数学题解

HUXUETIJIE 2

出 版 说 明

为在本世纪内实现四个现代化，迅速培养和造就大批又红又专的迠设人材的需要，我们将陆续出版一套《中学生课外读物》。

这套读物包括数学、物理、化学、语文、历史、地理等基础知识和典型题解约三十余种。这本《数学题解》(二)就是其中的一种。

本书以全国统编中学数学教学大纲为基础，适当扩大了知识范围，继《数学题解》（一）后，又按直线形、元、相似形、直线与平百、多百体与旋转体、数列、排列组合、数学归纳法、二项式定理、复数、直角坐标与直线方程、曲线与方程、二次曲线、坐标变换、极坐标与参数方程等卩分，编选解答了 344 个典型题（总题号 354—697）。

本书有助于提高读者的分析问题和解决问题的能力，可供中学生、知识专年自学之用，也可供中、小学教师学习参考。

目　录

十六、直 线 形

354. 在$\triangle ABC$的边BC的延长线上取$CD=CA$，F为AD的中点，则CF垂直于$\angle ACB$的平分线.

已知 $\triangle ABC$，$CD=CA$，F为AD的中点，CE平分$\angle ACB$（图 59）.

求证 $CF\perp CE$.

证 由已知CE平分$\angle ACB$，CF为等腰$\triangle ACD$的底边AD的中线，也是顶角ACD的平分线.

而 $\angle ACB+\angle ACD=180^\circ$（互补）

$\therefore$ $\angle ECF=\dfrac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=90^\circ$

$\therefore$ $CF\perp CE$.

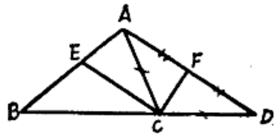

图 59

355. 在正方形$ABCD$的CD边上任取一点E，延长BC到F，使$CF=CE$，则$BE\perp DF$.

已知 正方形$ABCD$中，E为CD上任一点，$CF=CE$(图 60).

求证 $BE\perp DF$.

证 由图可知$\triangle BCE$与$\triangle DCF$均为直角三角形.

$\because$ $CF=CE$，$BC=CD$

$\therefore \quad \triangle BCE \cong \triangle DCF$

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$

延长 BE 交 DF 于 G，有

$\angle 3 = \angle 4$，

$\angle 2$，$\angle 4$ 为直角$\triangle BCE$ 的两个锐角，$\therefore \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$

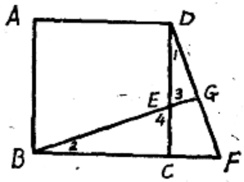

图 60

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$

在 $\triangle DGE$ 中

$$\angle DGE = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$\therefore \quad BE \perp DF$。

356. 在 $\triangle ABC$ 中，AB、AC 的高分别为 BE、CF，EF、BC 的中点分别为 M、N，则 $MN \perp EF$。

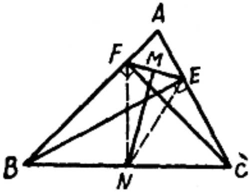

图 61

已知 $\triangle ABC$中，$BE \perp AC$，$CF \perp AB$，EF、BC 的中点分别为 M、N（图 61）。

求证 $MN \perp EF$。

证 连 EN、FN，则在直角$\triangle BEC$ 中，有 $EN = \frac{1}{2}BC$（斜边上的中线等于斜边之半）。

同理有 $\quad FN = \frac{1}{2}BC$

$\therefore \quad EN = FN$

即 $\triangle NEF$ 为等腰三角形。

而 M 又为 EF 的中点

$\therefore \quad MN \perp EF$。

357. 在$\triangle ABC$中，AF、AG分别垂直于$\angle B$、$\angle C$的平分线BD、EC，则$GF\parallel BC$。

已知 $\triangle ABC$中，BD平分$\angle B$，EC平分$\angle C$，$AG\perp EC$，$AF\perp BD$（图 62）。

