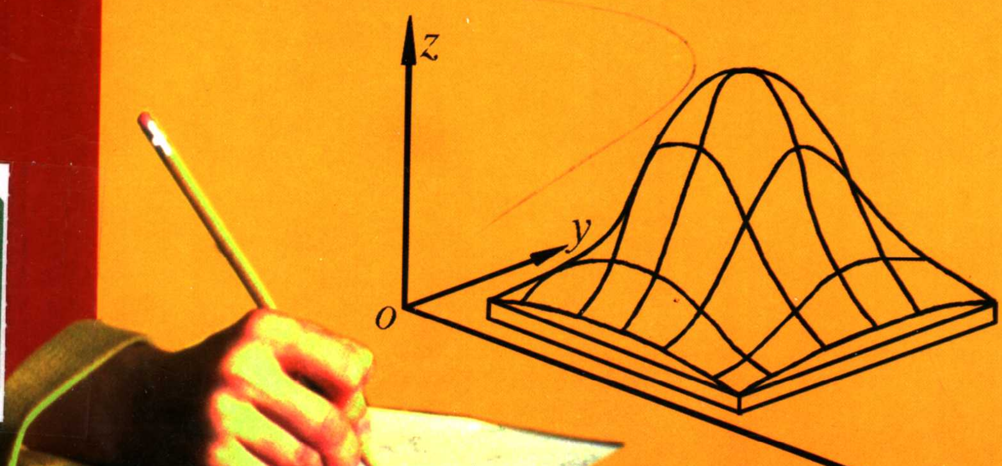
高等学校理工类专业基础课教材

# 概率论与数理统计教程（第二版）

主编 杨永发

编著 杨永发 金大永

苏国忠 吴梦虹 袁莉萍




南開大學出版社

# 概率论与数理统计教程

（第二版）

主编　杨永发

编著　杨永发　金大永　苏国忠

吴梦虹　袁莉萍



南开大学出版社

天津

# 内容简介

本书是为工科大学"概率论与数理统计"课程而编写的教材。全书分概率论与数理统计两部分。前4章为概率论部分，内容包括：概率论的基本概念，随机变量及其概率分布，随机变量的数字特征，大数定律和中心极限定理。后5章为数理统计部分，内容包括：数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析和回归分析。书末附有数学应用软件Matlab在概率统计中的应用介绍、名词索引、常用概率分布表及练习题、习题参考答案等。

本书结合工科教学实际，注意理论与实际的结合，选材适当，论述严谨，条理清楚，便于教学及学生自学，可作为高等工科院校本、专科"概率论与数理统计"课程的教材，也适合非数学类理科及管理类各专业使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计教程 / 杨永发主编. —2版. —天津：南开大学出版社，2005.11

ISBN 7-310-01446-4

Ⅰ.概… Ⅱ.杨… Ⅲ.①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第094159号



南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路94号 邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339 23500755

营销部传真：(022)23508542 邮购部电话：(022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2005年11月第2版 2005年11月第9次印刷

787×1092毫米 16开本 22.625印张 424千字

定价：35.00元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

# 第二版前言

本书自2000年出版以来，多次重印，在读者中产生了很好的影响。在广泛征求使用本书的教师和学生意见的基础上，结合课程改革的最新进展，我们对本书进行了修订。

此次再版，保留了原书的风格和主要内容，对部分内容进行了改写。如改写了连续型随机变量的定义，总体和样本的概念解释，加写了“假设检验的思想和方法”。对大部分内容进行了推敲，使之叙述更严谨，语言更流畅、易懂。更换了一些常用符号，如随机变量、上 $\alpha$ 分位数，样本方差的记号，使之更符合概率论与数理统计课程的流行趋势。对数学应用软件Matlab在概率统计中的应用作了简要介绍。

