高等学校经济类专科教材

经济应用数学基础(一)

微积分

周誓达 编著

中国人民大学出版社

高等学校经济类专科教材

经济应用数学基础（一）

微 积 分

周誓达 编著

中国人民大学出版社

（京）新登字 156 号

高等学校经济类专科教材
经济应用数学基础（一）

微 积 分

周誓达 编著

出版者·中国人民大学出版社
发行者：中国人民大学出版社
（北京海淀路 39 号 邮码 100872）
印刷者 中国人民大学出版社印刷厂
经销者：新华书店总店北京发行所
开 本·850×1168 毫米 32 开
字 数：290 000
印 张.11.625
版 次：1994 年 6 月第 1 版
印 次：1994 年 6 月第 1 次印刷
册 数.1-11 000
书 号：ISBN7-300-01919-6/O·32
定 价：7 60 元

前　言

大专经济类应用数学基础教材是为高等专科学校经济类各专业编写的教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》等。特点是：密切结合经济工作的需要，充分注意逻辑思维的规律，突出重点，说理透彻，循序渐进，通俗易懂。

《微积分》共分八章，介绍了经济工作所需要的一元、二元微积分与无穷级数，以及一阶微分方程的基本知识及简单应用，着重讲解基本概念、基本理论和基本方法，培养熟练运算能力。书首附有微积分用到的初等数学公式小结。

经济类专业毕竟不是专搞数学的，本着“打好基础，够用为度”的原则，本书删除了对于经济工作并不急需的某些内容及某些定理的严格证明，凡是可讲可不讲的一律不讲，而用较多篇幅详细讲述那些急需的内容，同时也适当注意了知识面的拓宽，适当联系实际，淡化在几何上的应用，强化在经济上的应用。体现出：在战略上以少胜多，在战术上以多胜少。

基础课毕竟不是专业课，本着“服务专业，兼顾数学体系”的原则，把握内容的难易程度，不盲目攀比难度，做到难易适当，深入浅出，举一反三，融汇贯通，达到“跳一跳就可够着苹果”的效果。在内容编排上做到前后呼应，前面的内容在后面都有归宿，后面的内容在前面都有伏笔，使得“讲起来好讲，学起来好学”。

例题、习题是指挥棒，集中体现了教学意图，因此对例题、习题的编选给予高度的重视。例题、习题都经过精心设计与编选，它们与概念、理论、方法的讲述完全配套。其中除计算题、证明题以及经济应用题外，尚有考察基本概念与基本运算技能的标准化

习题，而且对于重点内容配有标以 * 号的综合习题。书末附有习题答案，便于检查学习效果。

在标准化习题中，单项选择是指：在四项备选答案中，只有一项是正确的，要求把正确答案前面的字母填在括号内；多项选择是指：在四项备选答案中，至少有两项是正确的，要求把所有正确答案前面的字母都填在括号内。

质量是教材的生命，质量不过硬，教材就站不住脚。减少以至消灭差错是衡量教材质量的一项重要标准，也是对读者负责的集中体现。书稿经过再三校对、验算，尽可能杜绝任何形式的差错。

特邀华北光学仪器厂设计所葛利达同志校对书稿、验算习题答案、描图并参与排版校对，谨表示衷心的感谢。

如果读者学习本书后能有所收获，并对学习微积分产生兴趣，作者将感到欣慰。恳切希望广大读者提出宝贵意见。

周誓达

1994 年 1 月

目　录

引论　微积分思路

经济应用数学是研究经济领域内的数量关系和优化规律的科学，微积分是经济应用数学的基础。

微积分研究的对象是函数，主要是初等函数，研究的主要工具是极限。

微积分中最重要的基本概念是导数、微分、不定积分与定积分，最重要的基本运算是求导与求不定积分。

应用微积分解决经济函数的优化问题，是微积分的重要内容。

作为微积分的延续，无穷级数与一阶微分方程是经济研究工作的有力数学工具。

微积分的精髓在于：在变化中考察各量之间的关系。可以说，没有变化就没有微积分。因此，必须以变化的观点学习微积分。

预备知识　初等数学公式小结

毫无疑问，微积分是以初等数学作为基础的。但是，微积分中所用到的初等数学知识不是全部，仅仅是其中一部分。在这一部分初等数学知识中，有一些是必须熟练掌握的，有一些只要了解就可以了。

