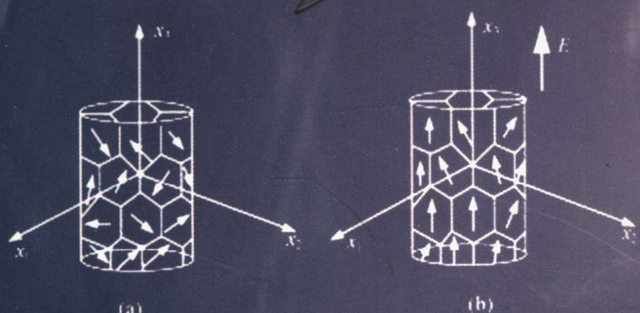
电磁场中的逆问题及应用

黄卡玛　赵 翔　编著



(a)　　(b)

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院科学出版基金资助出版

电磁场中的逆问题及应用

黄卡玛　赵　翔　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书讨论电磁场中的逆问题及其应用，主要内容包括两个部分：一是逆问题的基础理论与算法，二是电磁场中常见逆问题的建模与求解。第1～4章讨论了逆问题的确定性方法（包括病态与良态的概念、正则化的一般理论、Tikhonov正则化、正则化参数的确定、迭代正则化、离散正则化和非线性逆问题的正则化算法）和随机性方法即蒙特卡罗法（包括禁忌搜索算法、模拟退火算法、遗传算法、神经网络法等）；第5～8章重点讨论具有很高应用价值的优化设计问题、电阻抗成像、电磁逆散射和复杂媒质的复介电常数测量。附录部分包含了本书涉及的若干矢量公式和泛函分析中的一些基本概念。

本书主要适于具有电磁场理论基础的研究生、教师以及科研人员阅读，可作为研究生教材，或可供生物医学成像、雷达目标识别、地质勘探以及无损检测领域的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场中的逆问题及应用/黄卡玛，赵翔编著. 一北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-015912-8

I. 电… II. ①黄…②赵… III. 电磁场-逆问题-高等学校-教材

IV. ①0441.4②0175

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第078027号

责任编辑：马长芳 姚庆爽/责任校对：赵桂芬

责任印制：钱玉芬/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年10月第 一 版　开本：B5 (720×1000)

2005年10月第一次印刷　印张：11 1/4

印数：1—2 500　字数：216 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

简单而概括地定义，逆问题就是由果求因的问题；与此相对应，正问题则是由因求果。电磁场中正问题是指已知入射条件与介质分布求场分布，而电磁场中逆问题则是已知场分布求介质分布（入射条件已知）或求入射条件（介质分布已知）。从麦克斯韦方程建立至今，经典电磁学已发展了一百多年，为电磁场正问题的求解奠定了相当完善的理论体系，发展了许多各具特色的解析方法和数值方法。而电磁场中逆问题虽然是整个电磁场理论的有机组成部分，但由于研究历史短以及非适定性的特点，至今仍然缺少相对成熟的理论体系和快速可靠的算法。另一方面，电磁场中的逆问题由于有着广泛的应用价值，在近二十年里一直是国内外的研究热点，有大量的研究论文发表，但综述性文献缺乏，而进行系统论述的科技书籍更是鲜见。作者在多年研究与实践中取得了一些成果，深感电磁场逆问题具有很高的研究价值，但相关书籍的缺乏又使很多准备或正在从事有关研究的人员无法系统学习这一领域的知识并全面了解国内外的最新研究成果和动态。为了填补这一空缺，本书在电磁场逆问题的一般数学理论、计算方法、重要应用（如优化设计、电阻抗成像、电磁逆散射和复杂媒质的测量）和最新进展等几方面进行系统论述，希望促进电磁场中逆问题的进一步研究，同时也为实际应用提供指导。