再版仍由杨永发主编，金大永执笔编写概率论部分，杨永发执笔编写数理统计部分，苏国忠编写附录一，吴梦虹和袁莉萍选配了书中的所有习题。

作者十分感谢关心、使用本书和对本书第一版提出修改意见的各界朋友。我们也对南开大学出版社和河北工业大学表示深切的谢意，没有他们的大力支持，本书是不可能获得成功的。

编　者

2005年5月

# 前　言

概率论与数理统计是工科大学的一门重要基础课，在培养学生运用概率统计独特的思维方式分析和解决实际问题的能力方面具有重要的作用，并为后继课程和未来的工作实践提供必备的随机数学基础。随着教学改革的深入，数学教学向着加强基础、拓宽应用的方向推进，该课程已经被列为工科大学理、工科及管理类绝大多数专业的必修课，并被列入工学、经济学硕士研究生入学考试的必考科目。我们编写本书，就是为了适应教学改革的发展，希望能为本课程提供一本合适的教学用书。

本书分概率论和数理统计两部分。前4章为概率论部分，后5章是数理统计部分，概率论是数理统计的基础。本书内容包括该课程教学基本要求规定的全部内容，并可满足硕士研究生入学考试中“数学一”考试的基本要求。

本书结合工科数学教学实际，在选材上注意理论与实际的统一，结合概率论与数理统计的基本理论，适当介绍了在社会人文科学、医学、经济管理、化工等领域中的一些应用实例，可以拓宽学生视野、激发学生的兴趣。在叙述上力求论述严谨，条理清楚，便于阅读。每节中穿插有若干练习题，作为基本训练之用。章末附有习题，书后附有练习题及习题的参考答案或简要解答，供教师和学生参考。

作为教材使用，概率论和数理统计各需约32学时；若删掉一些内容（如第八、九章，第二章部分内容及一些应用实例），也可以在48学时内完成主要部分的教学。

本书第一章由杨永发编写，第二章由籍明文编写，第三、四章由金少华编写，第五、六、七章由张崇岐编写，第八、九章由张志海编写。杨永发统稿并最后定稿。本书的编写，得到了蒋春澜教授的支持和鼓励，于慎根教授、刘国欣教授先后审阅了全书并提出许多很好的建议，南开大学出版社李正明编审对本书的出版倾注了大量的心血，作者对此一并致以由衷的感谢。

我们也感谢“参考书目”中所列著作的诸位作者。本书从他们的著作中吸收了许多优秀思想和若干富有启发性的例、习题及一些生动有趣的应用实例，极大地丰富了本书的内容。

由于水平所限，书中难免有错、漏及欠妥之处，作者热忱地希望使用本书的教师和同学指正，以便再版时修订。

**编　者**

**2000年4月**

# 目　录

# 第一章 概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，从发生的必然性角度区分，可以分为两类：确定性现象和不确定性现象. 确定性现象是指当一定条件实现时，该结果一定出现，或者当条件不满足时，该结果一定不会出现. 例如，两个同性电荷一定相互排斥，两个异性电荷一定相互吸引. 不确定性现象是指当一定的条件实现时，该结果可能出现也可能不出现. 例如，抛掷一枚质地均匀的硬币，硬币落地后的结果可能是正面向上也可能是反面向上. 在某种程度上，确定性现象和非确定性现象可以描述如下：条件相同，结果唯一，为确定性现象；条件相同，结果不唯一，为不确定性现象.

对于不确定性现象，虽然在个别试验中其结果呈现出不确定性，但通过大量重复试验，试验结果呈现出一定的规律性(统计规律性)，这类不确定性现象称为**随机现象**.

概率论(Probability Theory)与数理统计(Mathematical Statistics)是研究随机现象统计规律性的学科. 概率论的主要特点是建立一般的数学模型研究它们的性质、特征和内在规律性.

## §1.1 随机事件

### 1.1.1 随机试验和样本空间

为了研究随机现象内在的规律性，必须反复地对随机现象进行观察、测量，每一次观察、测量称为一次试验. 如果试验还具有如下一些特征：

(1)试验可以在相同的条件下重复进行；

(2)试验可能出现的所有结果是事先预知的；

(3)每次试验有且只有其中的一个结果出现，但在每次试验结束之前，不知道哪一个结果会出现，

则我们称该试验为**随机试验**(Random Trial). 一般我们用字母 $E$ 表示随机试验. 本书中以后提到的试验都是指随机试验.

