逯新丽　玉　良
柴　木　编

中国環境科学出版社

初中代数
中册

重点问题详解

重点问题详解

初中代数　中册

逯新丽　玉　良　荣　木

中国环境科学出版社

1993

（京）新登字089号

内 容 简 介

本书包括初中二年级代数全部知识内容，对其中应知应会的知识点和重难点，或易混易错不好掌握的疑点，以及可能遇到的各种问题，逐一提出问题，并做了详尽的回答，有些问题还配有必要的小型练习，以求弄清知识，巩固概念，发展能力。

本书条目按课文顺序编排，易于查找。适合初中学生及自学青年阅读参考，也可供教师备课参考。

重点问题详解

初中代数　中册

逓新丽　玉　良　紫　木

*

中国环境科学出版社出版

北京崇文区北岗子街8号

北京昌平兴华印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　　各地新华书店经售

*

1993年3月第一版　　开本　787×1092　1/32

1993年3月第一次印刷　　印张　5 1/4

印数：1—5000　　字数　121千字

ISBN 7-80093-284-2/G·316

定价：3.00元

前　　言

“学则须疑”，有疑有解则能提高和进步。

学习是一个特殊的认识过程，是在教师帮助下加速对所学知识的认识过程。课堂学习时间是有限的，重要的是培养自学能力，以提高学习效果。自学时有了疑问和疑难怎么办！要靠无声的老师做辅导，这就是有益的——书。

为此，向大家奉献一套中小学课本中《重点问题详解》，一书在手，似教师陪坐身旁。

该书是以问题的形式出现的。因为一切科学都是从为什么开始的，且问题是启动思维的动力。所以，以问题的形式，贯穿全书是最有益的，它把学习中的重点、难点、疑点设计成问题，使读者一目了然，便于阅读和使用。

遇有疑难，请先思考，然后翻阅此书，认真阅读，即可生效。

本书的特点是：

一、源于课本，重点突出，解答详尽。

该丛书，随着课本进度，将所学内容的重难点和疑惑不解的问题，提出来做详尽的解答，并有例题，以帮助读者深刻理解，提高学习实效。

二、提出问题，文字精辟，促进思考。

该丛书，对所有重点问题，均以问题形式出现的。问题是思维的动力。你有问题可到该书中去找解；从书中提出的问题，促你思考，然后阅读解答，使你从中得到提高。

三、应用知识，总结方法，提高能力。

提高能力，是学习的重要目的。该丛书根据课程的要求，及时总结学习方法和掌握应用知识的方法，以取得举一反三之效，促进读者学习能力的提高。

四、辞书性，题解性，兼而有之。

该丛书，具有辞书性和题解性。为了说明课本中的重点知识，在解答之中，则要博引例证，以丰富内容，可取辞书之效。遇有典型问题，解之详尽，故有题解功能。

编写这套丛书是一个大胆的尝试，虽然我们依据设想做了很多努力，但是不妥之处也还难免。欢迎广大读者批评指正。

目　录

什么是一个数的平方根

如果一个数x的平方等于a，那么这个数x就叫做a的平方根．也就是说：如果$x^2=a$，那么x就叫做a的平方根．平方根也叫做二次方根．

例如　$3^2=9$，3就是9的平方根．

$(-5)^2=25$，-5就是25的平方根．

为什么要研究一个数的平方根呢？我们已经学习过加、减、乘、除和乘方五种运算，并且知道加和减，乘和除，是分别互为逆运算的，而乘方的逆运算是什么呢？我们先从最简单的乘方运算——平方运算来研究它的逆运算，由式子$x^2=a$可知道等号左边是一个数x的平方运算，右边数a是x^2运算的结果．若已知a求x，即已知一个数的平方数，求这个数的运算是平方运算的逆运算．根据前面平方根的概念可知，求平方根的运算就是平方运算的逆运算．我们把求一个数的平方根的运算叫做开平方．显然开平方运算与平方运算互为逆运算．对一个数开平方时，这个数叫做被开方数，如平方根定义中的a．开平方的结果就是这个数的平方根．因此有了平方根的概念可以解决平方运算的逆运算问题．这在实践中有非常重要的意义．例如，已知一个正方形的面积，求这个正方形的边长的问题．就是求一个数的平方根的问题．研究数的平方根还为数的进一步扩充作了准备．