学习微积分必须熟练掌握下列初等数学公式：

1. 两项和、差的平方与立方

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

例 1　$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

例 2　$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2. 因式分解

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$x^2 + (m+n)x + mn = (x+m)(x+n)$$

例 3　$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

例 4　$x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$

3. 共轭根式

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ $(a > 0, b > 0)$ 互为共轭根式，且有

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

例 5　$(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)$

$$= (x-1) - 4 = x - 5$$

例 6　$(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})$

$=(x^2+x)-(x^2-x)=2x$

4. 阶乘

$$n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \qquad (n\text{ 为正整数})$$

并规定　$0!=1$

例 7　$1!=1, 2!=2, 3!=6$

例 8　$(n+1)!=(n+1)n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

$=(n+1)\cdot n!$

例 9　$(2n+3)!=(2n+3)(2n+2)(2n+1)!$

5. 一元二次方程式

$(x-x_1)(x-x_2)=0$ 的根为 $x=x_1$ 与 $x=x_2$

例 10　$x^2-4x+3=0$ 化作 $(x-1)(x-3)=0$，根为 $x=1$ 与 $x=3$。

6. 一元二次不等式

$(x-x_1)(x-x_2)\geqslant 0\,(x_1<x_2)$ 的解为 $x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$

$(x-x_1)(x-x_2)\leqslant 0\,(x_1<x_2)$ 的解为 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$

例 11　$4-x^2\geqslant 0$ 即 $x^2-4\leqslant 0$，化作 $(x+2)(x-2)\leqslant 0$，解为 $-2\leqslant x\leqslant 2$.

7. 幂函数与指数函数

$$a^n=\underbrace{aa\cdots a}_{n\text{ 个}} \qquad (n\text{ 为正整数})$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad (n\text{ 为正整数})$$

$$a^0=1 \qquad (a\neq 0)$$

$$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n} \qquad (m,n\text{ 皆为正整数，且 } m>1)$$

$$a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} \qquad (m,n\text{ 皆为正整数，且 } m>1)$$

$$a^{\alpha_1}a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\frac{a^{\alpha_1}}{a^{\alpha_2}} = a^{\alpha_1-\alpha_2}$$

$$(a^{\alpha_1})^{\alpha_2} = a^{\alpha_1\alpha_2}$$

$$(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$$

$$(\frac{a}{b})^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$$

例 12　0^0 不代表任何数，当然 $0^0 \neq 1, 0^0 \neq 0$.

例 13　$\frac{1}{x} = x^{-1}, \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

例 14　$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

例 15　$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$

例 16　$\sqrt[n]{0.001} = (0.001)^{\frac{1}{n}}$（$n$ 为正整数）

例 17　$n\sqrt{n} = nn^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}$（$n$ 为正整数）

例 18　$(1 + \frac{1}{x})^{x+3} = (1 + \frac{1}{x})^x(1 + \frac{1}{x})^3$

例 19　$2^{2n-1} = \frac{2^{2n}}{2}$（$n$ 为正整数）

例 20　$(1 + \frac{1}{x})^{3x} = [(1 + \frac{1}{x})^x]^3$

例 21　$(-x^2)^n = (-1)^n(x^2)^n = (-1)^n x^{2n}$（$n$ 为正整数）

例 22　$\frac{(n+1)^n}{n^n} = (\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$（$n$ 为正整数）

8. 对数函数

若 $a^y = x$，则 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$，且有

$$\log_a(x_1x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

例 23　$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0 \qquad (a > 0, a \neq 1)$

