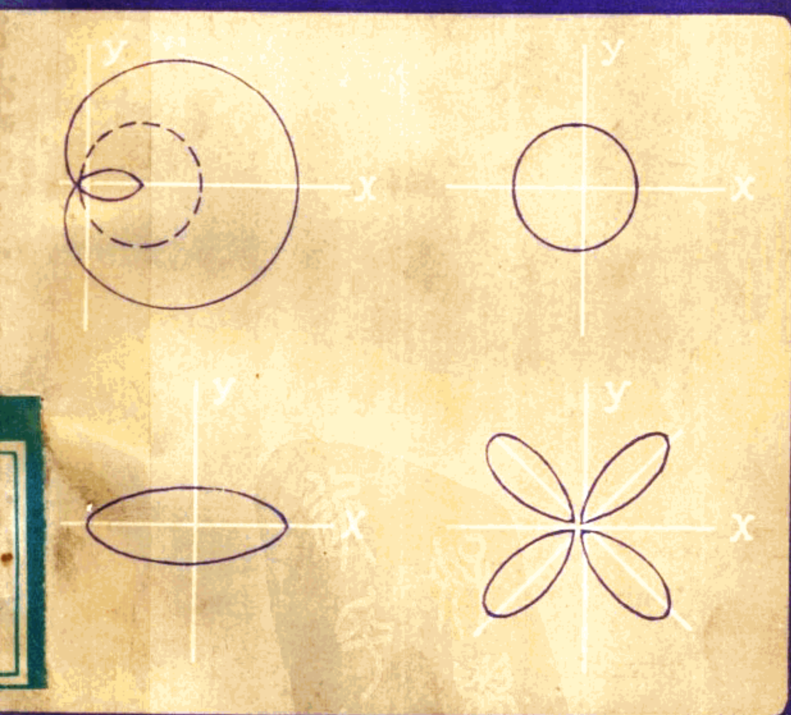
中 学 数 学 自 学 辅 导 教 材

代　　数

第三册

中国科学院心理研究所 卢仲衡 主编



地质出版社

中学数学自学辅导教材

代　　数

课　本

第　三　册

中国科学院心理研究所　卢仲衡　主编
北京海淀区教师进修学校　张士充　审

地　质　出　版　社

与代数第三册练习本
及测验本配套使用

中学数学自学辅导教材

代　　数

第　三　册

中国科学院心理研究所　卢仲衡　主编
北京海淀区教师进修学校　张士充　审
地质矿产部书刊编辑室编辑
责任编辑：张　瑚
地质出版社出版
（北京西四）
沧州地区印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

开本：787×1092 1/32·印张：9·字数：196,000
1983年7月北京第一版·1983年7月北京第一次印刷
印数：1—110,610册　定价：0.80元
统一书号：7038·新97

内 容 简 介

本套教材按照中学数学教学大纲的要求编写，经教育部批准公开出版发行．全套书共包括代数四册、几何两册以及配套使用的练习本和测验本，程度与内容基本和全日制十年制统编教材一致，但富有学习心理学特点，便于自学，并能激发学习者的兴趣和自信心．1965年开始实验，经多次修订，现已在全国二十二个省市的部分中学推广实验，在培养学生自学能力、形成自学习惯和自学能力迁移方面的效果显著．本教材可作为正式中学的实验课本，也可以在没有教师指导的情况下用于自学，是同年级学生课外阅读和在职青年、干部等自学的良好读物，同时，对中学数学教师和教研人员亦有一定的参考价值．

前　　言

一、数学自学辅导实验教材是1965年由中国科学院心理研究所卢仲衡根据人民教育出版社课本内容，贯彻九条有效的学习心理学原则并结合我国优秀教师的教学经验，首次编写出的一种自学教材。开始，这套教材每册有三个本子，一是课本，一是留有空白让学生做题的练习本，一是答案本，当时曾称“三本”教学（现在已把答案本附在课本后面，增加了一个小测验本，即没有答案的练习题本）。1966 年初在北京市女六中和西四中学与正常教学班级进行对比实验，效果略优于对比班，学生的学习时间比对比班缩短四分之一以上。后由于“文化大革命”实验被迫停止。1973年至1974年重新在北京一七二中和三中进行实验，在这连续一年半的实验中，不仅获得与1966年实验的同样效果，而且学习者自学能力成长的速度比对比班快多了，但是在“四人帮”的干扰破坏下，无法深入研究下去。1978年以来，在上级领导和各方面的支持下，我们又恢复并逐步扩大了实验，已经在全国十八个省市的一百多个班进行实验。从 1982 年下半年开始在全国二十二省市的部分中学进行实验。绝大多数实验班的学生，在学业成绩、自学能力成长和自学能力迁移上都取得了良好的效果，一些实验班的学生初步显示出各学科全面发展的优越性。

