坐标是 $(-9, 11)$。

解法二　设点 $C$ 的坐标是 $(x, y)$，把 $B$ 点看作 $AC$ 的内

分点。

$\because |AC|=2|AB|$, $\therefore |AB|=|BC|$，可知 $B$ 是 $AC$ 的中点。于是，得

$$-4=\frac{1+x}{2}, \text{ 即 } x=-9;$$

$$5=\frac{-1+y}{2}, \text{ 即 } y=11。$$

所以，$C$ 的坐标是 $(-9, 11)$。

显然，解法二比较简便，合理。

# 二、直线的方程

## 知识要点与学习水平

| 节次 | 知识要点 | 学习水平 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 知识 | 领会 | 应用 | 分析 | 综合 | 评价 |
| 1.3 一次函数的图象与直线的方程 | (1) 一次函数的图象与二元一次方程的图象都是直线 | ✓ | | | | | |
| 1.4 直线的倾斜角和斜率 | (2) 直线倾斜角的定义，取值范围 | ✓ | ✓ | | | | |
| | (3) 直线斜率的定义，过两点的直线的斜率公式 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| 1.5 直线方程的几种形式 | (4) 直线的点斜式方程，斜截式方程，两点式方程，截距式方程的推导，适用范围，及它们之间的关系 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | (5) 直线在坐标轴上截距的定义 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| 1.6 直线方程的一般形式 | (6) 直线方程一般式的定义 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |
| | (7) 直线方程的一般式，点斜式，斜截式，两点式，截距式的互化 | ✓ | ✓ | ✓ | | | |