对随机试验,我们首先关心的是它可能出现的结果有哪些,称试验中每一个可能出现的结果为**样本点**(sample point),一般用小写的字母 $\omega$ 表示,而试验 $E$ 的所有可能结果的集合叫做 $E$ 的**样本空间**(sample space),用大写字母 $\Omega$ 表示.

**【例 1.1.1】** 设 $E_1$:抛一枚硬币一次,记 $\omega$ 为出现正面,$\bar{\omega}$ 表示出现反面,则 $E_1$ 的样本空间为

$$\Omega=\{\omega,\bar{\omega}\}.$$

**【例 1.1.2】** 设 $E_2$:表示抛一枚硬币 2 次,则 $E_2$ 的样本空间为

$$\Omega=\{\omega\omega,\omega\bar{\omega},\bar{\omega}\omega,\bar{\omega}\bar{\omega}\}.$$

$\Omega$ 中含有 4 个样本点,每一个样本点为一次试验的结果.如 $\omega\omega$ 为第一次和二次均为正面的结果.

**【例 1.1.3】** 设 $E_3$:在时间$[0,t]$内进入某一商店的顾客人数,其样本点为非负整数,且无一固定的上界,故 $E_3$ 的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}.$$

**【例 1.1.4】** 设 $E_4$:检验某个灯泡的寿命,以 $t$(小时)记其寿命,则 $E_4$ 的样本空间为

$$\Omega=\{t\,|\,0\leqslant t<+\infty\}.$$

**【例 1.1.5】** 设 $E_5$:记录本地区一昼夜的最低气温 $x$ 和最高气温 $y$,分别以 $T_0$ 和 $T_1$ 表示本地区的最低和最高气温,则 $E_5$ 的样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}.$$

可以看到,样本空间 $\Omega$ 中包含样本点的数目,可以是有限个(如 $E_1,E_2$),也可以是无限多个,如($E_3,E_4,E_5$).在 $E_3$ 中,样本点的个数和自然数可以建立一一对应的关系,称它的样本点个数为可列无限多个;在 $E_4$ 和 $E_5$ 中,样本点的个数为无限多个,但它不能与自然数建立一一对应的关系,或者说其数目比可列个还“多”,我们称其样本点个数为不可数无限多个.

**练习 1.1** 在例 1.1.4 中,假设我们关心的是灯泡是否为合格品,并规定灯泡的寿命在 1 000 小时以上为合格品(记为“1”),否则为不合格品(记为“0”),写出这个试验的样本空间,并与 $E_4$ 的样本空间比较看其是否相同?

**练习 1.2** 从包含两件正品 $a_1,a_2$ 和一件次品 $b$ 的 3 件产品中,依次取出 2 件,写出这个试验的样本空间.如果将题目中的“依次”改为“同时”,是否为同一试验?写出后一个试验的样本空间.

**练习 1.3** 将 $r$ 个球随机地放人 $n$ 个盒子中,每一种放法是一个样本点,这个试验共有多少个样本点?考虑将两个球 $a,b$ 放入 3 个盒子中的情形,例如,用

| $a$ | $b$ | |
|---|---|---|

表示球 $a$ 放入第一个盒子，球 $b$ 放入第二个盒子的情形，写出这个试验的所有样本点.

### 1.1.2 随机事件

在实际中，对随机试验，人们常常关心满足某种条件的那些样本点构成的样本空间的子集. 例如，若规定灯泡的寿命在 1 000 小时以上为合格品，则对每个灯泡，我们关心的是它的寿命 $t$ 是否在 1 000 小时以上，满足这一条件的样本点的集合 $A=\{t|t\geqslant 1\,000\}$ 构成 $\Omega=\{t|0\leqslant t<+\infty\}$ 的一个子集. 称 $A$ 为该试验的一个随机事件. 一般地，我们称试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 的子集为 $E$ 的**随机事件**(random event)，简称事件. 事件常以大写英文字母 $A,B,\cdots$ 表示.

设某次试验的结果 $\omega\in A$，则称在这次试验中事件 $A$ 发生，否则称在这次试验中 $A$ 没有发生.

特别地，空集 $\varnothing\subset\Omega$，它表示每次试验中都不可能发生的事件，称为**不可能事件**，而 $\Omega$ 在每次试验中一定发生，称为**必然事件**. 样本空间中每个样本点组成一个单点集，称为随机试验的**基本事件**(elementary event). 样本空间 $\Omega$ 也称为**基本事件空间**.