二、使用这套教材做实验时，教师启发、指导、提问和小结等平均每课时约占10分钟左右，这些活动都是在开始上

课时或在下课前进行的，中间约有35分钟让学生集中精力粗、细、精地认真阅读课本内容，接着做练习和对答案，中间不打断学生的思路，以便快者快学，慢者慢学。学生学完老师规定的进度之后，可以自学参考书或人教社编的课本。在学生自学时，老师可以巡迴视察学生的学习情况并辅导差生。学生做练习时，应在做完一大题所包含的全部小题以后再对答案，而不要做一小题就对答案，以免造成思维步子过小，影响思维能力的成长，但也不要全部做完一个练习才对答案，这样会出现连锁性的错误（具有较好的数学才能的学生可以做完一个练习才对答案）。本套教材的使用方法详见《教育研究》1982年第11期“怎样进行自学辅导教学实验”一文。

三、为了便于老师和学习者检查对自学教材的掌握程度如何，每学完一个小单元（几个练习）之后，就有一个小测验，测验题单独装订成册，由教师掌握。小测验是没有答案的，做完后交老师批改；个人自学的，可以互改或找高年级的学生帮助批改。每个小测验题几乎都包含概念题、基本题、变式题和思考题（教师可以根据具体情况来增删），这样可以全面了解自学者掌握知识和思维能力发展的情况。教师对小测验题要认真地详细批改。如果有较多学生没有掌握某类型题或出现较多错误的话，老师可以进行复习性的讲述，务须使绝大多数学习者切实弄懂为止；个别学习者出现错误，则可在课上或课下进行个别辅导，不必进行全班讲述，以免影响大多数学生的宝贵时间。

四、这套中学数学自学辅导教材是参照人教社编的数学课本，经过改写、重写而成，由卢仲衡、宋同莘、李翼忠、段惠若编写。本套教材曾请李翼忠、严以诚、高书元、孙嘉谟等同志提过宝贵意见，冯丽华、吴琼给予大力协助，特此

致谢。由于水平所限，错误之处定然不少，请批评指正。

中国科学院心理研究所
数学自学辅导教学实验组

1982年7月

目　　录

第九章　数的开方和二次根式 ……1
一、数的开方 ……1
9.1 平方根 ……1
9.2 平方根表 ……10
9.3 立方根 ……14
9.4 立方根表 ……17
9.5 无理数 ……19
9.6 实数 ……20
二、二次根式 ……25
9.7 二次根式 ……26
9.8 二次根式的性质 ……27
9.9 最简二次根式和同类根式 ……38
9.10 二次根式的加减 ……42
9.11 二次根式的乘除 ……46
9.12 分母有理化 ……52
9.13 $a \pm 2\sqrt{b}$的算术平方根 ……60
9.14 小结 ……61
9.15 附录　平方根的笔算求法 ……63
第十章　一元二次方程 ……72
一、一元二次方程 ……72
10.1 一元二次方程 ……72
10.2 一元二次方程的解法 ……74
10.3 一元二次方程的根的判别式 ……91
10.4 一元二次方程的应用题 ……94

10.5 一元二次方程的根与系数的关系 ……93
二、可化为一元二次方程的方程 …… 109
10.6 简单的高次方程 …… 109
10.7 分式方程 …… 111
10.8 根式方程（无理方程）…… 116
三、简单的二元二次方程组 …… 123
10.9 二元二次方程和二元二次方程组 …… 123
10.10 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组 …… 124
10.11 由两个二元二次方程组成的方程组 …… 125
10.12 小结 …… 133
第十一章 指数和常用对数 …… 137
一、指数 …… 137
11.1 正整数指数幂的意义 …… 137
11.2 零指数和负整数指数 …… 139
11.3 分数指数 …… 150
二、常用对数 …… 171
11.3 对数 …… 171
11.4 积、商、幂、方根的对数 …… 177
11.5 常用对数 …… 184
11.6 常用对数的首数和尾数 …… 187
11.7 对数表 …… 190
11.8 反对数表 …… 194
11.9 利用对数进行计算 …… 198
11.10 小结 …… 204
练习题答案
第九章 …… 207
第十章 …… 236
第十一章 …… 262