求证 $GF\parallel BC$。

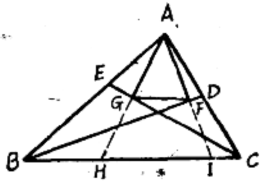

图 62

证 延长AG、AF，分别交BC于H、I，由题设BD、EC分别为$\angle B$、$\angle C$之平分线，$AG\perp EC$，$AF\perp BD$知

$\triangle ABI$、$\triangle AHC$均为等腰三角形。

$\therefore$ G、F为AH、AI的中点

即 GF为$\triangle AHI$的中位线，故有$GF\parallel HI$，

即 $GF\parallel BC$。

358. **已知** AD、BE、CF是$\triangle ABC$的三条中线，又$FG\parallel BE$，$EG\parallel AB$（图 63）。

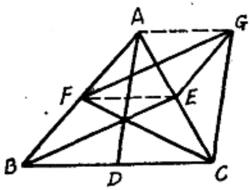

图 63

求证 $AD\parallel GC$。

证 连结FG、EF。

$\because$ $FG\parallel BE$、$EG\parallel AB$

故 $FBEG$是平行四边形。

$\therefore$ $EG\underline{\parallel}BF$，而$BF=AF$，且$BF$与$FA$在一直线上，$\therefore EG\underline{\parallel}AF$

故得$AFEG$是平行四边形，从而有

$AG\underline{\parallel}FE$

但 $FE\underline{\parallel}\frac{1}{2}BC$ 即 $FE\underline{\parallel}DC$

$\therefore$ $AG\underline{\parallel}DC$

由此可知 $ADCG$是平行四边形。

$\therefore\ AD /\!/ GC$.

359. **已知** AC、BD 是 $\square ABCD$ 的对角线，$AK \perp BD$，$CM \perp BD$，$BL \perp AC$，$DN \perp AC$，K、M、L、N 为垂足（图64）。

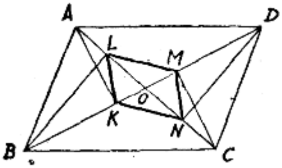

图 64

求证 $KLMN$ 是平行四边形。

证 已知$ABCD$为平行四边形，$\therefore AB=CD$

$\angle ABK=\angle CDM$

已知 $AK \perp BD$，$CM \perp BD$

$\therefore$ 直角 $\triangle AKB \cong$ 直角 $\triangle CMD$

$\therefore\ BK=DM$

又$\because\ BO=DO$

$\therefore\ KO=OM$.

同理有 $LO=ON$

即四边形 $KLMN$ 的对角线互相平分，

故 $KLMN$ 是平行四边形。

360. **已知** 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD \perp AB$，$AE=BE$，CF 平分$\angle C$ $\angle B>\angle A$（图 65）。

求证 (1) $\angle ECF=\angle FCD$；

(2) $\angle DCE=\angle B-\angle A$.

证 (1) 由已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$

$\therefore\ \angle A+\angle B=90°$

但在直角 $\triangle CDB$ 中，

$\angle 2+\angle B=90°$

$\therefore\ \angle A=\angle 2$（同角的余角）

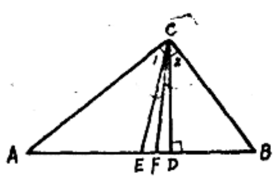

图 65

又∵ $AE=EB=EC$（直角三角形斜边上的中线等于斜边之半）

∴ $\angle A=\angle 1$

$\angle 1=\angle 2$ ①

由已知 CF 为 $\angle ACB$ 的平分线，即

$$\angle ACF=\angle FCB \quad ②$$

②－①得

$$\angle ECF=\angle FCD.$$

(2) ∵ $\angle A+\angle B=90°$，$\angle ACD+\angle A=90°$

∴ $\angle B=\angle ACD$

而 $AE=EB=EC$

∴ $\angle A=\angle 1$

而 $\angle DCE=\angle ACD-\angle 1$

∴ $\angle DCE=\angle B-\angle A.$

361. **已知** 在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，M、N 各是 AB、CD 的中点，延长 AD、MN 交于 E，延长 BC、MN 交于 F（图66）。

