# 直线与平面

上海教育出版社

# 直 线 与 平 面

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

上 海 教 育 出 版 社

**直 线 与 平 面**

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会编

上海教育出版社出版
（上 海 永 福 路 123 号）

新华书店上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 3.875 字数 89,000

1959 年 4 月新 1 版 1978 年 4 月第 8 次印刷

统一书号：7150·478 定价：0.30 元

# 目　　录

# 学习立体几何的目的

立体几何学是研究空間图形性質的学科．但什么叫做空間图形呢？我們可以回忆一下，在平面几何里只是研究所有的点在同一个平面上的几何图形的性質，这种图形叫做平面图形．如果另一种几何图形，它所有的点不完全在一个平面内，这种几何图形叫做**空間图形**．如下面的各种图形（图 1）都是的．

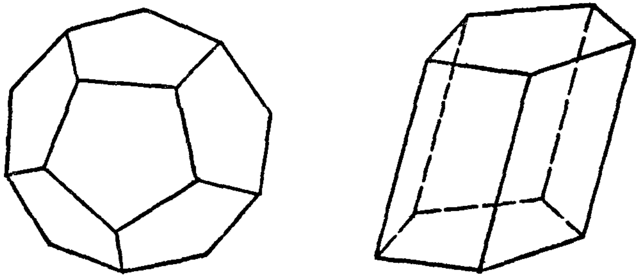

图 1

我們在生活实际中經常要接触到很多物体，如茶杯、盒子、桌椅、磚头、木料和机器零件等．如果我們以純几何的眼光去观察它們，只研究它們的形狀、大小和位置，而不去管它們是用哪种材料制成，色澤与硬度如何以及其他的各种性質时，都可抽象地把它們看作各种不同的几何体，几何体就是空間图形的一个例子．我們学习立体几何是研究空間图形的共通性質，指出图形的基本特征，掌握它們大小的計算法則等．例如形狀是長方体的紙盒和皮箱，虽然它們的材料不同，大小也不一定相同，但就其

形狀都可抽象为長方体的几何图形．如果我們研究了長方体的几何图形的性質，就能运用到形狀是長方体的一切物体上去。

立体几何的知識，在生活和生产中到处要用到的．例如在市上买一只木箱，就需要測算一下物体的体积，才能决定木箱的大小．又如在工場要制造一种器皿，当它的形狀和容积的規格一定时，它的尺寸大小的設計，就必須运用立体几何的知識来測算．再如設計一座自来水塔，当它的形狀和容量一定时，如何設計使材料最省，也要用到立体几何的知識．在国防前綫修筑战壕，如何才能避免敌人炮火的損害，达到制胜敌人的目的，就与战壕的深度和寬度有关．象上面这种例子，我們是不胜枚举的．

立体几何与自然科学也有密切的关系．由于一切自然科学都不能脫离量的关系，因此就会涉及到立体几何的性質或計算面积和体积的問題．

从上述可以知道，学习立体几何不仅是在生活与生产上有很大的用处，而且也是研究一切自然科学必不可缺的基础知識．

"中学数学教学大綱"（修訂草案）已經指出，在中学講授立体几何的內容，主要分为三个部分．第一部分是講授**直綫与平面**，系統地研究直綫与平面的各种位置关系及其性質．第二部分講授**多面体**，系統地研究由若干个平面所組成的空間图形，并归納地区分为棱柱、棱錐和棱台三种来进行研究．第三部分講授**旋轉体**，系統地研究在同一个平面內的直綫或圓弧所構成的图形以它的某一直綫为軸旋轉而成的各种空間图形，并归納为圓柱、圓錐、圓台及球四种来研究．这三个部分是紧密联系、步步深入的．第一部分研究直綫与平面的各种关系和性質，也就是为系統地研究后面兩个部分在理論上打下基础．由此可見，將第一部分直綫与平面学好，是学好整个立体几何的重要因素．但当学生由平面图形的概念扩展为空間图形概念的初期，一般是不容易接

受的.因为平面图形可借助于尺規繪在同一平面上,討論时很直观,也容易理解,而空間图形就不能完全放在一个平面內.为了便于想象空間图形的眞实形狀,通常利用看起来会产生和空間图形大致类似的印象的一些平面图,一个平面图形要靠想象成为一个空間图形,本来就不容易,何况初学的人.因此我們在教学实踐中,应当特别注意培养学生的空間想象力,教会他們在平面上正确地画出空間图形和看懂图形,对于定理及点的軌迹的証明,应注意它們的必要与充分条件,联系并巩固平面几何的知識,从而加强他們的邏輯思維,作为进一步学习立体几何的基础,結合代数与三角的知識能熟練地計算出多面体与旋轉体的表面积和体积.以上这些都是学习立体几何的目的.