第九章　数的开方和二次根式

一、数 的 开 方

9.1　平方根

在代数第一册和第二册里，你们已经学会了有理数的加法和减法、乘法和除法，这两对互逆的运算以及乘方的运算．这一章要讲乘方的逆运算，即开方的运算；乘方运算的结果——幂；开方运算的结果——方根．开平方是开方的最简单的一种，平方根是方根的最简单的一种．

在生产实践中常常会遇到开方的运算．

例如一块正方形钢板边长是 3 分米，求它的面积就要用乘方运算，即$3\times3=3^2=9$（平方分米）．反过来，要截一块面积是 9 平方分米的正方形钢板，要求这正方形的边长．设这个正方形边长为 x 分米，这就是求一个数 x，使得 $x^2=9$．我们知道$3^2=9$，$(-3)^2=9$，所以 $x=\pm3$．这±3 叫做 9 的**平方根或二次方根**．因为正方形的边长不能为负数，所以所求的边长是$+3$分米．

一般地说，如果一个数的平方等于a，即 $x^2=a$，那么这个数就叫做**a的平方根**，也叫做**a的二次方根**．

例如　$\because\ \left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，$\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，

$$\therefore\ \frac{9}{25}\text{的平方根有两个：}\frac{3}{5}\text{和}-\frac{3}{5}.$$

由此可知，正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数。

因为，$0^2=0$，所以，**零的平方根是零。**

（翻开练习本做练习一）

通过前面的学习和练习，平方根的意义你是清楚了，求一个数的平方根（二次方根）的运算叫做**开平方**。

根据平方根的意义，也可知道开平方和平方互为逆运算．根据这种互逆的运算关系，我们常常可以用平方的关系来解决开平方的问题，或者用平方来检验开平方的结果是否正确．

例如　已知$15^2=225$，$(-15)^2=225$，求225的平方根．

解：　根据平方根的意义，由平方关系$15^2=225$，$(-15)^2=225$，知225的平方根是15和-15．

又如，检验4和-4是不是16的平方根？

解：$\because$　$4^2=16$，$(-4)^2=16$，

$\therefore$　4和-4都是16的平方根．

为了方便，任何一种运算都要用运算符号来表示．平方根可以用符号$\sqrt[2]{\ }$来表示．一个正数a的正的平方根，用“$+\sqrt[2]{a}$”表示（“+”号可省略）；一个正数a的负的平方根，用“$-\sqrt[2]{a}$”表示（“$-$”号不能省略）．这两个平方根合起来可以记做“$\pm\sqrt[2]{a}$”．a叫做**被开方数**，2叫做**根指数**，根指数2通常省略不写．如$\pm\sqrt[2]{a}$写做$\pm\sqrt{a}$读作“正、负根号a”．例如9的平方根，要写成$\sqrt{9}$和$-\sqrt{9}$，不必写成$\sqrt[2]{9}$和$-\sqrt[2]{9}$．以后学到根指数不是2的时候，根指数决不能省略．

例 1　求下列各数的平方根：

（1）81；（2）$\frac{49}{121}$；（3）$3\frac{22}{49}$；（4）0.0064.

解：（1）$\because (\pm 9)^2=81$，

$\therefore$ 81的平方根是± 9，即

$\pm\sqrt{81}=\pm 9$；

（2）$\because \left(\pm\frac{7}{11}\right)^2=\frac{49}{121}$，

$\therefore \frac{49}{121}$的平方根是$\pm\frac{7}{11}$，即

$\pm\sqrt{\frac{49}{121}}=\pm\frac{7}{11}$；

（3）$\because 3\frac{22}{49}=\frac{169}{49}$，$\left(\pm\frac{13}{7}\right)^2=\frac{169}{49}$，

$\therefore \frac{169}{49}$的平方根是$\pm\frac{13}{7}$，即

$\pm\sqrt{\frac{169}{49}}=\pm\frac{13}{7}$；

（4）$\because (\pm 0.08)^2=0.0064$，

$\therefore$ 0.0064的平方根是± 0.08，即

$\pm\sqrt{0.0064}=\pm 0.08$.