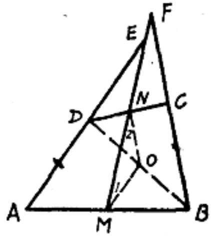

图 66

求证 $\angle AEM=\angle MFB.$

证 连 BD，取 BD 中点 O，连 ON、OM。由已知 M、N 分别是 AB、CD 的中点，故 ON 是 $\triangle DCB$ 的中位线，于是有

$$ON=\frac{1}{2}BC$$

同理 $OM=\frac{1}{2}AD$

由已知　$AD=BC$

∴　$ON=OM$

∴　$\angle 1=\angle 2$

又　$ON // BC$

∴　$\angle 2=\angle MFB$（同位角）

同理　$\angle 1=\angle AEM$

∴　$\angle AEM=\angle BFM$.

362. 已知　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，$\angle ADB$、$\angle ADC$ 的平分线分别交 AB、AC 于 E、F.

求证　$AE=AF$.

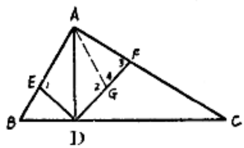

图　67-1

证一　设 $\angle FAD>\angle EAD$，作 $\angle DAG=\angle EAD$(图 67-1)，G 为 FD 上的一点. 易知

$\triangle AED\cong\triangle AGD$

$\angle 1=\angle 2$，$AG=AE$

∵　在四边形 $AEDF$ 中

$\angle EAF=90°$

DE 平分 $\angle ADB$，DF 平分 $\angle ADC$

∴　$\angle EDG=\frac{1}{2}\angle BDC=\frac{1}{2}\cdot 180°=90°$

而　四边形 $AEDF$ 内角和为 $360°$

故　$\angle 1$、$\angle 3$ 互补，但　$\angle 2$、$\angle 4$ 互补，

∴　$\angle 3=\angle 4$

$AG=AF$

∴　$AE=AF$.

证二　由已知 $AD\perp BC$，DE、DF 分别平分 $\angle ADB$、$\angle ADC$（图 67-2）.

$\therefore\quad \angle ADE=45^\circ=\angle CDF$

而 $\angle EAD=90^\circ-\angle B=\angle C$

$\therefore\quad \triangle ADE\backsim\triangle CDF$.

从而得 $\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{CD}{CF}$.

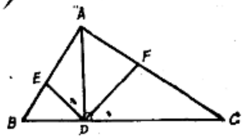

图 67-2

由三角形的角平分线性质，有

$$\frac{CD}{CF}=\frac{AD}{AF}$$

$$\frac{AD}{AE}=\frac{AD}{AF}$$

$\therefore\quad AE=AF$.

证三 由证二知

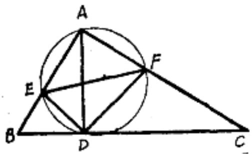

图 67-3

$\angle ADE=45^\circ=\angle ADF$

$\therefore\quad \angle EDF=90^\circ$

而 $\angle EAF=90^\circ$

故以 EF 为直径的元必过 A、D（图 67-3），则

$$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{AF}$$

$\therefore\quad AE=AF$.

363. 以正方形 $ABCD$ 的顶点 D 为元心，边长为半径画元弧 AC，与对角线 BD 交于 P，再以 AD 为直径在正方形内画半元，与 BD 交于 K，由 P 点引 AB 的垂线 PQ，Q 为垂足，则 $PQ=PK$.

已知 正方形 $ABCD$ 中，以 D 为元心的元弧 AC 交 BD 于 P，半元 AD 交 BD 于 K，$PQ\perp AB$(图 68).