兹將学习立体几何应注意的問題,提供几点意見:

**(一)注意直观教学** 直观教学对培养学生形成空間图形的观念有很大的好处.教师不仅在課堂教学时采用直观教具,在課外作业中也可以領导学生自制教具.制作教具的过程也就是对教材理解的过程,对空間图形进一步認識的过程.根据經驗,当学生对某一問題无从着手时,通过簡單的教具制作,就会找到解这問題的門徑,从而触类傍通,对有关問題也能掌握和了解.但制作教具应随着学生对空間图形概念的形成而逐漸减少,否則就会影响学生的空間想象力和邏輯思維能力的发展.重要的工作在于訓練学生善于識别与作出立体的几何图形,通过这种作图的訓練,来逐步发展他們对空間图形的想象力.但是立体几何的作图不同于平面几何的作图,要把一个不完全在一个平面內的点画到一个平面上去,也只有用实綫和虛綫来区别各平面之間的位置关系.因此在教学中如何使学生运用实綫和虛綫来表明空間图形的各种关系,如何作出空間图形才能美观逼眞等,这都是很重要的問題.

（二）重視理論联系实际　这种联系包括与生活实际的联系及有关学科之間的联系．我們所研究的空間图形就是从客观实际中抽象而来，因此在教学中不仅应从实际出发来說明各种空間图形的性質，而且应当运用这些性質来解决实际問題，这样不但使学生所掌握的知識是完整的，同时可以激发学生的学习兴趣．至于学科之間的联系，首先是注意数学学科之間的联系，其次也要尽可能地与其他学科如物理、化学等取得联系．因为立体几何是平面几何的扩張，所以平面几何图形的性質經过扩展后也适用于空間图形，例如在平面几何学中，与兩定点等距离的点的軌迹是这兩点所連綫段的垂直平分綫．但在立体几何学中，与兩定点等距离的点的軌迹則是这兩点所連綫段的垂直平分面．从本例就可以說明，有同样性質的点的軌迹，在平面几何中是直綫，在立体几何中則由直綫扩展为平面了．象这种例子是很普遍的．总之，学习立体几何必須紧密地联系平面几何的知識，这是非常重要的．

（三）重視培养学生的分析思考能力　在教学过程中应注重分析这个步驟，用邏輯推理的方法以启发学生的思維能力，特别是归謬証法用得較多，要使学生透徹理解并善于运用它来証明問題．举例不宜过多，但必須典型，講解例題的时候，应着重分析与討論这兩个环节．布置課外作业題也应适当考虑到計算題、証明題和作图題的搭配，要以形成学生的空間观念以及发展独立思考能力为原則．

关于上述教学原則和教学方法，教学大綱中已有明确指示，我們应根据教学大綱的精神来进行教学，这样才能順利地完成学习立体几何的任务．

# 平面的基本性質

我們知道，任何一个空間图形，它图形上的点是不完全在一个平面内的，所以要研究空間图形的性質，先要討論平面的性質.

## 平面的表示法

什么是平面？在平面几何里已講过，如果在一个面上任取兩点所連成的直綫都与这面处处重合，就称这个面是**平面**. 由于直綫是依附于平面的，直綫可以无限引伸，因此平面是可以无限扩展的. 我們常將这个性質当作平面的基本公理. 然而在实际生活中我們所見到的平面，不論是牆壁、門窗、桌椅等表面，它們的周界都是确定的，給予我們的印象都是矩形. 但是当我們站在适当的角度和适当的距离去观察这些表面为矩形的物体的时候，則又常常看成是平行四边形，譬如画一所房子側面的时候，就画成平行四边形（图 2 左），如果画成矩形看起来反而不象了（图 2 右）. 因此我們在平面上画空間图形的时候，也采用平行四边形来表示平面，这样才能体現出空間图形中直綫与平面的位置关系，使

