名师启迪丛书

（下册）

高中数学学习指要

——献给高中同学

田　佣　李广钧　陈剑刚　贺信淳　胡大同　著

科　学　出　版　社

名师启迪丛书

高中数学学习指要

（下　册）

——献给高中同学

田[redacted]著

科　学　出　版　社

内 容 简 介

数学是培养学生思维能力的学科，本书的作者们在这一领域里创造了出色的成绩。他们根据教学大纲要求的知识范围，从丰富的教学实践出发，以中等水平学生的实际为主，兼顾较差生和优等生的情况，引导学生如何深入理解知识并提高解题能力。本书不采用“题海战术”的做法，而是对目的鲜明而典型的例题，加以详细的分析说明，以启发学生系统掌握基本知识和总结解题规律，力求使学习能收到事半功倍之效。各章分“知识结构”、“学习指导”和“水平测试”三部分。叙述精辟，深入浅出，并附有相应的练习题，还有一定量的标准化练习题及综合测试题，可供自我测试和检验学习效果。

本书可供各类中学的高中学生参考，也适于青年教师及自学者阅读。

名师启迪丛书

高中数学学习指要

（下 册）

献给高中同学

田 佣 李广钧 陈剑刚 贺信淳 胡大同 著

责任编辑 徐一帆

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年6月第一版 开本：787×1092 1/32

1991年5月第二次印刷 印张：10

印数：45 701 0 700 字数：222 000

ISBN 7-03-001137-6/G·58

定价：3.85 元

作者简介*

田佣，男，1940年生，1963年毕业于北京师范大学数学系。毕业后一直从事中学数学教学工作，现任北京四中教学处主任，高级教师。

李广钧，男，1933年生，1954年毕业于东北师范大学，分到北京师大附中任教。现任北京师大附中副校长，高级教师，兼任数学教学信息研究会理事、北京市高考委员会委员、《帮你学》出版委员会委员。曾主编《数学高考复习指导》、《高中数学学习指导》青年自学丛书等，并参加编著《中学实用教育学》等。

* 本书署名按姓氏笔划为序。

陈剑刚，男，1936年生，江苏海门人。1958年毕业于复旦大学数学系。北京市特级教师，现任北京大学附属中学数学高级教师。曾在《数学通报》上发表过“数学教学中培养学生的思维品质”和“改革教学方法、培养学生能力”等论文。

贺信淳，男，1935年生，1955年毕业于北京师范学院。长期在中学任教，现任北京东城区教研科研中心数学教研员，高级教师，北京数学教学研究会理事，东城区理科学会数学分会理事长。60年代以来，多次在《数学通报》等刊物上发表数学教学论文，著有《中学数学精读》、《代数学习辅导》等书；多次参加教材和教学参考资料的编写工作。

胡大同，男，1937年生，1962年毕业于北京师范大学数学系。现任北京101中数学教研组组长、北京数学会中教委员会副主任、中国数学会理事，高级教师。多年来，对北京市中学生优秀数学人才的培养作出了重要贡献，曾任第一届国家奥林匹克数学集训队班主任，合作编写的书有《第一届国家奥林匹克数学集训队资料汇编》、参与编写的有《中学数学奥林匹克讲座》等读物，并撰有论文"理性的杰作"等多篇。

序

“师者，所以传道受业解惑也.”韩愈的这句话几乎成了千百年来教师们的座右铭．然而我们民族的后代不但应该掌握“道”与“业”，而且应该善于自己解“惑”，更富有创造性．换句话说，教师应该让自己的学生变得更聪明．目前我们的基础教育在这方面却不能适应未来的需要：过于偏重“业”的灌输了．试看年年层出不穷、屡禁不止、充斥于学校和家庭、压得学生喘不过气来的“难题详解”、“辅导材料”，就可以感到问题的严重了．

名师则不然．他们不但精熟自己执教的学科，更为重要的是，他们善于处理和驾驭学科的内容，激发学生的求知欲、探索欲，启发学生发挥自己的智慧潜能，引导学生综合运用已有的知识和技能去攀登科学的下一个阶梯，不断闯入新的领域，进入新的境界．把首都一些名师的半生心血结晶加以汇集，让更多的学生受惠，从填鸭式教学的苦难中挣脱出来，使他们成为聪明的、善于思索的一代，这就是这套《名师启迪丛书》的编著目的．