用什么方法求一个数的平方根呢？一般来说有三种方法：第一种是根据平方根的概念；第二种是根据平方根表；第三种是用笔算．其中第一种方法只能对一些特殊的数求平方根，它有很大的局限性，后两种方法则可求任意一个正有

理数的平方根。

平方根有哪些性质

根据平方根的概念，可得到。

∵ $2^2=4$，$(-2)^2=4$；

$(0.3)^2=0.09$，$(-0.3)^2=0.09$；

$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$。

∴ 2和-2都是4的平方根。

0.3和-0.3都是0.09的平方根。

$\frac{2}{3}$和$-\frac{2}{3}$都是$\frac{4}{9}$的平方根。

这是因为互为相反数的两个非零有理数，它们的平方都是一个正数。因此，一个正数有两个平方根，它们互为相反数。

又因为$0^2=0$，所以零的平方根仍是零。

又因为任何一个有理数的平方都不可能是负数，所以负数没有平方根。

综上所述：一个数的平方根的性质有：

一个正数有两个平方根，它们是互为相反的两个数；

零的平方根，仍是零；

负数没有平方根。

例如：25有两个平方根，它们是5和-5；

0有一个平方根，是0；

-9没有平方根。

一个正数a的两个平方根分别记作$\sqrt[2]{a}$和$-\sqrt[2]{a}$，"$\sqrt[2]{a}$"读作"二次根号"。a是被开方数。2叫做根指数。$\sqrt[2]{a}$读作"二次根号下a"，$-\sqrt[2]{a}$读作"负的二次根号下a"。根指数2，

通常省略不写．如$\sqrt[2]{a}$和$-\sqrt[2]{a}$可以分别写作$\sqrt{a}$和$-\sqrt{a}$，分别读作“根号a”和“负根号a”，又通常把正数a的两个平方根合并记作$\pm\sqrt{a}$，读作“正、负根号a”，又因为$\pm\sqrt{0}=\pm0=0$，所以一个非负数a的平方根统一记作$\pm\sqrt{a}$。

如：36的平方根记作$\pm\sqrt{36}$，$\pm\sqrt{36}=\pm6$。

应当注意：$\pm\sqrt{a}$ $(a>0)$ 表示互为相反的两个数．$\sqrt{a}$只表示一个正的平方根，$\sqrt{36}\neq\pm6$。

为什么要研究一个数的算术平方根

一个正数a的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根叫算术平方根，记为$\sqrt{a}$，另一个平方根即算术平方根的相反数当然就用$-\sqrt{a}$来表示．即：

正数的正的平方根叫做算术平方根．零的算术平方根仍然是零。

第一个“正”字指的是被开方数为正，第二个“正”字指的是算术平方根为正，又因为零的算术平方根仍然是零，所以被开方数就是一个非负数（正数或零），算术平方根也是一个非负数，这两个非负性全面地反映了算术平方根的本质属性。

有了平方根的概念，为什么还要引入算术平方根的概念呢？

原因在于正数的平方根有两个，例如4的平方根，是±2，如果不规定符号，$\sqrt{a}$ $(a\geqslant0)$ 只表示算术平方根，就会引起混乱．例如求$\sqrt{4}+\sqrt{9}$，就可以有四种不同的答案，即

$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$；$\sqrt{4}+\sqrt{9}=-2+3=1$；

$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2-3=-1$；$\sqrt{4}+\sqrt{9}=-2-3=-5$。