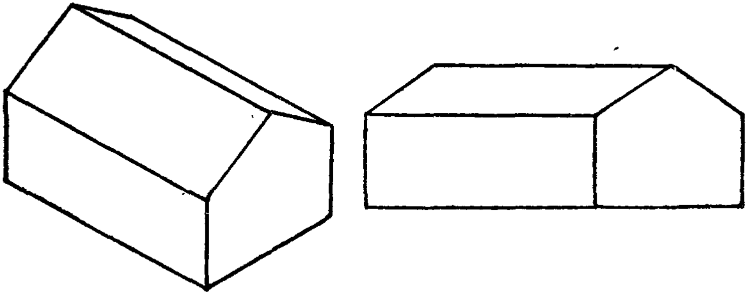

图 2

人看起来更符合实际.

对于用平行四边形表示的平面，則又以一个銳角为45°、30°或 60° 的图形更为合适.

对于一个平面，习慣上用一个大写的拉丁字母或用兩个大写的拉丁字母来表示.用一个字母时，常写在这平行四边形的一个頂点上(图 3a)，如用兩个字母表示平面，則常写在这平行四边形相对的兩个頂点上(图 3b)，用三个字母或三个以上字母来表示平面，也是可以的，但用的机会比較少些. 当用一个字母或兩个字母来表示平面的时候，必須注意在字母前面冠以“平面”兩字，如图 3 中称为平面 $M$ 及平面 $PQ$. 同时在空間图形中我們也常用兩个字母来表示直綫(或綫段)，如果用兩个字母表示平面，而不冠以“平面”兩字，就会与直綫混淆起来.

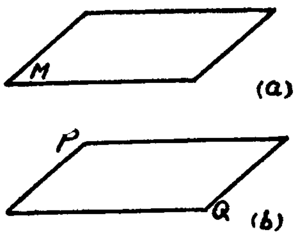

图 3

## 关于平面基本性質的三条公理

同平面几何一样，研究空間图形的性質，也是依据几何公理作为基础的，由公理和定义推导出新的定理，再由公理和新的定理推导出更多的說明空間图形性質的定理，因此立体几何也是邏輯性很强的一种学科.在立体几何中首先采用的公理，就是关于平面基本性質的三条公理.

**1. 如果一条直綫上有兩个点在一个平面內，則这直綫上所有的点都在这平面內，也就是說，这直綫完全在这平面內.**

我們常見泥水工人砌平地面的时候，用一根繩子拉紧兩端幷任意放在地面上，当兩端点与地面重合后，看这繩子是否与地

面重合，从而判别它是否为平面．如果是平面的話，当拉紧繩子的兩端点与地面重合时，这繩子上所有的点都应与这地面重合．这条公理就是劳动人民在生活中經过无数次的实踐結果得出来的．

**2．过不在一直綫上的三点可以作一个平面，也只可以作一个平面．**

这条公理同样取自劳动人民經驗的积累．例如农村中妇女們晒衣服的时候，用三根杆子張开起来架在地面上做成一个晒衣架子，再在架子上放上晒衣竹竿就很牢固了．这是什么道理呢？因为張开的三根杆子与地面接触的一端就等于不在同一直綫上的三个点，过这三点就可以作一个平面，因此这三脚架上面放的重物，等于放在一个平面上，因而牢固了．但是这些道理对她們来講可能是不会理解的，而她們为什么知道这样做，这也就是由于无数次实踐的結果証明了这个問題．

**3．如果兩个平面有一个公共点，則至少还有另一个公共点．**

这是由于平面可以无限扩展的性質所决定的．当兩个平面相交于一点时，如將平面扩展，則必然有无穷多的交点，而且这些交点都在同一直綫上，假如不在一直綫上，則根据公理2过不在一直綫上的三点可以作一个平面，也只可以作一个平面的性質，可知这兩个平面必然合而为一了．因此这个公理也可以这样叙述：**如果兩个平面有一公共点，那末它們就相交于过这公共点的一条直綫**．我們常見到的盒子的边緣或牆角等，都是这种图形性質的例子．