从这些例题再一次看到一个正数的平方根一定有两个，而且它们是互为相反数。

因为正数、负数的平方都是正数，零的平方是零。所以负数没有平方根。

（翻开练习本做练习二）

我们已经知道正数的两个平方根互为相反数，并且用$\sqrt{a}$表示a的一个正的平方根，用$-\sqrt{a}$表示a的一个负的

平方根．很明显，如果求得正的平方根$\sqrt{a}$，则立刻可以求得负的平方根．例如求得$\sqrt{81}=9$，立刻可以求得$-\sqrt{81}=-9$．也就是说，通过求正数的正的平方根，就可以求出负的平方根．所以我们要特别研究正数的正的平方根．因此，做出规定：

正数a的正的平方根，也叫做a的算术平方根（简称算术根）．记作$\sqrt{a}$．例如$\sqrt{49}=7$，$\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$等．又因为规定零的算术根仍旧是零，即$\sqrt{0}=0$．所以也可以这样给算术平方根下定义：非负数$a$的非负平方根叫做$a$的算术平方根．

这样规定以后，只要求出一个正数的算术平方根，就可直接写出它的两个平方根来．例如$\sqrt{9}=3$，那么9的平方根就是$\pm\sqrt{9}=\pm 3$．$+3$是正数，它是9的算术平方根；而-3是负数，它虽是9的平方根，但不是9的算术平方根．

从算术根的意义可知道，算术根必须满足以下两个条件：

（1）被开方数必须是正数或零，如$\sqrt{a}$中$a\geqslant 0$；

（2）平方根的值也必须取正数或零，如$\sqrt{a}\geqslant 0$．

再一次提醒注意：因为负数没有平方根，所以$\sqrt{a}$中的被开方数a一定要大于或等于零，即$a\geqslant 0$．

例 2 求下列各数的算术平方根：

$$（1）36；（2）\frac{64}{81}；（3）2\frac{7}{9}；（4）0.0004.$$

解：（1）$\because 6^2=36$，

$\therefore 36$的算术平方根是6，

即 $\sqrt{36}=6$；

（2）$\because \left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$，$\therefore \sqrt{\frac{64}{81}}=\frac{8}{9}$；

（3）$\because\ 2\frac{7}{9}=\frac{25}{9}$，$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$，$\therefore \sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$；

（4）$\because\ (0.02)^2=0.0004$，

$\therefore \sqrt{0.0004}=0.02$.

（翻开练习本做练习三）

例 3 求下列各式的值：

（1）$\sqrt{10000}$；（2）$-\sqrt{0.01}$；（3）$\pm\sqrt{169}$；

（4）$-\sqrt{\frac{9}{25}}$；（5）$\sqrt{\frac{121}{144}}$；（6）$\pm\sqrt{\frac{64}{81}}$.

解：（1）$\because 100^2=10000$，$\therefore \sqrt{10000}=100$；

（2）$\because 0.1^2=0.01$，$\therefore -\sqrt{0.01}=-0.1$；

（3）$\because 13^2=169$，$\therefore \pm\sqrt{169}=\pm 13$；

（4）$\because \left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$，$\therefore -\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$；

（5）$\because \left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{121}{144}$，$\therefore \sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{11}{12}$；

（6）$\because \left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{64}{81}$，$\therefore \pm\sqrt{\frac{64}{81}}=\pm\frac{8}{9}$.

例 4 下列各式中的被开方数是正数还是负数？

（1）$\sqrt{(-3)^2}$；（2）$\sqrt{(-1.1)^2}$；

（3）$\sqrt{(-5)^2}$；（4）$\sqrt{(-3)(-12)}$.

解：（1）$\because\ (-3)^2=9$，$\therefore \sqrt{(-3)^2}$中被开方数是正数；

（2）$\because\ (-1.1)^2=1.21$，$\therefore \sqrt{(-1.1)^2}$中被开方

数是正数；

（3）$\because (-5)^2=25$，$\therefore \sqrt{(-5)^2}$中被开方数是正数；

（4）$\because (-3)(-12)=36$，$\therefore \sqrt{(-3)(-12)}$中被开方数是正数。

例 5 （1）$\sqrt{9^2}$是不是等于9？（2）$\sqrt{(-9)^2}$是不是等于-9？

解：（1）$\because \sqrt{9^2}=\sqrt{81}$，$\sqrt{81}$表示81的算术平方根，$\therefore \sqrt{9^2}=9$。

（2）$\because \sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}$，$\sqrt{81}$表示81的算术平方根是正数，而$-9$是负数，不是算术平方根，$\therefore \sqrt{(-9)^2}\neq -9$。

