

高等学校教材

弹性力学

第三版

上册

徐芝纶

高等教育出版社

高等学校教材

弹性力学

(第三版)

上册

徐芝纶

高等教育出版社

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581698/58581879/
58581877

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

第三版前言

在安排本书第三版的内容时,对总的体系未加更改,对次序的先后也只作了很小的变动。

由于国内的大专院校和设计单位都已普遍使用电子计算机(至少已普遍使用微型机),用手工进行的松弛计算已经失去了实用价值,所以第三版中取消了这方面的内容。

平面问题的位移差分解,与应力函数差分解相比,具有较广泛的适用性,但是,对同样的精度要求说来,方程较多是其缺点。由于电子计算机的使用,这一缺点已无关重要,因此,第三版中增加了位移差分解的内容。

兄弟院校的几位同志建议,增加“解答的唯一性”和“功的互等定理”。还有同志认为,既然空间轴对称问题的应力函数等同于拉甫位移函数,前者就不必介绍了。编者采纳了这两方面的建议。

为了便于教学,第三版中对文句和插图作了不少的修改,对例题和习题也作了一些调整。

徐芝纶 1987年5月

第二版前言

本书在1979年出版以后,曾蒙若干兄弟院校的教师作为教材试用,并先后提出不少宝贵的意见和建议。现在已经按照这些意见和建议进行了修改,择要说明如下。

原书中关于楔形坝体温度应力的一般分析,数学运算较繁,在有限单元法广泛应用于坝体应力分析以后,已经失去了应用价值。原书中关于等截面直杆弯曲问题的解答,虽然属于古典弹性力学上的重大成就,但在工程上很少有人应用。因此,在修订版中删去了这两方面的内容。

修订版在平面问题的基本理论中增加了“斜方向的应变”这一节,是为了适应结构实验分析方面的需要;在薄板小挠度弯曲问题的边界条件中,增加了弹性支承边的边界条件,因为弹性支承是板壳理论中的一个重要概念,而且在很多的板壳结构中,支承构件的弹性也是必须加以考虑的。

原书中关于平面问题应力函数以及应力和位移的复变函数表示,沿用过去文献中的传统推导方法,引用了几个人为的调和函数,显得曲折而不自然。在修订版中,放弃了这些调和函数而用共轭复变数进行推导,比较直观,容易为学生接受。

等曲率扁壳的简化计算,是我国的力学工作者们在50年代末期和60年代初期的重大贡献,至今还不失为国际上的先进成果。因此,在修订版中稍许增多了这方面的内容。

此外,在很多的章节中,文字叙述和数学推导作了某些修改,习题也有些调整。

恳切希望兄弟院校的教师继续对本书进行严格的审查,把发现的缺点和错误及时通知本人,以便再度加以修改或更正,使本书成为比较合用的一部教材。

徐芝纶 1982年4月

第一版前言

本书是为高等学校工科力学专业编写的弹性力学教材。

全书分上下两册，上册先讲平面的问题，再讲空间问题，下册先讲薄板问题，再讲薄壳问题。这样安排，大致符合由浅入深、由易到难、循序渐进的原则。

为了训练学生理论推导和实际运算的能力，每章之后都附有难易程度不同的习题，任课教师可按照专业教学计划的要求和学生课外学时的多少，适当布置。

在大多数章的最后，列出了参考教材的目录，以使学生在阅读了这些教材以后，能够更全面、深入地掌握该章的内容。

内容索引和人名对照表，附在下册的书后。

本书承主审人北京航空学院王德荣同志和武汉建筑材料工业学院王龙甫同志，以及同济大学、大连工学院、太原工学院、华北水利水电学院、西南交通大学、天津大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

徐芝纶 1978年10月

目 录

(上 册)