上面这三条平面性質的公理，是研究空間图形性質的理論基础．在公理2中，所謂可以作一个平面，这是說明过不在一直綫上的三点作一个平面的可能性，同时又說只可以作一个平面，

这是說明过不在一直綫上的三点作一个平面的唯一性．对于公理 2，通常也可以叙述为：**过不在一直綫上的三点确定一个平面**．这里“确定”两字的意义，就包含可能与唯一．对于平面的确定，在空間图形中是一个重要的概念，因为空間图形的作图不能依靠圓規直尺把它画在空間，只能抽象地画在一張平面图紙上，因此如何根据图形的条件及平面的性質，正确地处理空間图形平面与平面之間的位置关系，这是画一个空間图形首先要解决的問題，也就是空間图形除了点与綫以外，还多了一个面的元素．

为什么确定一个平面的条件必須是过不在一直綫上的三点，为什么同一直綫上的兩点或无三点在同一直綫上的四点都不能确定一个平面呢？这問題主要也是从人們生活实踐中所認識的．例如，晒衣架子不是用三根交叉的杆子，而是用兩根杆子的話，显然这个兩脚架是立不稳的，这是因为过一直綫可以作无数个平面的緣故．如图 4 中 $AB$ 为空間任意一直綫，我們在 $AB$ 上任取兩点 $A$、$B$，在 $AB$ 直綫外任取一点 $P$，則 $A$、$B$、$P$ 三点可以确定一个平面 $C$，同样我們在 $C$ 平面外任取一点 $S$，則 $S$ 与 $A$、$B$ 又可以确定一个平面 $D$．显然，象这样的平面我們可以作出无数个，这无数个平面环繞着 $AB$ 直綫且过空間的一切点，故我們过空間兩点（也就是过这兩点的直綫）可以作无数个平面（图 4）．如果晒衣架子用四只脚的話，則將会搖擺不定的，因为农村中一般的地面是高低不平的，只有用三只脚的架子才能随便放置都可稳定．但又为什么用的台子、坐的凳子一般都是四只脚呢？这由于台子、凳子一般都是放在室内，地板都是

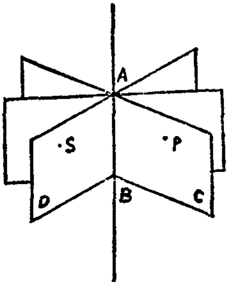


图 4

平面的，所以用四只等長的脚(四只脚的端点在同一个平面内)的台子或凳子放在地板上时，当然是放得稳的.而且四只脚的台子或凳子比三只脚的台子或凳子所占的基面大，所以在平面的地方用四只脚是不易翻倒的. 但在农村里，由于地面高低不平，采用三只脚的台子和凳子也是常見的.

## 确定平面的几个定理

关于确定一个平面的条件，从不在一直綫上的三点可以确定一个平面的基本公理并結合其他兩个公理，可以推导出下面三条确定一个平面的定理.

**1. 过一条直綫和这直綫外一点可以确定一个平面.**

証明： 若直綫 $a$ 及其外的一点 $A$ 为已知， 我們在 $a$ 直綫上任取兩点 $B$ 及 $C$，从公理 2 可知 $B$、$C$ 及 $A$ 三点因不在一直綫上，可以确定一个平面 $M$. 但根据公理 1 的性質又可知直綫 $a$ 上所有的点都在这平面 $M$ 内(图 5).

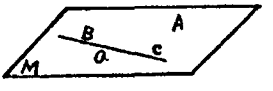


图 5

如果过 $a$ 及 $A$ 点还可作出另一个平面 $N$，則点 $A$、$B$、$C$ 也在平面 $N$ 内，即平面 $N$ 与 $M$ 有三点共有，故合而为一.否則过不在一直綫上 $A$、$B$、$C$ 三点可以确定兩个平面，显然与公理 2 是不符合的.