电磁场中的逆问题一般分为两大类：优化设计问题与参数识辨问题。优化设计问题一直是电磁场理论与技术中的重要课题；而参数识辨问题在地质勘探、无损检测和医学成像等工程技术领域具有重要的应用价值，应用的需求、多学科交叉与多技术交融使得参数识辨问题成为研究热点。从数学的角度看，二者的区别仅在于对解的唯一性要求不同，即优化设计问题通常不要求唯一性，同一个问题可以有不同种优化设计方案，而参数识辨问题要求得到与客观实际相符的唯一解，这一区别造成了求解参数识辨问题的更多困难。

与其他逆问题一样，电磁场中的逆问题大多是病态的（非适定的），即解的存在性、唯一性或稳定性不能得到满足。这一特点导致了求解的困难。围绕非适定性在数学理论上作研究是重要的基础，如何设计高效而可靠的算法是求解之关键，将理论与算法运用于实际问题并解决它则是最终目标。本书的内容正是按照这一思路来组织的：第 1 章简要介绍电磁场理论的基础知识，第 2 章对电磁场中的逆问题进行了概述性介绍；第 3 章和第 4 章涉及逆问题的基础理论与常用算法，其中第 3 章围绕正则化理论讨论了逆问题的确定性方法，包括良态与病态的概念、正则化的一般理论、Tikhonov 正则化、Tikhonov 正则化参数的选取、迭代正则化、离散正则化

和非线性逆问题及其正则化算法，第 4 章则讨论了逆问题的随机性方法，即蒙特卡罗法，包括禁忌搜索算法、模拟退火算法、遗传算法、人工神经网络法等；最后，我们重点讨论电磁场中常见逆问题的建模与求解，其中包括第 5 章电磁场中的优化设计、第 6 章电阻抗成像、第 7 章电磁逆散射和第 8 章复杂媒质的复介电常数测量。附录部分包含了正文涉及的若干矢量公式和泛函分析中的一些基本概念。

本书在写作过程中力求叙述简明流畅、广深兼顾和深入浅出。由于逆问题的数学理论涉及较多泛函分析的知识，为了避免使读者感到抽象晦涩，书中尽量省略数学细节而保留那些结论性的内容。

本书部分研究内容是在国家自然科学基金的资助下完成的。本书的编写还得到了四川大学电子信息学院陈星副教授、闫丽萍副教授和刘长军教授的大力支持和帮助，书中包含了陈星副教授、闫丽萍副教授的部分研究成果，研究生向胜昭、李超菊和傅林完成了部分文字输入和插图绘制工作。在此向他们表示深切的感谢。

电磁场中逆问题的研究是一个相当庞大的领域，本书所含内容只能涉及这个领域的一部分，且一些问题的研究也未能充分而深入地展开。由于作者的水平有限和时间仓促，书中恐难以避免疏漏、取舍不当或者谬误之处，恳请读者批评指正。

作　者

2005 年 5 月 11 日

于四川大学电子信息学院

本书的符号表示

本书包含了大量数学符号和电磁场理论中的物理量。为了区别电磁场理论中由矢量函数表示的各物理量和一般的数学上 n 维向量，前者我们用粗体加上箭头表示，如 $\vec{\mathbf{E}}$、$\vec{\mathbf{H}}$、$\vec{\mathbf{r}}$ 以及单位矢量 $\hat{\mathbf{n}}$、$\hat{\mathbf{r}}$ 等，后者以及矩阵只用粗体表示，如 $\mathbf{A}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{x}$ 等。以下是本书一些符号的表示习惯：

$\vec{\mathbf{E}}$	矢量函数
$\hat{\mathbf{n}}$	单位矢量
$\overline{\mathbf{G}}$	并矢(张量)
$\mathbf{A},\mathbf{b}$	矩阵或向量
A,X	算子(映射)或空间(集合)
f	函数或变量或空间中的元素

一些特定数学符号

$\mathbb{N}$	自然数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{K}$	数域($\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$)
sup	上确界
inf	下确界
span	生成
$\forall$	任意
$\exists$	存在
j	复数因子
$X\backslash M$	M 在 X 中的补集
$\overline{M}$	集合 M 的闭包
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵
$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的共轭转置矩阵
A^*	算子 A 的伴随算子(共轭算子)

目　录

第 1 章　电磁场理论基础

1.1　麦克斯韦方程组及边界条件

麦克斯韦(Maxwell)方程组是宏观电磁现象的理论基础,反映了电场和磁场之间以及它们与电荷和电流之间相依关系的普遍规律,是研究电磁理论的基本方程.麦克斯韦方程组是对电磁现象中的一些重要的实验规律(安培定律、法拉第定律、高斯定律和磁单极子不存在)的总结与推广.麦克斯韦的一个重要贡献是在安培定律中引入了位移电流的附加项,从而科学地解释了时变场中的电流连续性问题,并预言了电磁波的存在.