第三版前言	6
第二版前言	7
第一版前言	8
第一章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的内容	1
§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念	3
§ 1-3 弹性力学中的基本假定	8
第二章 平面问题的基本理论	12
§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题	12
§ 2-2 平衡微分方程	14
§ 2-3 斜面上的应力。主应力	16
§ 2-4 几何方程。刚体位移	19
§ 2-5 斜方向的应变及位移	24
§ 2-6 物理方程	27
§ 2-7 边界条件	30
§ 2-8 圣维南原理	32
§ 2-9 按位移求解平面问题	34
§ 2-10 按应力求解平面问题。相容方程	37
§ 2-11 常体力情况下的简化	40
§ 2-12 应力函数。逆解法与半逆解法	43
第三章 平面问题的直角坐标解答	48
§ 3-1 多项式解答	48
§ 3-2 位移分量的求出	51
§ 3-3 简支梁受均布荷载	54

§ 3-4	楔形体受重力和液体压力	60
§ 3-5	级数式解答	63
§ 3-6	简支梁受任意横向荷载	66
第四章	平面问题的极坐标解答	72
§ 4-1	极坐标中的平衡微分方程	72
§ 4-2	极坐标中的几何方程及物理方程	74
§ 4-3	极坐标中的应力函数与相容方程	77
§ 4-4	应力分量的坐标变换式	79
§ 4-5	轴对称应力和相应的位移	81
§ 4-6	圆环或圆筒受均布压力。压力隧洞	85
§ 4-7	曲梁的纯弯曲	90
§ 4-8	圆盘在匀速转动中的应力及位移	93
§ 4-9	圆孔的孔边应力集中	97
§ 4-10	楔形体在楔顶或楔面受力	103
§ 4-11	半平面体在边界上受法向集中力	108
§ 4-12	半平面体在边界上受法向分布力	111
第五章	平面问题的复变函数解答	118
§ 5-1	应力函数的复变函数表示	118
§ 5-2	应力和位移的复变函数表示	119
§ 5-3	各个复变函数确定的程度	122
§ 5-4	边界条件的复变函数表示	124
§ 5-5	多连体中应力和位移的单值条件	127
§ 5-6	无限大多连体的情形	130
§ 5-7	保角变换与曲线坐标	133
§ 5-8	孔口问题	137
§ 5-9	椭圆孔口	142
§ 5-10	裂隙附近的应力集中	149
§ 5-11	正方形孔口	154
第六章	温度应力的平面问题	161
§ 6-1	关于温度场和热传导的一些概念	161

§ 6-2	热传导微分方程	164
§ 6-3	温度场的边值条件	168
§ 6-4	按位移求解温度应力的平面问题	170
§ 6-5	位移势函数的引用	175
§ 6-6	用极坐标求解问题	179
§ 6-7	圆环和圆筒的轴对称温度应力	182
§ 6-8	楔形坝体中的温度应力	186
第七章	平面问题的差分解	194
§ 7-1	差分公式的推导	194
§ 7-2	稳定温度场的差分解	198
§ 7-3	不稳定温度场的差分解	204
§ 7-4	应力函数的差分解	209
§ 7-5	应力函数差分解的实例	216
§ 7-6	温度应力问题的应力函数差分解	219
§ 7-7	位移的差分解	222
§ 7-8	位移差分解的实例	235
§ 7-9	多连体问题的位移差分解	341
§ 7-10	温度应力问题的位移差分解	245
第八章	空间问题的基本理论	255
§ 8-1	平衡微分方程	255
§ 8-2	物体内任一点的应力状态	257
§ 8-3	主应力与应力主向	259
§ 8-4	最大与最小的应力	262
§ 8-5	几何方程。刚体位移。体积应变	264
§ 8-6	物体内任一点的形变状态	267
§ 8-7	物理方程。方程总结	271
§ 8-8	轴对称问题的基本方程	274
§ 8-9	球对称问题的基本方程	279
第九章	空间问题的解答	282
§ 9-1	按位移求解空间问题	282