**2. 过兩条相交直綫可以确定一个平面.**

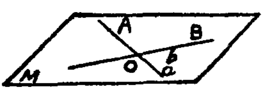


图 6

証明： 設 $a$、$b$ 为兩条相交于 $O$ 点的直綫，我們只要在直綫 $a$、$b$ 上分别各取一点 $A$ 及 $B$，这样过 $A$、$B$、$O$ 三点可以确定一个平面 $M$(图 6). 但由于直綫 $a$ 及 $b$ 上都分别有

两点在这平面内，故直綫 $a$ 及 $b$ 都在这个平面内，即平面 $M$ 过相交的直綫 $a$ 和 $b$。

假定过直綫 $a$ 和 $b$ 还可以作另一个平面 $N$ 的話，則 $A$、$B$、$O$ 三点必在另一个平面 $N$ 内，这与过不在一直綫上的三点可以确定一个平面的性質矛盾，显然 $N$ 平面与 $M$ 平面合而为一。

**3．过两平行直綫可以确定一个平面．**

証明：　設直綫 $a$ 平行于直綫 $b$，根据平行綫的定义，可知这两条平行的直綫必在同一平面内，故过这两条平行直綫可以作一个平面 $M$（图 7）．

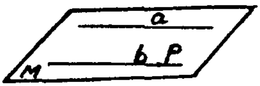

图 7

假定过平行直綫 $a$、$b$ 还可作一平面 $N$ 的話，那末 $M$ 与 $N$ 两个平面都要过直綫 $a$（或 $b$）及直綫 $b$（或 $a$）上任意一点 $P$，这与上述定理 1 过一已知直綫及綫外一点可以确定一个平面的性質矛盾，显然 $N$ 平面与 $M$ 平面合而为一．

从上述确定平面的定理中可知，凡三角形必定是一个平面图形．因为它的三个頂点不可能在同一直綫上，所以它确定一个平面，而各边又是經过每两点的連綫，故必落在这个平面内，所以它是一个平面图形．但連結空間任意四点，就不一定是一个平面图形了．如图 8 中，若 $A$、$B$、$C$、$D$ 为空間四个点，过 $B$、$D$、$C$ 三点确定平面 $P$，而 $A$ 点就不一定落在 $P$ 平面内．如果 $A$ 不在 $P$ 平面内，則所成图形 $ABCD$ 称为**空間四边形**，也就是不在同一个平面内的四边形．

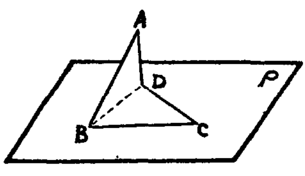

图 8

事实上，我們說空間任意四点，一般是指这四点不在一个平面内的，現在我們来約定，以后如

提到空間任意四点,就是指不同平面的四点.除非特别說明.

空間任意四点可以确定几个平面呢?要解决这个問題,我們可以任取其中的三点确定一个平面,而这样的平面共有四个，如图9中的平面 $ABC$、$ABD$、$ADC$ 及 $BCD$ 就是. 为什么知道有四个平面可作呢?我們可以从其中某一点出发，这点与其余三点中的任意兩个点可以确定一个平面，象这样就可以确定下述一些平面:

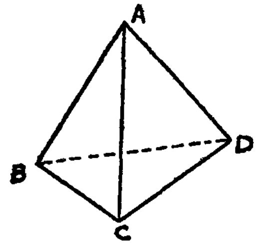

图 9

以 $A$ 点出发可确定的平面有: $ABC$、$ABD$、$ADC$.

以 $B$ 点出发可确定的平面有: $BAC$、$BAD$、　$BCD$.

以 $C$ 点出发可确定的平面有: $CAB$、　$CAD$、$CBD$.

以 $D$ 点出发可确定的平面有:　　$DAB$、$DAC$、$DBC$.

总計虽有 12 个平面，但其中每一个平面都重复表示过三次.如上表每一縱行内的三个平面都是重合的,只能表示一个平面(公理 2).因此实际上能够作出的平面只有四个.

应用代数学中的組合性質来解这个問題,是比較方便的.根据平面性質公理 2, 不在一直綫上的三点确定一个平面,現在空間四点中必沒有三点在一直綫上的情形，否則与我們的約定就矛盾了.因此要求的面数就是在所設四点中任选三点的組合数,从組合公式得

$$C_4^3=\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}=4,$$

上式右边的結果是 4, 就是說空間四点可以确定四个平面.

如果空間有任意五点,且其中无四点在同一平面内,間可确定几个平面?