求证 $PQ=PK$.

证一 延长 QP 使与 CD 相交于 L，则 $QL\parallel AD$，连 AK，

$\therefore\quad \angle ADK=\angle DPL$（内错角）

又　$AD=PD$（元 D 的半径）

$\therefore\quad \triangle ADK\cong\triangle DPL$

$\therefore\quad KD=PL$

而　$QL-PL=PQ$

　　$PD-KD=PK$

$\therefore\quad PQ=PK$.

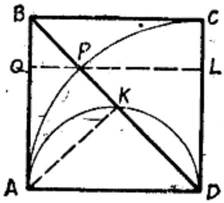

图　68

证二　设正方形 $ABCD$ 的边长为 a，在直角$\triangle AKD$ 中，$\angle ADK=45^\circ$

$$\therefore\quad KD=a\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

而　$PD=AD=a$

$$\therefore\quad PK=PD-KD=a-\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

在直角 $\triangle BQP$ 中，$\angle BPQ=45^\circ$

$$\therefore\quad PQ=BP\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}BP$$

但　$BP=BD-PD=\sqrt{2}a-a$

故有　$PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}a-a)=a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$

从而得　$PQ=PK$.

364. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\angle B$ 的平分线交 AC 于 D，自 A 至 BC 的垂线 AH 交 BD 于 E，自 D 至 BC 的垂线交 BC 于 F. 则 $AE=AD$.

已知　在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，BD 平分$\angle B$，$AH\perp BC$，$DF\perp BC$（图 69）.

求证　$AE=AD$.

证　已知 $AH\perp BC$，$DF\perp BC$，$\therefore AH\parallel DF$.

又　$\angle BAC=90°$

$\therefore$　$\angle BAH$ 与 $\angle C$

均与 $\angle ABH$ 互余

$\therefore$　$\angle BAH=\angle C$

已知 BD 平分 $\angle B$，即

$\angle ABE=\angle DBC$

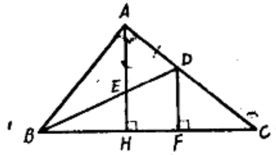

图　69

而　$\angle AED=\angle ABE+\angle BAH$

同理　$\angle ADE=\angle DBC+\angle C$

$\therefore$　$\angle AED=\angle ADE$

即　$\triangle AED$ 为等腰三角形

故　$AE=AD$。

365. 对角线相等的梯形为等腰梯形。

已知　在梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$AC=BD$。

求证　$ABCD$ 为等腰梯形。

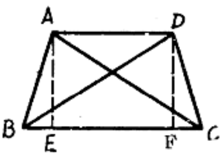

图　70-1

证一　作 $AE\perp BC$，$DF\perp BC$，E、F 为垂足（图 70-1）。由已知 $AD//BC$，

$\therefore$　$AE=DF$

又　$AC=BD$　　①

$\therefore$　直角 $\triangle AEC\cong$ 直角 $\triangle DFB$

$\therefore$　$\angle ACB=\angle DBC$　　②

由①、②，又 BC 边公用

$\therefore$　$\triangle ABC\cong\triangle BCD$

$\therefore$　$AB=CD$

故　$ABCD$ 为等腰梯形。

证二　过 D 作 $DE//AC$ 且交 BC 延长线于 E（图 70-2）。已知 $AD//BC$，$\therefore$ 四边形 $ACED$ 为平行四边形。

$\therefore \quad DE = AC$.