§ 9-2	无限大弹性层受重力及均布压力	284
§ 9-3	空心圆球受均布压力	286
§ 9-4	位移势函数的引用	289
§ 9-5	拉甫位移函数及伽辽金位移函数	293
§ 9-6	半空间体在边界上受法向集中力	295
§ 9-7	半空间体在边界上受切向集中力	298
§ 9-8	半空间体在边界上受法向分布力	300
§ 9-9	两球体之间的接触压力	305
§ 9-10	按应力求解空间问题	309
§ 9-11	等截面直杆的纯弯曲	313
第十章	等截面直杆的扭转	318
§ 10-1	扭转问题中的应力和位移	318
§ 10-2	扭转问题的薄膜比拟	322
§ 10-3	椭圆截面杆的扭转	325
§ 10-4	矩形截面杆的扭转	328
§ 10-5	薄壁杆的扭转	333
§ 10-6	扭转问题的差分解	337
第十一章	能量原理与变分法	343
§ 11-1	弹性体的形变势能	343
§ 11-2	位移变分方程	346
§ 11-3	位移变分法	351
§ 11-4	位移变分法应用于平面问题	354
§ 11-5	应力变分方程	361
§ 11-6	应力变分法	364
§ 11-7	应力变分法应用于平面问题	366
§ 11-8	应力变分法应用于扭转问题	371
§ 11-9	解答的唯一性	375
§ 11-10	功的互等定理	376
第十二章	弹性波的传播	382
§ 12-1	弹性体的运动微分方程	382

§ 12-2	弹性体中的无旋波与等容波	384
§ 12-3	平面波的传播	387
§ 12-4	表层波的传播	391
§ 12-5	球面波的传播	395

第一章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的内容

弹性体力学，通常简称为弹性力学，又称为弹性理论，是固体力学的一个分枝，其中研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

对工科力学专业说来，弹性力学的任务，和材料力学、结构力学的任务一样，是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有所需的强度、刚度和稳定性，并寻求或改进它们的计算方法。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析，也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，这就大大简化了数学推演，但是，得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用

来校核材料力学里得出的近似解答。

例如,在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲,就引用了平面截面的假定,得出的结果是:横截面上的正应力(弯应力)按直线分布。在弹性力学里研究这同一问题,就无须引用平面截面的假定。相反地,还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确,并且由此判明:如果梁的高度并不远小于梁的跨度,而两者是同等大小的,那么,横截面上的正应力并不按直线分布,而显然是按曲线变化的,如图 7-9 所示,并且,材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如,在材料力学里计算有孔的拉伸构件,通常就假定拉应力在净截面上均匀分布。弹性力学里的计算结果表明:净截面上的拉应力远不是均匀分布,而在孔的附近发生应力集中,如图 4-9 所示,孔边的最大拉应力比平均拉应力大得多。

弹性力学可以分为数学弹性力学和实用弹性力学两部分。在数学弹性力学里,只用精确的数学推演而不引用关于形变状态或应力分布的假定。本书上册的内容属于数学弹性力学。在实用弹性力学里,和在材料力学里一样,也引用一些关于形变状态或应力分布的假定来简化数学推演,得出具有一定近似性的解答。这样,按照分析的方法和解答的精度说来,实用弹性力学是接近材料力学的;但是,由于其中所研究的问题比较复杂,同时还要用到数学弹性力学中的结果,所以这些研究内容归入弹性力学。本书下册的内容就属于实用弹性力学。

虽然在弹性力学里通常并不研究杆件系统,然而近几十年来,不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用,使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后,大大扩展了它的应用范围,使得某些比较复杂的本来是无法求解的问题,得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性,但应用在工程上,通常却是足够精确的。在近

三十年间快速发展起来的有限单元法,把连续弹性体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解,更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外,对同一结构的各个构件,甚至对同一构件的不同部分,分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算,常常可以节省很多的工作量,而仍然得到令人满意的结果。

总之,材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的,更不是一成不变的。我们不应强调它们之间的分工,而应当更多地发挥它们综合应用的威力,才能使它们更好地为我国的社会主义建设事业服务。