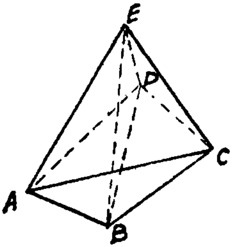


图 10

**解**：我們用組合性質来解．由于題設空間任意五点，其中无四点在同一个平面内，也就是說，这五点中的任何三点都不在一直綫上，否則就与題設矛盾，因此我們要求的面数就等于五点中任取三点的組合数．从公式得

$$C_5^3=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}=10,$$

就是說，題設的空間五点可以确定 10 个平面（图 10）．

一般說来，如果空間有 $n$ 个点（$n$ 指大于或等于 3 的自然数），且其中无四点或多于四点在同一个平面内，問可确定多少个平面？

**解**：同上例一样，我們所求的面数等于 $n$ 个点中任取 3 点的組合数，由公式得

$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

等式右边的結果，就是所求的面数．当 $n=3$ 时，右边等于 1，这是符合于公理 2 的．

現在我們再举出确定平面的几个例子．

**例 1**．如果空間有三条直綫，其中 $AB\parallel CD$，且第三直綫 $EF$ 与前兩直綫都相交，则这三条直綫必同在一个平面内（图 11）．

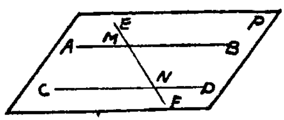


图 11

証明：因为 $AB\parallel CD$，所以过 $AB$ 与 $CD$ 可确定一个平面 $P$．今 $EF$ 与 $AB$ 和 $CD$ 的交点分别是 $M$、$N$，显然 $M$、$N$ 在平面 $P$ 内．直綫 $EF$ 上既然有兩点 $M$、$N$ 在平面 $P$ 内，由公理 1 可知 $EF$ 完全在平面 $P$ 内，所以这三条直綫在

同一个平面内。

**例 2**. 过一直綫及这直綫外不在同一直綫上的三点，可以作几个平面？

**解**：如图 12 中直綫 $EF$ 及 $EF$ 外不在一直綫上的三个点 $A$、$B$、$C$.

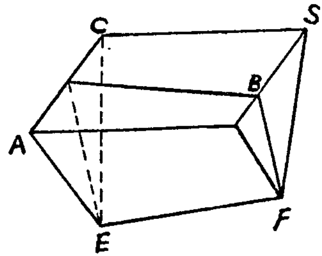

图 12

从过一直綫及綫外一点可以确定一个平面的定理，可知过 $EF$ 及点 $A$，过 $EF$ 及点 $B$，过 $EF$ 及点 $C$ 都分别可作一个平面，即平面 $AF$、平面 $BE$、平面 $CF$ 等.

又从不在一直綫上的三点 $A$、$B$、$C$ 可确定一个平面 $AS$.

显然，本題在一般情况可以作出四个平面.

討論：如果 $A$、$B$、$C$ 中有任兩点的連綫平行于 $EF$ 时，則本題仅可作出三个平面.

象本題的情形，初学立体几何的学生是容易发生錯誤的，他們往往誤認为过 $A$、$B$、$E$，$A$、$B$、$F$，$C$、$B$、$E$，…… 等还有适合本題要求的平面可作，而这些平面都沒有完全通过已知直綫 $EF$，仅通过 $EF$ 直綫上的一点，这是不符合題意的.

**例 3**. 从已知直綫外一已知点，向这已知直綫作一条相交的直綫，使与已知直綫所成的角等于已知角 $\alpha$.

**解**：設（如图 13）$BC$ 为已知直綫，$A$ 为直綫外一点，过 $BC$ 及点 $A$ 可确定平面 $P$. 在 $BC$ 上任取一点 $S_1$，过 $S_1$ 在平面 $P$ 內作 $\angle A_1S_1C=\angle\alpha$，再过 $A$ 作 $AS /\!/ A_1S_1$，使 $AS$ 与 $BC$ 相交于 $S$，則 $\angle ASC$ 为所求.

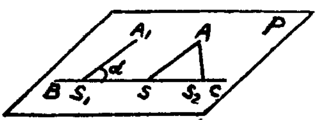

图 13