名师者，著名之教师也。如今是名人蜂起的时代：名演员、名画家、名厨师、名企业家、名演说家……每天都要出现一大批，只是“名教师”却不大被提及．这是当前教师，特别是中小幼教师的社会地位所决定的，但也跟他们的接触范围较窄、宣传报道不够有关，诚所谓“登高而招，臂非加长也，而见者远”，盖势使之然．既然我们的优秀教师无愧于“名师”之号，我们就应该恭恭敬敬地这样称呼他们。借着

这套丛书的出版，为我们的名师们做点树碑立传的工作，让更多的人知道他们、学习他们，以便今后不断涌现出更多的名师，这是编辑这套丛书的一个附带目的。

这套丛书一律以最新教材为依托，即：结合教材的难点和重点培养学生的基本功，训练学生科学的思路，而不是靠补充大量材料取胜。这是为了不无谓地增加学生负担，引导他们重视课内的学习，并在系统的学习中提高；同时，也是为了便于更多的教师甚至家长参考，从中受到启发。

现代科学证明，人的智力的成长从胎儿时期就开始了；幼儿“记事儿”前后思维和语言能力的培养、生活习惯和情趣的形成对人的一生都有着重要的影响。这跟我国古代重视“胎教”和所谓“三岁看大，七岁看老”的谚语不谋而合（但并非否定后天的教育）。为此，我们特请著名的幼教专家撰稿，介绍如何培养教育从0岁到6岁的儿童。与丛书中其它部分不同的是，关于幼儿教育的这六册是要给年轻的爸爸妈妈们以启迪，因为他（她）们是孩子的第一个、也是终其一生的老师。

愿这套丛书能成为中华教育大厦中的一块砖、一代代人才成长之路上的一个石阶，愿它伴着更多的后来者走过人生的关键阶段。

最后，应该感谢科学出版社。一个一向以出版高层次科学著作蜚声海内外的出版社对于提高中小学生的科学文化素质如此关注，社领导、编辑和工人们付出了大量的劳动，使这套丛书得以在短时间内出版，这是值得全社会钦佩和尊敬的。

许嘉璐

1989年

目　录

第十章　立体几何学习谈之一

——概念、命题、推理

学习立体几何的根本任务之一是提高逻辑思维能力。其中，把握抽象概念的能力和掌握演绎推理的能力的提高，至为重要。

思维是借助概念来进行的。什么是概念？按照辩证唯物主义的观点，概念是人类在社会实践中从感性认识到理性认识的飞跃，是客观事物的本质属性在人脑中的反映。因此，从根本的意义上来说，概念的意义只能从被概括的客体中去理解，只能从实践中去意会。立体几何中所研究的各种位置关系、空间图形的性质、各种名词术语，无不是现实世界的空间形式和数量关系的抽象与概括。

中学开设立体几何课程的目的之一就是要凭借几何知识体系的教学，使学者初步理解和掌握以概念的逻辑演绎为主要特征的推理思维模式，优化思维品质，提高思维的科学性，增强思维能力。而提高逻辑思维能力的关键，首先在于深刻理解逻辑演绎法（也就是假设演绎法）的本质和特点，遵循演绎法的基本规律并结合具体学习实践逐步培养和发展学生的逻辑思维能力。

鉴于这种认识，本文拟结合立体几何知识分析逻辑演绎法中的一个基本问题：概念、命题和推理的关系。并从中引出一些教学的启迪。为了便于阐明观点，文章的格式将不依章节顺序展开，而以观点为中心组织内容。