下面进一步讨论前面的例子.

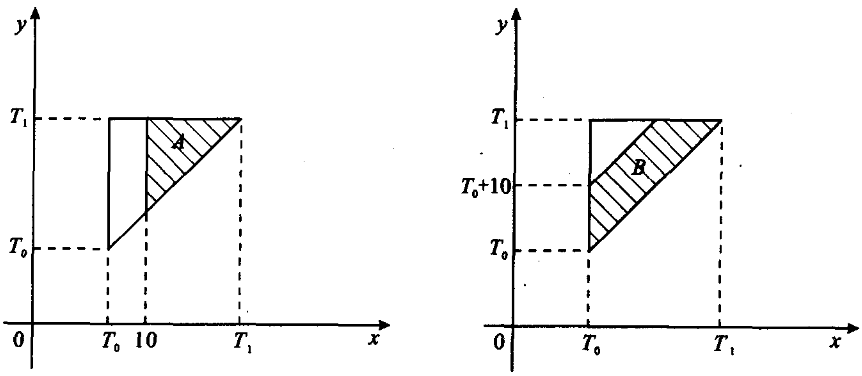
**【例 1.1.2 续】** 对试验 $E_2$，设 $A$ 表示事件：正面出现不少于 1 次，则 $A=\{1,2\}$；设 $B$ 表示事件：出现正面不多于 2 次，则 $B=\{0,1,2\}$；记 $C$ 表示事件：出现 3 次正面，则 $C=\varnothing$，其中 $B=\Omega$ 是必然事件，$C$ 是不可能事件.

**【例 1.1.3 续】** 设 $A$ 表示事件：进入商店的人数不超过 3 个，则 $A=\{0,1,2,3\}$；设 $B$ 表示事件：进入商店的人数不少于 5 个，则 $B=\{5,6,7,8,\cdots\}$；设 $C$ 表示事件：无人进入商店，则 $C=\{0\}$. $C$ 是 $E_3$ 的一个基本事件.

**【例 1.1.4 续】** 设事件 $A$：灯泡寿命小于 200 小时，则 $A=\{t|0\leqslant t<200\}$；设事件 $B$：灯泡寿命在 200 到 1 000 小时之间，则 $B=\{t|200\leqslant t\leqslant 1\,000\}$；$C=\{t=1\,035\}$ 表示灯泡寿命恰为 1 035 小时，$C$ 为 $E_4$ 的一个基本事件.

**【例 1.1.5 续】** 设事件 $A$：最低气温不低于 10 ℃，则 $A=\{(x,y)|T_0\leqslant 10\,℃\leqslant x<y\leqslant T_1\}$；设事件 $B$：最高气温与最低气温之差不超过 10 ℃，则 $B=\{(x,y)|y-x\leqslant 10\,℃,T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$(见图 1.1).

样本点、样本空间与随机事件之间的关系等同于集合论中元素、集合与子集之间的关系，因此我们可以按照集合论中子集的关系与运算来定义随机事件的关系和运算。




事件 $A$　　　　事件 $B$

图 1.1

在下面的叙述中，设 $\Omega$ 是随机试验 $E$ 的样本空间，$\omega$ 表示其样本点，$A,B,C,A_R,B_R,\cdots$ 均表示 $E$ 的事件．为了直观起见，我们采用直观的文氏(venn)图来介绍，图中的矩形区域表示样本空间 $\Omega$，$\omega$ 即为该矩形域中的一点，矩形域中的两个圆分别表示事件 $A$ 和事件 $B$.

(1)事件的包含关系

若 $A\subset B$，则称事件 $B$ **包含**事件 $A$. 其含义是：在一次试验中，若事件 $A$ 发生，则事件 $B$ 一定发生. 因为 $A$ 发生，则试验中出现的样本点 $\omega\in A$，而 $A\subset B$，故 $\omega\in B$，从而 $B$ 必定发生(图 1.2).

事件的包含关系具有传递性：若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

为了方便起见，规定任何事件包含不可能事件：$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2)事件的相等

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与事件 $B$ **相等**，记为 $A=B$，它表示事件 $A$ 与事件 $B$ 为同一事件.