规定了算术根之后，则$\sqrt{4}+\sqrt{9}$只能等于$2+3=5$。这样才能满足数学中的每一个符号都有确切的含义的规定。

以后同学们学习了立方根以及n次方根的概念，就会知道方根的运算总可以转化成算术根的运算。

请同学们思考下面的问题：

①正数a的平方根是否唯一。

②正数a的算术平方根是否唯一。

③$\sqrt{16}$表示什么？$\sqrt{16}=\pm 4$对吗？

④若$x^2=16$，则$x=\sqrt{16}=4$对吗？

判断下列各式是否正确，并将错误的改正过来

①$\sqrt{(-2)^2}=-2$；

②$\sqrt{a^2}=a$；

③$\sqrt{1-2x+x^2}=\sqrt{(1-x)^2}=1-x$；

④$\sqrt{-a^3}=a\sqrt{-a}$

在实际问题中也常遇到求一个数的算术平方根的问题。如，已知一个正方形的面积是$4cm^2$，则它的边长是2cm，这里边长2是面积4的算术平方根。在以后学习中要学习的用勾股定理求直角三角形的边长时，所求的也是算术平方根。

被开方数的小数点的位置与它的算术平方根的小数点的位置的关系怎样

我们先看如下的例子：

若a是被开方数，$\sqrt{a}$是它的算术平方根。列表表示为

a	0.0004	0.04	4	400	40000
$\sqrt{a}$	0.02	0.2	2	20	200

从表示可以看出，4的算术平方根是2。而把4的小数点向左移动2位和4位时，就是0.04和0.0004，它们的算术平方根分别是0.2和0.02，就是把2的小数点向左移动1位和2位；

若把4的小数点向右移动2位和4位，则4的算术平方根的小数点分别向右移动1位或2位。

因此，不难得到如下结论：

如果把一个正数的小数点向右(或者向左)移动两位时，它的算术平方根的小数点相应地向右(或者向左) 移动一位.

把一个正数的小数点向右移动两位，就是把这个数扩大到原来的100倍。而向右移动一位就是把这个数扩大到原来的10倍。

把一个正数的小数点向左移动两位，就是把这个数缩小到原来的$\frac{1}{100}$，而向左移动一位就是把这个数缩小到原来的$\frac{1}{10}$。

因此，前面结论又可以叙述为：

如果把一个正数扩大到原来的100倍时，它的算术平方根就扩大到原来的10倍；如果把一个正数缩小到原来的$\frac{1}{100}$，它的算术平方根就缩小到原来的$\frac{1}{10}$。

例如，已知289的算术平方根是17，那么，28900的算术平方根就是170，而2.89的算术平方根就是1.7。

运用上面的性质．若已知一个正数的平方根，我们可以求出这个正数与10的偶次幂乘积的平方根，它可用于查平方根表求一个小于1或大于100的正数的平方根。

运用这个性质，也可求一些完全平方数的平方根。

怎么判断一个数是完全平方数

如果一个正有理数恰好是另一个有理数的平方，这个正有理数叫做完全平方数。

例如：$169=13^2$．169是完全平方数。

$1.21=1.1^2$．1.21是完全平方数。

$$\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \frac{4}{9}\text{是完全平方数。}$$

显然，13，1.1，$\frac{2}{3}$分别是169，1.21，$\frac{4}{9}$的算术平方根。

因此，一个完全平方数的算术平方根就可以根据平方根的定义求出来.（当然，一般地限于位数较低的完全平方数）

怎样判断一个数是否完全平方数呢，这要用分析的方法，特别是一些位数较少的数，我们先以正整数为例进行分析。

一个正整数的平方仍是一个正整数；反之，一个正整数如果是完全平方数，那么它的算术平方根也是正整数。

我们还必须记住一些正整数的平方数，如1—10的平方数分别是1，4，9，16，25，36，49，64，81，100；11—20的平方数分别是121，144，169，196，225，256，289，324，361，400。