1.1.1　麦克斯韦方程组的微分形式

麦克斯韦方程组的微分形式如下

$$\nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\vec{\mathbf{J}}+\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\qquad\text{(安培定律)}\tag{1.1.1}$$

$$\nabla\times\vec{\mathbf{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\qquad\text{(法拉第定律)}\tag{1.1.2}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}=0\qquad\text{(高斯磁定律)}\tag{1.1.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{D}}=\rho\qquad\text{(高斯电定律)}\tag{1.1.4}$$

其中 $\vec{\mathbf{E}}$、$\vec{\mathbf{H}}$、$\vec{\mathbf{D}}$、$\vec{\mathbf{B}}$、$\vec{\mathbf{J}}$、ρ 分别表示电场强度、磁场强度、电位移矢量、磁感应强度、电流密度、电荷密度.对式(1.1.1)取散度,并应用式(1.1.4),得到电流连续性方程(或称为电荷守恒方程)

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{J}}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\tag{1.1.5}$$

反过来,由式(1.1.1)和(1.1.5)可以导出式(1.1.4).另外,对式(1.1.2)取散度则得到式(1.1.3).由此可见,两个散度方程可以由两个旋度方程和电流连续性方程共同导出.三个独立的方程式(1.1.1)、(1.1.2)和(1.1.5)连同洛伦兹力公式

$$\vec{\mathbf{F}}=q(\vec{\mathbf{E}}+\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}})\tag{1.1.6}$$

共同构成了宏观电磁现象的理论基础.其中洛伦兹力公式表示了一个运动速度为 $\vec{\mathbf{v}}$ 的电荷 q 在电磁场中受到的作用力 $\vec{\mathbf{F}}$ 是其所受电场力 $q\vec{\mathbf{E}}$ 和磁场力 $q\vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}}$ 的叠加.

1.1.2 本构关系

物质的本构关系又称物质的电磁性质方程，指的是与媒质电磁特性相联系的场量之间或源与场量之间的关系. 本构关系是通过对电磁场作用下媒质分子极化、磁化以及电流传导的机理分析和实验研究而总结出来的.

对于各向同性线性媒质，本构关系具有很简洁的形式

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} \tag{1.1.7}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}} \tag{1.1.8}$$

其中 ε、μ 分别称为媒质的介电常数(电容率)和磁导率，真空中介电常数和磁导率分别为 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\mathrm{F/m}$ 和 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$.

对于一般性媒质，本构关系为

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{D}} - \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} \tag{1.1.9}$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} - \vec{\mathbf{H}} \tag{1.1.10}$$

$\vec{\mathbf{P}}$ 和 $\vec{\mathbf{M}}$ 分别表示极化强度矢量和磁化强度矢量，特别地，对各向同性媒质，有

$$\vec{\mathbf{P}} = \chi_e\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} \tag{1.1.11}$$

$$\vec{\mathbf{M}} = \chi_m\vec{\mathbf{H}} \tag{1.1.12}$$

其中 χ_e、χ_m 分别称为媒质的极化率、磁化率. 令

$$\varepsilon = (1+\chi_e)\varepsilon_0 = \varepsilon_r\varepsilon_0 \tag{1.1.13}$$

$$\mu = (1+\chi_m)\mu_0 = \mu_r\mu_0 \tag{1.1.14}$$

则得到式(1.1.7)和(1.1.8)，其中 ε_r 和 μ_r 分别称为相对介电常数和相对磁导率.