(3)事件的交

由事件 $A$ 与事件 $B$ 的公共样本点组成的集合称为事件 $A$ 与 $B$ 的**交**，它表示事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生的事件，记为 $A\cap B$(或 $AB$)(图 1.3).

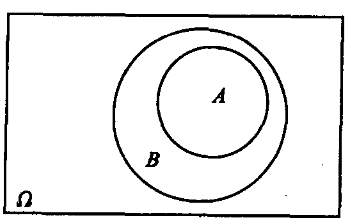



图 1.2

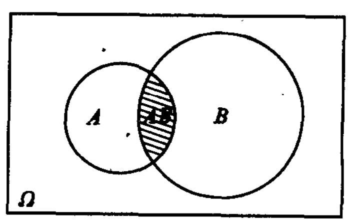



图 1.3

如果 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ **互不相容**，或称 $A$ 与 $B$ **互斥**. 其意义为 $A$、$B$ 不可能同时发生. 对一随机试验来说，基本事件是两两互不相容的.

(4)事件的并

$A\cup B$ 称为事件 $A$ 与 $B$ 的**并**. $A\cup B$ 表示事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生的事件. 特别当 $A$ 与 $B$ 互不相容时，$A\cup B$ 也记为 $A+B$.(此时也称为 $A$ 与 $B$ 的**和**. 见图 1.4.)

事件的交与并可自然地推广到有限多个或可列无限多个事件的情形，分别记作

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k,$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k,$$

和

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

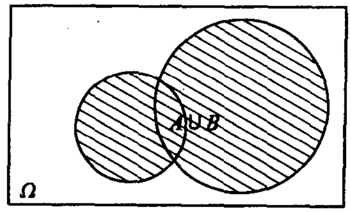


图 1.4

后两式当 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容时，也记作 $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

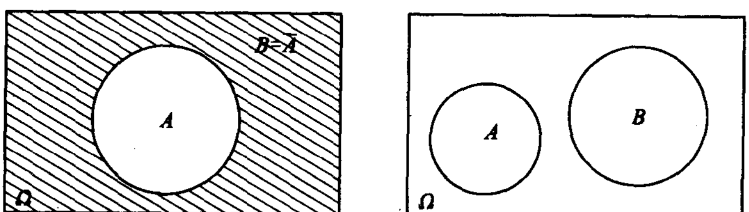
有了事件的交和并后，我们可以定义两个事件的对立关系.

如果两个事件 $A,B$ 满足条件

$$A\cup B=\Omega,\quad AB=\varnothing$$

则称 $A$ 与 $B$ 互为**对立事件**，记作 $B=\overline{A}$，$\overline{A}$ 也称为 $A$ 不发生的事件.

对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件(图 1.5).



$B=\overline{A}=\Omega-A$
(1)

$A$ 与 $B$ 互斥
(2)

图 1.5

(5)事件的差

$A-B$ 称作 $A$ 与 $B$ 的**差**. $A-B$ 发生当且仅当 $A$ 发生而 $B$ 不发生(阴影部分，见图 1.6).

对立事件也可以用差来表示(图 1.5(1)).

$$\overline{A}=\Omega-A, \tag{1.1}$$

$A$ 与 $B$ 的差又可表示为

$$A-B=A-AB=A\overline{B} \tag{1.2}$$

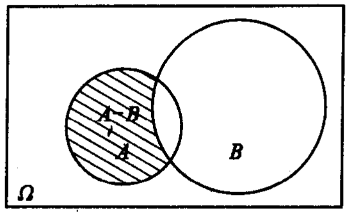


图 1.6

根据集合的运算性质,可知事件的交、并、差等运算满足下列运算律.