从例5可以看出，一般来说，当a是正数，即$a>0$时，$\sqrt{a^2}=a$，如例5中的（1）题，$a=9$，9是正数，$\therefore \sqrt{9^2}=9$。又当$a<0$时，$\sqrt{a^2}\neq a$，如例5中的（2）题，$a=-9$，-9是负数，$\therefore \sqrt{(-9)^2}\neq -9$，而应该等于$-9$的相反数$-(-9)=9$，$\therefore \sqrt{(-9)^2}=-(-9)$。所以一般来说，当$a<0$时，$\sqrt{a^2}=-a$，设$a=-2$，则$\sqrt{(-2)^2}=-(-2)$。此外，因为$\sqrt{0^2}=\sqrt{0}=0$，$\therefore$当$a=0$时，$\sqrt{a^2}=a$也成立。综合起来，得到下面结果：

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & （当 a\geqslant 0 时）， \\ -a & （当 a<0 时）。\end{cases}$$

注意：当$a<0$时，$-a>0$。

（翻开练习本做练习四）

在练习四的第4题的（4）、（5）、（6）、（7）小题中，你答对了吗？$(\sqrt{a})^2=?$ 与$\sqrt{a^2}=?$ 是两个不同的公式。

公式Ⅰ：$(\sqrt{a})^2=a$ （$a\geqslant 0$）。

这就是说：a 开平方后再乘方，如果 a 是非负数（a 是正数或零），那么平方根（开平方运算的结果）是非负数，非负数的乘方自然是非负数；如果 a 是负数（$a<0$），那么负数没有平方根，也就不能再乘方了，即是说，负数开平方是没有意义的。

$$\text{公式Ⅱ：}\sqrt{a^2}=|\underset{\smile}{a}|=\begin{cases}a(a>0).\\0(a=0).\\-a\ (a<0).\end{cases}$$

这就是说：a乘方后再开平方，如果a是非负数（a 是正数或零），那么平方根（开平方运算的结果）就是算术平方根，即 $|a|=a$ 或 0；如果 a 是负数（$a<0$）时，$\sqrt{a^2}$不等 a，而等于a的相反数$-a$，即 $|a|=-a$。用$a=-5$代入，得$\sqrt{(-5)^2}=|a|=-(-5)=5$。过去学习有理数的绝对值时就知道，**正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数**。即当$a>0$时，$|a|=a$；当$a=0$时，$|a|=0$；当 $|a|<0$时，$|a|=-a$。

例如　当 $a=9$ 时，$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{9})^2=9$　①

$\sqrt{a^2}=\sqrt{9^2}=|9|=9$　②

当 $a=-9$ 时，$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{-9})^2$，负数开平方没有意义。　③

$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-9)^2}=|-9|$
$=-(-9)=9$　④

比较①或和②式可以看出，当 a 是非负数时，公式Ⅰ和Ⅱ的演算结果虽然相同，但是过程不同；比较③式和④式可以看出，当 a 是负数时，公式③和④不仅演算过程不同，结果也不同。对这两个公式一定要好好弄懂它，以免将来出错误：

例 6 求下列各式的值：

（1）$(\sqrt{4})^2$；（2）$\sqrt{4^2}$；（3）$(\sqrt{16})^2$；

（4）$\sqrt{16^2}$；（5）$\sqrt{(-3)^2}$；（6）$\sqrt{0^2}$。

解：（1）$(\sqrt{4})^2=4$；（2）$\sqrt{4^2}=|\underset{\smile}{4}|=4$；

（3）$(\sqrt{16})^2=16$；（4）$\sqrt{16^2}=|\underset{\smile}{16}|=16$；

（5）$\sqrt{(-3)^2}=|\underset{\smile}{-3}|=-(-3)=3$；

（6）$\sqrt{0^2}=|0|=0$。

例 7 说明下列各式，哪个有意义？哪个无意义？

（1）$(\sqrt{-9})^2$；

解：∵负数没有平方根，-9是负数，∴$\sqrt{-9}$无意义。

因此，$(\sqrt{-9})^2$也无意义。

（2）$\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2$.

解：非负数开平方有意义，$\frac{1}{9}$是非负数，∴$\sqrt{\frac{1}{9}}$有意义。因此，$\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^2$有意义.

注意：在求a^2的算术平方根时，写出$\sqrt{a^2}=|\underset{\smile}{a}|$中带有$\smile$的一步是很有好处的. 如果$a$是正数或零，绝对值就是它本身，就是$\sqrt{a^2}=|a|=a$；如果$a$是负数，绝对值就是它的相反数，即$\sqrt{a^2}=|a|=-a$，只有这样才有可能不出错误或少出错误。

（翻开练习本做练习五）

例 8 就下列情况，求$\sqrt{(a-3)^2}$的值：

（1）$a>3$；（2）$a=3$；（3）$a<3$。

解：∵$\sqrt{(a-3)^2}=|a-3|$，