关于媒质导电性能的本构关系为

$$\vec{\mathbf{J}}_c = \sigma\vec{\mathbf{E}} \tag{1.1.15}$$

其中 $\vec{\mathbf{J}}_c$ 是指电场作用下导电媒质中的传导电流，它不同于外加的电流源. σ 称为媒质的电导率，特别地，对理想介质有 $\sigma=0$，对理想导体有 $\sigma=\infty$，对一般导电媒质有 $0<\sigma<\infty$.

对于各向异性媒质，它们的电容率(或介电常数)，或者磁导率，或者电导率，为张量形式(表现为一个 3×3 的矩阵)，相应的本构关系为

$$\vec{\mathbf{D}} = \bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{\mathbf{E}} \tag{1.1.16}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \bar{\bar{\mu}}\cdot\vec{\mathbf{H}} \tag{1.1.17}$$

$$\vec{\mathbf{J}}_c = \bar{\bar{\sigma}}\cdot\vec{\mathbf{E}} \tag{1.1.18}$$

1.1.3 麦克斯韦方程组的积分形式和边界条件

利用高斯公式和斯托克斯公式，可以将麦克斯韦方程组的微分形式化成积分形式

$$\oint_C \vec{\mathbf{H}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = \int_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \tag{1.1.19}$$

$$\oint_C \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} \tag{1.1.20}$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 0 \tag{1.1.21}$$

$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_V \rho dV \tag{1.1.22}$$

电流连续性方程的积分形式如下

$$\oint_S \vec{\mathbf{J}} \cdot d\vec{\mathbf{S}} = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV \tag{1.1.23}$$

在媒质分界面处,物质常数不连续,分界面两侧的场量 $\vec{\mathbf{E}}$、$\vec{\mathbf{H}}$、$\vec{\mathbf{D}}$、$\vec{\mathbf{B}}$ 等可能不再可微甚至发生突变(不再连续),于是在媒质分界面上麦克斯韦方程组的微分形式已失去意义,不再成立,但其积分形式仍然成立.可以由积分形式导出分界面两侧无限靠近的两点上电磁场量的关系,该关系称为边界关系,可将其视为麦克斯韦方程组在分界面上的形式.

记分界面两侧的媒质分别为媒质 1 和媒质 2.下面我们将媒质 1、2 中的各场量分别加上下角标"1"和"2",并将各场量分解为平行于边界的分量(即切向分量,加下角标"t"来表示)和垂直于边界的分量(即法向分量,加下角标"n"来表示).从麦克斯韦方程组的积分形式出发,由旋度方程可得到关于切向分量的边界条件,由散度方程则可得到关于法向分量的边界条件.

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{H}}_1 - \vec{\mathbf{H}}_2) = \vec{\mathbf{J}}_s \quad \text{或} \quad H_{t1} - H_{t2} = J_s \tag{1.1.24}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{E}}_1 - \vec{\mathbf{E}}_2) = 0 \quad \text{或} \quad E_{t1} = E_{t2} \tag{1.1.25}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\vec{\mathbf{D}}_1 - \vec{\mathbf{D}}_2) = \rho_s \quad \text{或} \quad D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \tag{1.1.26}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\vec{\mathbf{B}}_1 - \vec{\mathbf{B}}_2) = 0 \quad \text{或} \quad B_{n1} = B_{n2} \tag{1.1.27}$$

以上四式中 $\hat{\mathbf{n}}$ 表示分界面上的法向单位矢量,$\vec{\mathbf{J}}_s$、ρ_s 为分界面上的面电流密度和面电荷密度.其中式(1.1.24)表明磁场强度切向分量的跃变量等于分界面上的面电流密度值.式(1.1.25)表明分界面两侧的电场强度切向分量总是连续的.式(1.1.26)表明电位移矢量法向分量的跃变量等于分界面上的面电荷密度值.式(1.1.27)表明分界面两侧的磁感应强度法向分量总是连续的.此外,对于导电媒质,还可以得到