本章将要阐明的观点有以下两点：

1．概念的意义在推理中表述；

2．推理过程的本质是概念之间的转化，即通过对概念意义的表述和组织实行概念的转化*．

由于概念推理是思维运动，因此辩证法（即有条件的对立统一法则）是指导概念推理的灵魂．

数学概念是一个判断性的语句，它的意义有真有假，数学概念的功能是用于演绎推理，它有以下特点：

1．数学概念的抽象性

数学概念的抽象性是指：

（1）概念的意义（内涵）不是通过归纳，而是通过演绎法来说明，即通过已知概念对它约定；

（2）概念所指的对象（外延）还是概念．如：平面的概念．作为在日常生活中的理解，其意义是从“平静的湖面”、“光洁的镜面”、“很薄的纸”等客观现象来概括抽象出来的，这个概念所指的对象是客观现象．例如我们可以说“桌面是平面”、“黑板面是平面”等等．然而，在立体几何中“平面”的意义完全不是这样去“理解”的，是严格地被平面的四个基本公理约定的．

又如，直线与平面垂直的概念，在生活中我们可以把它理解为“直立在桌面上的书脊与桌面的关系”，“垂立在地面上的旗杆与地面的关系”，“铅直的重锤与地面”的关系

---

* 表述即解释、理解。组织是把若干个有联系的概念组合在一起形成新概念。

等等。然而立体几何中的“线面垂直概念”其意义只存在于定义中：“一条直线垂直于平面内的任意一条直线叫做直线与平面垂直”。

再如，棱柱的概念，它的意义也只能从定义的表述中去理解：“有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体。”它的意义仅被定义中所述的词语“面”、“四边形”、“几何体”、“相邻”、“平行”等所限定。

总之，立体几何中所出现的概念用了生活中大家熟悉的名词（如平面、直线、点、立方体等），但有着特定的意义，这个意义只能从其它的概念对它的约定中去理解。这就要求我们要准确理解概念（用句子表示）的数学含义。

为了具体说明数学概念的抽象性，我们必须知道数学概念的约定方式。通常用下述方法：

（1）运用公理来约定。这常指的是最基本的概念，例如平面这个概念，它用四条基本公理约定。平面的意义应该从也只能从这四条公理中去理解。

（2）通过定义。这是最常用的方法。它是用对已知概念赋加明确的性质和关系的方法来揭示新概念的意义。

例如，二面角的定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。定义中出现的“直线”“半平面”等概念，必须是已被定义过的，其中“直线”的概念沿用初中定义，“半平面”则在前段课文中事先定义：一个平面内的一条直线，把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫做“半平面”。

这样看来“定义”的意义是用已知概念来解释新概念。这样，寻根溯源层层上推就会有一个尽头，最初的概念已无法再用已明确的概念表述。在严格的数学中则要用一种叫做

"元词"和"公理"的方法来解决。

（3）运用日常生活意义来理解概念。例如"几何体"的概念，还有一些关系词如"在…内""分成两部分"等等。在采用这种方法来阐明概念的意义时，它的原则是在运用这类概念进行推理时不能与数学定义的概念发生逻辑上的矛盾。

2．数学概念的严密性

概念的严密性是概念抽象性的自然结果，也是概念用于推理的需要。

概念的严密性首先是指新概念的意义（内涵）必须严格地建立在已定义的概念基础之上。这在对二面角定义的分析中已经说明。下面再举几个例子说明。

例1　关于两条异面直线距离的概念。

其定义为"两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度"。而两条异面直线的公垂线的概念定义为"和两条异面直线都垂直相交的直线"，两条异面直线互相垂直的概念定义为"两条异面直线所成的角是直角"，两条异面直线所成的角的概念定义为"经过空间一点，分别引两条异面直线的平行线，这两条直线所夹的锐角或直角叫两条异面直线所成的角。"这里，"异面直线所成角"定义中所用的"平行线"、"两条直线的夹角"在初中平面几何中已被定义。

例2　正方体的概念定义为"棱长相等的长方体"。长方体的概念定义为"底面为矩形的直平行六面体"。直平行六面体概念定义为"侧棱与底面垂直的平行六面体"。平行六

面体的概念定义为“底面是平行四边形的四棱柱”。四棱柱的概念定义为“底面是四边形的棱柱”。棱柱的概念定义为“两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面围成的几何体”。