§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念,虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过,但在这里仍有再加以详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力,两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力,是分布在物体体积内的力,例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况,一般是不相同的。为了表明该物体在某一点 P 所受体力的大小和方向,在这一点取物体的一小部分,它包含着 P 点而它的体积为 ΔV ,图1-1 σ 。设作用于 ΔV 的体力为 ΔQ ,则体力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta V$ 。如果把所取的那一小部分物体不断减小,即 ΔV 不断减小,则 ΔQ 和 $\Delta Q/\Delta V$ 都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,命 ΔV 无限减小而趋于 P 点,假定体力为连续分布,则 $\Delta Q/\Delta V$ 将趋于一定的极限 F ,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = F。$$

这个极限矢量 F ,就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是

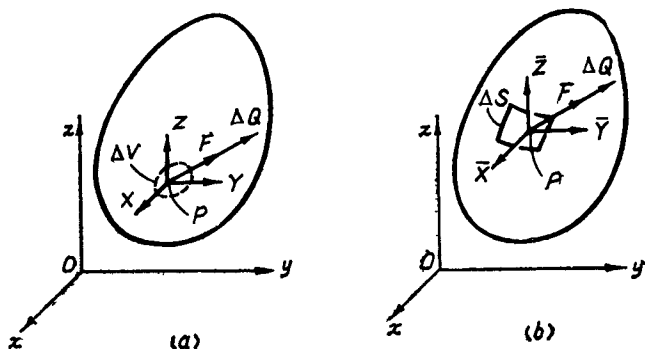


图 1-1

标量,所以 F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 F 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 X 、 Y 、 Z ,称为该物体在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向时为正,沿坐标轴负方向时为负。它们的因次是[力][长度] $^{-3}$ 。

所谓面力,是分布在物体表面上的力,例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况,一般也是不相同的。为了表明该物体在其表面上某一点 P 所受面力的大小和方向,在这一点取该物体表面的一小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔS ,图 1-1 b 。设作用于 ΔS 的面力为 ΔQ ,则面力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta S$ 。与上相似,命 ΔS 无限减小而趋于 P 点,假定面力为连续分布,则 $\Delta Q/\Delta S$ 将趋于一定的极限 F ,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = F。$$

这个极限矢量 F 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量,所以 F 的方向就是 ΔQ 的极限方向。矢量 F 在坐标轴 x 、 y 、 z 上的投影 \bar{X} 、 \bar{Y} 、 \bar{Z} ,称为该物体在 P 点的面力分量,以沿坐标轴正方向时为正,沿坐标轴负方向时为负,它们的因次是[力][长度] $^{-2}$ 。

物体受了外力的作用，或由于温度有所改变，其内部将发生内力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分，而将 B 部分撇开，图 1-2。撇开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面的一小部分，它包含着 P 点而它的面积为 ΔA 。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔQ ，则内力的平均集度，即平均应力，

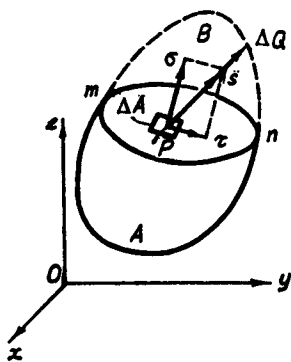


图 1-2

为 $\Delta Q/\Delta A$ 。现在，命 ΔA 无限减小而趋于 P 点，假定内力为连续分布，则 $\Delta Q/\Delta A$ 将趋于一定的极限 s ，即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = s。$$

这个极限矢量 s 就是物体在截面 mn 上的、在 P 点的应力。因为 ΔA 是标量，所以应力 s 的方向就是 ΔQ 的极限方向。

对于应力，除了在推导某些公式的过程中以外，通常都不用它沿坐标轴方向的分量，因为这些分量和物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变及材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是正应力 σ 和剪应力 τ ，图 1-2。应力及其分量的因次也是 [力][长度]⁻²。

显然可见，在物体内的同一点 P ，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内部取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度为 $PA=\Delta x$ 、 $PB=\Delta y$ 、 $PC=\Delta z$ ，图 1-3。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标