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\vec{\mathbf{J}}_1 - \vec{\mathbf{J}}_2) = 0 \quad \text{或} \quad J_{n1} = J_{n2} \tag{1.1.28}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\vec{\mathbf{J}}_1/\sigma_1 - \vec{\mathbf{J}}_2/\sigma_2) = 0 \quad \text{或} \quad J_{t1}/\sigma_1 = J_{t2}/\sigma_2 \tag{1.1.29}$$

特别地,理想导体内部的电磁场为零,于是,理想导体的表面既存在 ρ_s 也存在 $\vec{\mathbf{J}}_s$.在一般导体和理想介质的分界面上,$\vec{\mathbf{J}}_s$ 为零,但 ρ_s 存在.在两个理想介质的分界面上,$\vec{\mathbf{J}}_s$ 为零,若没有外加电荷,则 ρ_s 也为零.

麦克斯韦方程组具有自洽性(self-consistence)和完备性(completeness). 所谓自洽性,是指各组成方程之间彼此不相互矛盾. 完备性则是指在给定电荷和电流分布的条件下,若初始条件和边界条件都已确定,则各电磁场量由麦克斯韦方程组唯一确定. 上述唯一性定理的证明请参见文献[1],这里只作一点简单的定性说明. 前面提到,两旋度方程式(1.1.1)、(1.1.2)和电流连续性方程式(1.1.5)是独立的,这三个方程一共可以建立起 7 个标量方程,而式(1.1.7)、(1.1.8)、(1.1.15)能建立起 9 个标量方程,一共刚好能建立起 16 个标量方程,而 $\vec{\mathbf{E}}$、$\vec{\mathbf{H}}$、$\vec{\mathbf{D}}$、$\vec{\mathbf{B}}$、$\vec{\mathbf{J}}$、ρ 正好共含有 16 个标量需要求解.

1.2 波动方程

1.2.1 齐次波动方程

设均匀、无源媒质的介电常数为 ε,磁导率为 μ,电导率为 σ,则相应的麦克斯韦方程为

$$\nabla\times\vec{\mathbf{E}}=-\mu\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} \tag{1.2.1}$$

$$\nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\sigma\vec{\mathbf{E}}+\varepsilon\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{1.2.2}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}=0\qquad\Rightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\mathbf{H}}=0 \tag{1.2.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{D}}=0\qquad\Rightarrow\qquad\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}}=0 \tag{1.2.4}$$

在式(1.2.2)两边取旋度得到

$$\nabla\times\nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\sigma\nabla\times\vec{\mathbf{E}}+\varepsilon\nabla\times\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} \tag{1.2.5}$$

进一步有

$$\nabla\nabla\cdot\vec{\mathbf{H}}-\nabla^2\vec{\mathbf{H}}=\sigma\nabla\times\vec{\mathbf{E}}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{\mathbf{E}}) \tag{1.2.6}$$

将式(1.2.1)和(1.2.3)代入式(1.2.6),则得到磁场的波动方程

$$\nabla^2\vec{\mathbf{H}}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.7}$$

同理可得电场的波动方程

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.8}$$

特别地,在理想介质中,因 $\sigma=0$,方程化为

$$\nabla^2\vec{\mathbf{H}}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.9}$$

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}=0 \tag{1.2.10}$$

式(1.2.9)和(1.2.10)是标准的齐次波动方程.它表明脱离了源的电磁波即使在源消失后仍然可以存在,且其真空中的传播速度为 $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$,即 3×10^8m/s.在良导体中,由于 $|\sigma\vec{\mathbf{E}}|\gg\left|\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\right|$,即位移电流相对于传导电流可以忽略,则式(1.2.7)、(1.2.8)可以化为

$$\nabla^2\vec{\mathbf{H}}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t}=0 \tag{1.2.11}$$

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}}-\mu\sigma\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}=0 \tag{1.2.12}$$

式(1.2.11)和(1.2.12)称为涡流方程.

对于时谐场,式(1.2.9)、(1.2.10)变为

$$\nabla^2\vec{\mathbf{H}}+k^2\vec{\mathbf{H}}=0 \tag{1.2.13}$$

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}}+k^2\vec{\mathbf{E}}=0 \tag{1.2.14}$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$,称为波数或者传播常数.式(1.2.13)和(1.2.14)称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程.