例 24　$\lg(x-5) \neq 0$ 的解为 $x \neq 6$

例 25　$\log_a|x| + \log_a|y| = \log_a|xy| \ (a > 0, a \neq 1)$

例 26　$\log_a|x-4| - \log_a|x-1| = \log_a\left|\dfrac{x-4}{x-1}\right|$

$(a > 0, a \neq 1)$

例 27　$\log_a x^x = x\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$

例 28　$\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$(a > 0, a \neq 1)$

例 29　$a^{\log_a x} = x \ (a > 0, a \neq 1)$

9. 特殊角的三角函数值

特殊角的三角函数值如表 0-1：

表 0-1

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	0

例 30　$\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos 0 = 0 - 1 = -1$

10. 同角三角函数恒等关系式

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

例 31 $\operatorname{tg}x\cos x = \sin x$

例 32 $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{1}{\cos x} = \operatorname{tg}x\sec x$

例 33 $a^2 - a^2\sin^2 t = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$

例 34 $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

例 35 $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$

例 36 $\dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sin^2 x}$

$$= \sec^2 x + \csc^2 x$$

例 37 $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$

11. 异角三角函数恒等关系式

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

例 38 $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例 39 $\sin^2 2t = \dfrac{1 - \cos 4t}{2}$

例 40 $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$

12. 反三角函数

若 $\sin y = x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$，则 $y = \arcsin x$；

若 $\cos y = x(0 \leqslant y \leqslant \pi)$，则 $y = \arccos x$；

若 $\mathrm{tg} y = x\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$，则 $y = \mathrm{arctg} x$；

若 $\mathrm{ctg} y = x(0 < y < \pi)$，则 $y = \mathrm{arcctg} x$.

例 41　$\arcsin 0 = 0, \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$,

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

例 42　$\mathrm{arctg} 0 = 0, \mathrm{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \mathrm{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$,

$\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

13. 平面直线

$ax + by + c = 0$（a, b 不同时为 0）代表直线。

特别地，$y = y_0$ 代表经过点 $(0, y_0)$ 且与 x 轴平行的直线，$x = x_0$ 代表经过点 $(x_0, 0)$ 且与 x 轴垂直的直线。

例 43　$x + y = 2$ 代表经过点 $(0,2)$，$(2,0)$ 的直线。

例 44　$y = 0$ 代表 x 轴，$y = 1$ 代表经过点 $(0,1)$ 且与 x 轴平行的直线。

例 45　$x = 0$ 代表 y 轴，$x = 2$ 代表经过点 $(2,0)$ 且与 x 轴垂直的直线。

14. 圆

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 (R > 0)$ 代表圆心在点 $M_0(x_0, y_0)$、半径为 R 的圆。

例 46　$x^2 + y^2 = 1$ 代表圆心在原点、半径为 1 的圆，其中下半圆可表示为 $y = -\sqrt{1 - x^2}$，上半圆可表示为 $y = \sqrt{1 - x^2}$。

15. 抛物线

$y = ax^2 (a \neq 0)$ 代表顶点在原点的抛物线，若 $a < 0$，则开口

向下；若 $a>0$，则开口向上。

$y=ax^2+c(a\neq 0)$ 代表顶点在点 $(0,c)$ 的抛物线，由抛物线 $y=ax^2$ 向下平移 c 单位（当 $c<0$）或向上平移 c 单位（当 $c>0$）而得到。

$y^2=ax(a\neq 0)$ 代表顶点在原点的抛物线，若 $a<0$，则开口向左；若 $a>0$，则开口向右。

例 47　$y=x^2$ 代表顶点在原点且开口向上的抛物线。

例 48　$y=x^2+1$ 代表顶点在点 $(0,1)$ 且开口向上的抛物线，由抛物线 $y=x^2$ 向上平移 1 单位而得到。

例 49　$y=2-x^2$ 代表顶点在点 $(0,2)$ 且开口向下的抛物线，由抛物线 $y=-x^2$ 向上平移 2 单位而得到。

例 50　$y^2=x$ 代表顶点在原点且开口向右的抛物线，可分成两支：在 x 轴下方的一支表示为 $y=-\sqrt{x}$，在 x 轴上方的一支表示为 $y=\sqrt{x}$。

学习微积分还应了解下列初等数学公式：

1. n 方差

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

（n 为正整数）

2. 对数换底

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\qquad (a>0,a\neq 1;b>0,b\neq 1)$$

3. 三角函数和差化积

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

4. 反三角函数基本关系

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arcctg}\,x=\frac{\pi}{2}$$