由已知 $AC = BD$，故 $DE = BD$，$\angle 2 = \angle E$

但 $\angle 1 = \angle E$（同位角）

$\therefore \quad \angle 1 = \angle 2$；又 BC 公用

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle BCD$

$\therefore \quad AB = CD$

故 $ABCD$ 为等腰梯形。

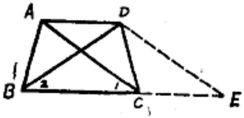

图 70-2

证三 依次取 AB、BC、CD 的中点 E、F、G，连 EF、FG、EG，则 EF 为 $\triangle ABC$ 的中位线（图 70-3）。

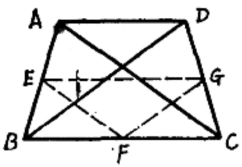

图 70-3

$\therefore \quad EF = \frac{1}{2}AC$

同理有 $GF = \frac{1}{2}BD$

由已知 $AC = BD$，$\therefore \quad EF = GF$

$\therefore \quad \angle FEG = \angle FGE$（等腰三角形底角相等）

$\because \quad E$、G 为 AB、CD 的中点，

$\therefore \quad EG \parallel BC$

从而 $\angle BFE = \angle FEG$（内错角）

同理有 $\angle CFG = \angle FGE$

F 为 BC 的中点，$BF = FC$

$\therefore \quad \triangle BEF \cong \triangle CGF$

$BE = CG$

从而有 $AB = CD$

故 $ABCD$ 为等腰梯形。

366. 已知 E 是正方形 $ABCD$ 内卜一点，$\angle ECD=\angle EDC=15°$。

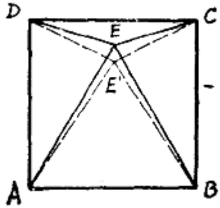

图 71-1

求证 $\triangle EAB$ 是等边三角形。

证一 在正方形 $ABCD$ 内作等边三角形 $E'AB$，连 $E'C$、$E'D$（图 71-1）。$\because AE'=AD$，$\triangle ADE'$ 显然是一个等腰三角形，其

顶角 $\angle DAE'=90°-60°=30°$

$$\text{底角}\angle ADE'=90°-\frac{1}{2}\angle DAE=90°-15°=75°$$

$$\angle E'DC=90°-75°=15°$$

同理 $\angle E'CD=15°$

由此可见，E' 与 E 实际上就是同一点，所以 $\triangle EAB$ 是等边三角形。

证二 设正方形的边长为 a，由已知 $\angle ECD=\angle EDC$，故 $\triangle EDC$ 为等腰三角形。

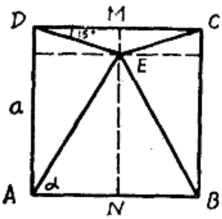

图 71-2

过 E 作 $EM\perp CD$，M 为垂足，则 M 为 CD 的中点；延长 ME 交 AB 于 N，则 $EN\perp AB$，且 N 为 AB 之中点（图 71-2）。

在直角 $\triangle DEM$ 中

$$EM=DM\,\mathrm{tg}\,EDM=\frac{a}{2}\mathrm{tg}\,15°=\frac{a}{2}\cdot\frac{1-\cos 30°}{\sin 30°}$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$EN=a-EM=a-a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=a\left(1-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

在直角 $\triangle ANE$ 中，$AN=\frac{a}{2}$

$$\operatorname{tg} EAN=\frac{EN}{AN}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\Big/\frac{a}{2}=\sqrt{3}$$

$\therefore\ \angle EAN=60^\circ$

前面说过 EN 为 AB 之垂直平分线，故 $EA=EB$。

$\therefore\ \triangle EAB$ 为等边三角形.

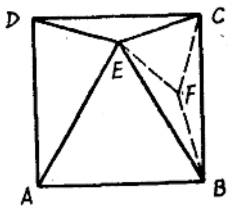

图 71-3

证三 由已知 $\angle ECD=\angle EDC=15^\circ$

$\therefore\ \triangle EDC$ 为等腰三角形.