1.2.2　非齐次波动方程

现在考虑具有时谐源分布 $\vec{\mathbf{J}}$ 和 ρ 的无耗媒质($\sigma=0$)中的波动方程.由麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\vec{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\vec{\mathbf{H}} \tag{1.2.15}$$

$$\nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\vec{\mathbf{J}}+\mathrm{j}\omega\varepsilon\vec{\mathbf{E}} \tag{1.2.16}$$

将 $\vec{\mathbf{H}}$ 消去,得到关于 $\vec{\mathbf{E}}$ 的方程

$$\nabla\times\nabla\times\vec{\mathbf{E}}-k^2\vec{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\vec{\mathbf{J}} \tag{1.2.17}$$

式(1.2.17)称为矢量波动方程,它在天线和辐射问题中常常出现.该方程可以通过并矢格林函数转化成积分形式求解(参见 1.4 节),也可通过辅助函数的引入,化简后求出(参见 1.3 节).

1.3　位　理　论

1.3.1　标量电位与矢量磁位

为了简化麦克斯韦方程或波动方程的求解,可以引入辅助函数.由于 $\vec{\mathbf{B}}$ 为无散场,因此可将它表为某一矢量函数 $\vec{\mathbf{A}}$ 的旋度,即

$$\vec{\mathbf{B}} = \nabla \times \vec{\mathbf{A}} \tag{1.3.1}$$

再将式(1.3.1)代入式(1.1.2),则有

$$\nabla \times \left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = 0 \tag{1.3.2}$$

可见,$\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$ 为无旋场,因此可将它表示为某一标量函数 ϕ 的负梯度

$$-\nabla \phi = \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{1.3.3}$$

即

$$\vec{\mathbf{E}} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \tag{1.3.4}$$

以上 $\vec{\mathbf{A}}$ 和 ϕ 分别称为矢量磁位和标量电位. 这样,可以用四个位函数 A_x、A_y、A_z、ϕ 代替 6 个场函数 E_x、E_y、E_z、B_x、B_y、B_z 来描述电磁场,不仅如此,我们还将看到 $\vec{\mathbf{A}}$ 和 ϕ 满足的方程通常更为简单.

1.3.2 规范条件

由上面引入位函数的过程可知,$\vec{\mathbf{A}}$ 和 ϕ 仅仅是为了数学上的方便而引入的,而我们关心的仍然是 $\vec{\mathbf{B}}$ 和 $\vec{\mathbf{E}}$. 如果对 $\vec{\mathbf{A}}$ 和 ϕ 作如下变换

$$\vec{\mathbf{A}} \to \vec{\mathbf{A}}' = \vec{\mathbf{A}} + \nabla U \tag{1.3.5}$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial U}{\partial t} \tag{1.3.6}$$

很显然,变换后新的一组位函数 $\vec{\mathbf{A}}'$ 和 ϕ' 所描述的场

$$\vec{\mathbf{B}}' = \nabla \times \vec{\mathbf{A}}' = \nabla \times (\vec{\mathbf{A}} + \nabla U) = \nabla \times \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}} \tag{1.3.7}$$

$$\vec{\mathbf{E}}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}'}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{E}} \tag{1.3.8}$$

和原来的场相等(称为规范不变性). 变换式(1.3.5)和(1.3.6)称为规范变换,也就是说对于给定的场 $\vec{\mathbf{B}}$ 和 $\vec{\mathbf{E}}$,描述它的位 $\vec{\mathbf{A}}$ 和 ϕ 并不能唯一确定,这就为我们按需要选择位函数(即规定不同规范条件)提供了可能性. 常用的规范条件有

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} + \mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{(洛伦兹规范)} \tag{1.3.9}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \text{(库仑规范)} \tag{1.3.10}$$

对于库仑规范,只需要把式(1.3.5)和(1.3.6)中的 U 选为满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 U = 0$ 即可;对于洛伦兹规范,则 U 选为满足齐次波动方程 $\nabla^2 U - \mu\phi \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$ 即可.