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$; (1.3)

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$; (1.4)

(3)分配律:$(A\cup B)C=AC\cup BC,(A\cap B)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$; (1.5)

(4)对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B},\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$. (1.6)

对偶律也称为**德·摩根**(De Morgan)**律**,将其推广到有限个、可列无限多个事件的情形,即

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\quad \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k};$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}.$$

**【例 1.1.6】** 在例 1.1.2 中,我们以 $A$ 表示事件:第一次出现正面;$B$ 表示事件:第二次出现正面;$C$ 表示:至少出现一次正面;则 $C=A\cup B$. $AB=\{\omega\omega\}$则表示事件:两次都出现正面. 以 $D$ 表示事件:两次都出现反面,则$D=\overline{C}=\overline{A}\ \overline{B}$,这里,$\overline{A}$ 表示:第一次出现反面,$\overline{A}=\{\overline{\omega}\omega,\overline{\omega}\overline{\omega}\}$;$\overline{B}$ 表示:第二次出现反面,$\overline{B}=\{\omega\overline{\omega},\overline{\omega}\overline{\omega}\}$.

**【例 1.1.7】** 设 $A,B,C$ 是三个随机事件,则:

(1)三个事件都发生表示为 $ABC$;

(2)$A$ 发生而 $B$ 与 $C$ 都不发生可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$;

(3)$A,B$ 都发生而 $C$ 不发生可以表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$;

(4)$A,B,C$ 恰有一个发生可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$;

(5)$A,B,C$ 恰有两个发生可以表示为 $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

(6)三个事件中至少有一个发生的事件可以表示为 $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\ \overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$;

(7)三个事件都不发生的事件可以表示为$\overline{A\cup B\cup C}$或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

注意在(4)、(5)、(6)中组成和式的各事件都是两两互不相容的.

**【例 1.1.8】** 化简:

(1)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})$;(2)$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$.

**解**:(1)由式(1.5)得

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=A\cup(B\overline{B})=A\cup\varnothing=A;$$

$$(2)(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)=A(\overline{A}\cup B)=A\overline{A}\cup AB=\varnothing\cup AB=AB.$$

**练习 1.4** 掷两颗骰子，记录每次掷出的点数，写出这个试验的样本空间 $\Omega$. 并记 $A$：两颗骰子出现的点数相等；$B$：两颗骰子点数之和不大于 6. 写出 $A,B$ 所包含的样本点.

**练习 1.5** 某射手向同一目标射击 3 次，令 $A_i$：第 $i$ 次射击命中目标，$i=1,2,3$；$B_j$：三次射击恰命中 $j$ 次，$j=0,1,2,3$. 试用 $A_1,A_2,A_3$ 表示 $B_j$，$j=0,1,2,3$.

**练习 1.6** 化简：

(1)$(A-B)\cup A$；(2)$(A-B)\cup B$；(3)$(A-B)A$；(4)$(A-B)B$.

**练习 1.7** 若事件 $A,B,C$ 满足 $ABC=\varnothing$，能否断定 $A,B,C$ 两两互不相容？

# §1.2 概率的定义

## 1.2.1 随机事件的频率

在生产实际中，我们经常需要了解一些随机事件发生的可能性大小. 例如，根据工厂中各部门的机器设备发生故障的可能性大小，可以合理地制定生产计划，适当地配备管理和维修人员. 又如，为了安排打字机、计算机键盘上每一个字母键的位置，人们需要知道每一个英文字母的使用率. 在概率论中，概率是用来衡量随机事件发生的可能性大小的数. 常用 $P(A)$ 表示随机事件 $A$ 的概率.

概率的直观背景是频率，为了给出概率的定义，我们首先给出频率的定义，并讨论频率的性质.

**定义 1.1** 设 $E$ 为随机试验，将 $E$ 重复 $n$ 次，$N_n(A)$ 表示 $n$ 次试验中事件 $A$ 出现的次数，称此值

$$f_n(A)=\frac{N_n(A)}{n}$$

为在这 $n$ 次试验中事件 $A$ 发生的**频率**(frequency).

需要说明的是，对于不大的 $n$，随机事件 $A$ 发生的频率可能随 $n$ 的不同变化较大，而且，即使是同样的 $n$，这批试验算出的频率和那批试验算出的频率，也可能大不相同.

但对于大量重复试验，随机试验的结果却具有明显的统计规律性.

**【例 1.2.1】** 自某批产品中抽取 $n$ 件产品，检验得正品数 $N_n(A)$ 及抽得正品的频率 $f_n(A)$ 如表 1.1 所示.