不难看出，一个正整数如果是完全平方数它的末位数一定是1，4，5，6，9，0。而且一个完全平方数的末位数如果是0，那么它的末两位数一定都是0。

又比如，末位数是5的正整数的平方数的末两位数一定是25，这是因为末位数是5的正整数都可以写成$10a+5$的形式（其中a是正整数），它的平方数是$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$。其中一个加数是$100a(a+1)$，它的末两位数都是0，另一个加数是25，其和的末两位数一定是25。

又知，如果把一个正整数从右到左，每两位为一段，用“′”号分开，最后一段（最左边一段）可能是一位，所分段数就是这个正整数的平方根的整数部分的位数。如10609分成段即1′06′09共三段，它的平方根有三位整数。

运用以上的一些结论，可以分析出某些正整数是否完全平方数。

例如，判断1369是否为完全平方数，可作如下分析：1369如果是完全平方数，它的算术平方根一定是二位的整数。又它的末位数是9。所以它的算术平方根的末位数只可能是3或7．而$30^2=900$，$40^2=1600$，且$900<1369<1600$，所以1369的算术平方根只可能是33或37。经计算得$33^2=1089$，$37^2=1369$，因此1369是一个完全平方数，它的算术平方根是37。

如果判断1214是否完全平方数，可以仿照前面对1369的分析。得到它的算术平方根只可能是32或38。但$32^2=1024\neq1214$。$38^2=1444\neq1214$ 因此可以判断出1214不是完全平方数。

如果判断237，4323，1348等等，末位数是3，7，8的数是否完全平方数。则结果是显然的。因为末位数是3，7，8的正整数不可能是完全平方数，又只有个位数是0而十位数不是0的数，如38060，一定不是完全平方数。

显然，如果一个数是五位或五位以上的正整数，用这种分析的方法就不方便了。

如果判断一个正的小数是否完全平方数时，只须先移动小数点的位置，把小数变为整数。应注意，把小数点向右移动时每一次移两位，再用对正整数判断的方法来判断。化整数时，小数点向右移动几次，平方根的小数点则向左移几位。如求0.0324的算术平方根。先把0.0324的小数点向右移，每两位一次，共移二次。化为正整数324，它的算术平方根是18，把18的小数点向左移2位得0.18，则0.18就是0.0324的算术平方根。

要注意：0.04的算术平方根是0.2，而0.4不是完全平方

数。

一个可以用完全平方数解的问题

问题：如果$\sqrt{x^2+y^2}$为正整数，则在下面的四组数值中，x和y只能取（　　）

(A)$x=25530$．$y=29464$；

(B)$x=37615$．$y=26855$；

(C)$x=15123$．$y=32477$；

(D)$x=28326$．$y=28614$．

注：此题有且只有一个答案正确．此题是北京市1990年初二数学竞赛初试试题。

显然，解这个问题只须把题中所给的四组x、y的值分别代入$\sqrt{x^2+y^2}$，进行计算，就可以得到正确答案。但是这种方法运算量太大了，在有限的时间内不允许这样作。因此解这题可以用筛选法，对所给四组值进行分析、筛选、看哪一组数可能使x^2+y^2是完全平方数，哪些组数不可能使x^2+y^2是完全平方数：如果可能使x^2+y^2是完全平方数的只有一组，不可能的有三组，且这个题一定一个正确答案。显然可能的一组数就是正确答案．下面我们依次分析这四组数：

(A)$x=25530$，$y=29464$．

因为x^2的末位数是0，y^2的末位数是6，x^2+y^2的末数是6．所以(A)中的一组数有可能使x^2+y^2是完全平方数．

(B)$x=37615$，$y=26855$．

因为x^2的末两位数是25，y^2的末两位数是25，x^2+y^2的末两位数是50，由于末位数为0时，只有末两位数都是0才可能为完全平方数．所以(B)中的一组数不可能使x^2+y^2为完全平方数。

(C)$x=15123$，$y=32477$．