1.3.3 用位函数表示麦克斯韦方程组

将式(1.3.4)代入式(1.1.1),得到

$$\nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\vec{\mathbf{A}}=\frac{1}{\mu}[\nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})-\nabla^2\vec{\mathbf{A}}]$$
$$=\vec{\mathbf{J}}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)\tag{1.3.11}$$

即

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}}-\nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})=-\mu\vec{\mathbf{J}}-\mu\varepsilon\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}\tag{1.3.12}$$

将式(1.3.4)再代入式(1.1.4),得到

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{D}}=\varepsilon\nabla\cdot\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right)=\rho\tag{1.3.13}$$

即

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})}{\partial t}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{1.3.14}$$

如果利用洛伦兹规范式(1.3.9),则可由式(1.3.12)和(1.3.14)得到

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}=-\mu\vec{\mathbf{J}}\tag{1.3.15}$$

$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{1.3.16}$$

这是两个非齐次的波动方程,其自由项分别与电流密度和电荷密度有关,两个方程形式完全相同.这两个方程称为达朗贝尔(d'Alembert)方程,它是含源的麦克斯韦方程组在洛伦兹规范下用位函数表示出的形式.

式(1.3.15)和(1.3.16)也可以表示为这样的形式

$$\Box^2\vec{\mathbf{A}}=-\mu\vec{\mathbf{J}}\tag{1.3.17}$$

$$\Box^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}\tag{1.3.18}$$

其中$\Box^2\equiv\nabla^2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}$叫作达朗贝尔算子.注意到方程(1.3.15)和(1.3.16)的形式比方程(1.2.17)要简单很多,其特解为

$$\vec{\mathbf{A}}(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}',t')}{R}\mathrm{d}V'\tag{1.3.19}$$

$$\phi(\vec{\mathbf{r}},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}',t')}{R}\mathrm{d}V'\tag{1.3.20}$$

其中$R=|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|$,$t'=t-R/v$,$v=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$.式(1.3.19)和(1.3.20)说明:由给定电荷和电流分布所激发的位函数,是体积微元内的电荷和电流分布产生的位函数的叠加;t时刻$\vec{\mathbf{r}}$处的位函数由较早时刻$t'=t-R/v$的电荷和电流分布决定,换言之,早些时刻在$\vec{\mathbf{r}}'$处发生的电荷和电流分布的变化要经过R/v时间的延迟后才对$\vec{\mathbf{r}}$处的场有影响.因此,位函数也称滞后位.

下面作为一个例子，我们利用位函数来导出在时谐场情况下方程(1.2.17)的解.

对于时谐场，方程(1.3.15)变为

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}}+k^2\vec{\mathbf{A}}=-\mu\vec{\mathbf{J}} \tag{1.3.21}$$

该方程的解为

$$\vec{\mathbf{A}}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint\frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.3.22}$$

则

$$\vec{\mathbf{E}}=-\mathrm{j}\omega\vec{\mathbf{A}}-\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu\varepsilon}\nabla(\nabla\cdot\vec{\mathbf{A}})=-\mathrm{j}\omega\mu\left(\bar{\bar{\mathbf{I}}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot\iiint\frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}}{4\pi|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'|}\mathrm{d}V' \tag{1.3.23}$$

其中 $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ 为单位并矢. 注意到式(1.3.23)的导出利用了式(1.3.4)和洛伦兹规范式(1.3.9).