作 $\triangle FBC\cong\triangle EDC$(图 71-3)，

则 $EC=FC$,

$\angle ECD=\angle FCB=15^\circ$

由已知 $ABCD$ 为正方形，$\angle C=90^\circ$

$\therefore\ \angle ECF=90^\circ-15^\circ-15^\circ=60^\circ$

$\triangle EFC$ 为等边三角形

即 $EF=FB$

而 $\angle EFB=360^\circ-\angle BFC-\angle EFC$

$=360^\circ-150^\circ-60^\circ=150^\circ$

$\therefore\ \triangle FCB\cong\triangle FEB$

从而 $BE=BC$，又 $BC=AB$

$\therefore\ BE=AB$，同理 $AE=AB$

$\therefore\ \triangle ABE$ 为等边三角形.

367. **已知** 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC>\angle BCD$，$AB=CD$（图 72）。

求证 $\angle ADC>\angle BAD$。

证 连 AC、BD，则在 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$ 中，$AB=CD$，$BC=BC$，

$$\angle ABC>\angle BCD$$

$\therefore\quad AC>BD$

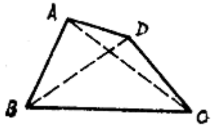

图 72

又在 $\triangle ACD$、$\triangle ABD$ 中，

$$CD=AB,\ AD=AD,$$

$\therefore\quad \angle ADC>\angle BAD$。

368. **已知** 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 被点 M、N 三等分。

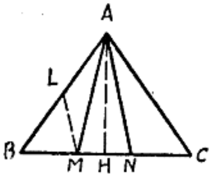

图 73-1

求证 $\angle MAN>\angle BAM$，$\angle MAN>\angle CAN$。

证一 引 $AH\perp BC$，H 为垂足（图 73-1）。$\because CH>NH$，$\therefore AC>AN$，但 $AC=AB$

$\therefore\quad AB>AN$

取 AB 的中点 L，连 ML，则 $LM\parallel AN$，$\therefore \angle LMA=\angle MAN$，$LM=\frac{1}{2}AN$，而 $AL=\frac{1}{2}AB$

$\therefore\quad AL>LM$

$\therefore\quad \angle LMA>\angle LAM$

从而有 $\angle MAN>\angle BAM$

同理可证 $\angle MAN>\angle CAN$。

证二 延长 AM 至 D，使 $MD=AM$，连 DB、DN（图 73-2）。由于四边形 $ABDN$ 对角线互相平分，故 $ABDN$ 为

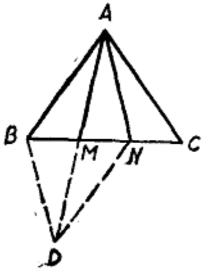

图 73-2

平行四边形，于是得 $BD=AN$。

由证一知 $AB>AN$，于是在 $\triangle ABD$ 中有 $AB>BD$ $\therefore \angle BDA>\angle BAM$

但 $\angle MAN=\angle BDA$

$\therefore$ $\angle MAN>\angle BAM$

同理可证 $\angle MAN>\angle CAN$。

369. 已知 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2AC$。

求证 (1) $\angle ABC$ 为 $\triangle ABC$ 中的最小角；

(2) $\angle ACB>2\angle ABC$。

证 (1) $\because AC+CB>AB$，由已知 $AB=2AC$，

$\therefore$ $BC>AB-AC=AC$

显然有 $AB>AC$

故 $\angle ABC$ 为 $\triangle ABC$ 中的最小角。

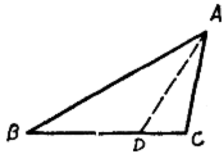

图 74-1

(2) **证一** 上面已证明了

$$\angle ABC<\angle BAC$$

因此我们可以过 A 点引 AD 交 BC 于 D（图 74-1），使

$$\angle BAD=\angle ABC$$

在 $\triangle ABD$ 中，$AD+BD>AB$，但 $AD=BD$，由已知 $AB=2AC$

$$\therefore \quad AD>\frac{AB}{2}=AC$$

$\therefore$ $\angle ACB>\angle ADC$

而 $\angle ADC=2\angle ABC$

$\therefore$ $\angle ACB>2\angle ABC$。