1.4　格林函数与积分方程

1.4.1　格林(Green)函数法的基本思想

考虑算子方程

$$Ku(\vec{\mathbf{r}})=g(\vec{\mathbf{r}}) \tag{1.4.1}$$

其中 g 为分布在体积 $V\subset\mathbb{R}^3$内的激励源，即 $g(\vec{\mathbf{r}})=0$ 当 $\vec{\mathbf{r}}\in\mathbb{R}^3\backslash V$，$u$ 为待求的场解，K 为线性微分算子. 引入格林函数 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$满足

$$KG(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')=\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}'),\qquad \text{当 } \vec{\mathbf{r}}' \text{ 固定时} \tag{1.4.2}$$

其中 δ 函数具有选择性

$$\int_V g(\vec{\mathbf{r}}')\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V'=\begin{cases}g(\vec{\mathbf{r}}), & \text{当 } \vec{\mathbf{r}}\in V \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } \vec{\mathbf{r}}\notin V \text{ 时}\end{cases} \tag{1.4.3}$$

显然，$G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$具有对称性，即 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')=G(\vec{\mathbf{r}}',\vec{\mathbf{r}})$. 用 $g(\vec{\mathbf{r}}')$在式(1.4.2)两端做内积(内积的定义参见附录二)

$$\int_V g(\vec{\mathbf{r}}')KG(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V'=g(\vec{\mathbf{r}})$$

因为 K 只是一个关于 $\vec{\mathbf{r}}$ 的运算，可将其提出到积分号之外，即

$$K\int_V g(\vec{\mathbf{r}}')G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V'=g(\vec{\mathbf{r}}) \tag{1.4.4}$$

由方程(1.4.1)和式(1.4.4)可得 $\int_V g(\vec{\mathbf{r}}')G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V'$是方程(1.4.1)的一个解，当然这里我们还没有考虑边界条件的问题.

由此可见，格林函数 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$ 本质上表示一个位于 $\vec{\mathbf{r}}'$ 处的点源在 $\vec{\mathbf{r}}$ 处产生的场，以 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$ 为积分核的积分算子作用在任意源上就可以得到该源产生的场. 这样，利用格林函数可以把微分方程的边值问题转化为积分方程的问题.

1.4.2 非齐次标量波动方程的格林函数解

非齐次标量波动方程的一般形式为

$$(\nabla^2 + k^2)\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = -g(\vec{\mathbf{r}}) \tag{1.4.5}$$

其中 g 为分布在 $\mathbb{R}^3$ 内的激励源.

引入格林函数 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$ 满足

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}') = -\delta(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}') \tag{1.4.6}$$

应用第二格林公式可得

$$\int_V G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\nabla^2\varphi(\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V' - \int_V \varphi(\vec{\mathbf{r}}')\nabla^2 G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V' = \oint_S \left[G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial\varphi(\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n} - \varphi(\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n}\right]\mathrm{d}S' \tag{1.4.7}$$

其中 S 为 $\mathbb{R}^3$ 内任意一闭合曲面，V 是 S 包围的体积. 进一步有

$$\int_V G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')(\nabla^2 + k^2)\varphi(\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V' - \int_V \varphi(\vec{\mathbf{r}}')(\nabla^2 + k^2)G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V' = \oint_S \left[G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial\varphi(\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \tag{1.4.8}$$

将式(1.4.5)和(1.4.6)代入式(1.4.8)，可得

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_V G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')g(\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V' + \oint_S \left[G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial\varphi(\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}S' \tag{1.4.9}$$

式(1.4.9)右端的体积分项表示了 S 内的源产生的场，面积分项则表示了 S 外的源产生的场. 注意到这时对 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$ 的要求只是要满足式(1.4.6)，它并不是一个唯一确定的函数，于是为了尽可能方便地求出 $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$，我们可以考虑一些特殊的 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$：

(1) 若 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$ 满足第一类齐次边界条件

$$G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')|_S = 0 \tag{1.4.10}$$

即它为有界空间第一类格林函数，记为 $G_1(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$，则式(1.4.9)变为

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \int_V G_1(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')g(\vec{\mathbf{r}}')\mathrm{d}V' + \oint_S \varphi(\vec{\mathbf{r}}')\frac{\partial G_1(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')}{\partial n'}\mathrm{d}S' \tag{1.4.11}$$

这正是方程(1.4.6)满足第一类边值问题(狄利克雷(Dirichlet)边值问题，即已知 $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$ 在边界 S 上的值)的解.

(2) 若 $G(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{r}}')$ 满足第二类齐次边界条件