而棱柱概念定义的表述中所出现的各词语（概念）如“两面互相平行”“公共边互相平行”在第一章已有明确定义，而“几何体”的概念则是不言自明的。

概念的严密性还表现在概念所表述的对象是唯一确定的。即在应用概念的定义来判別对象时，必须是唯一确定的。

例如关于异面直线所成角及二面角的平面角的概念按定义点的取法是任意的．为保证在点的一切取法下角的量度的唯一性，在下定义前先证明了等角定理及其推论：

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

推论 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等。

又例如“直线（和平面平行的直线）与平面的距离”的概念。按定义，直线上的点的取法是任意的，为了保证在点的一切取法中距离量度的唯一性在定义前先证明了以下定理：

定理 已知：一条直线 l 和一个平面 α 平行，则直线 l 上各点到平面 α 的距离相等。

课本中所述“斜线在平面上的射影”的概念定义是不够严密的。

斜线在平面上射影定义：过斜线上的一点向平面引垂线，过斜足和垂足的直线叫做斜线在这个平面上的射影。

当“斜线上的一点”取斜线与平面的交点（即斜足）时，它在平面上的射影就是自己，即斜足与垂足重合的。此时，经

过斜足和垂足的直线不能确定（它们是平面内过斜足的线束）。此时，斜线的射影不能确定（从而，直线与平面所成的角也不能确定）。

若在定义中申明斜线上的一点不取斜足就弥补了这个缺欠。

3．概念表述的多样性

辩证法认为，矛盾的双方因一定的条件向其对立面转化。黑格尔在《逻辑学》中说：“被下定义的对象愈丰富，也就是说，它可以供考查的不同方面愈多，那么根据这些方面所下的定义可能就有愈大的区别”．列宁把这段话概括为“定义可能有许多，因为对象有许多方面——例如关于生命、国家等等的定义”.德国著名的构造主义哲学家维特根斯坦在他的《数学哲学基础》一书中更具体地说：“词语的意义在于它的应用”．在数学中只能联系具体的证明和计算去谈论相应的概念。

数学概念正是由于它的高度抽象性决定了它对象内容的丰富性，因而它的表述方式在不同的命题中，在命题的推理中展现出不同的表述方式。

（1）例如二面角的平面角的概念，它可以有多种表述（解释）．

①在一些简单的问题中它以定义的表述形式出现，即“以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫二面角的平面角．”

例1　如图10-1，以等腰直角三角形斜边BC上的高AD为折痕，使$\triangle ABD$和$\triangle ACD$折成互相垂直的两个面。

求证　$\angle BAC=60^\circ$

证明　由于AD是等腰直角三角形斜边BC上的高，从而$BD\perp AD$；$CD\perp AD$。

$\therefore$　$\angle BDC$是二面角B-AD-C的平面角。

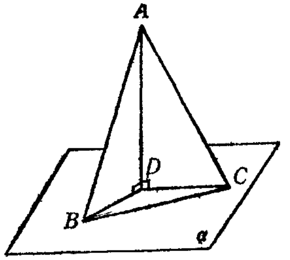

图10-1

再由面面垂直定义知$\angle BDC=90^\circ$，

不难证明，$\triangle ABC$（图10-1）是正三角形，$\therefore\angle BAC=60^\circ$。

证明过程表明，此题中的平面角$\angle BDC$就是以定义的表述形式出现的。

例 2　平行四边形$ABCD$，对角线$BD\perp BC$，以BD为折痕将$\triangle CBD$折起到$C'BD$的位置。

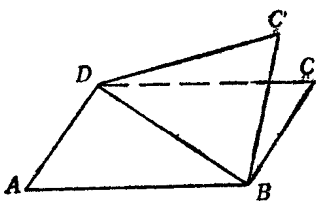

图10-2

求证　二面角C'-BD-C与异面直线AD与$C'B$所成的角相等或互补。

证明　如图10-2 由于$CB\perp BD$，$C'B\perp BD$。

$\therefore$　$\angle C'BC$ 即是二面角C'-BD-C的平面角，又由于$AD\parallel BC$

$\therefore$　$\angle C'BC$等于异面直线AD与$C'B$所成角或互补。证明过程表明，此题中的平面角$\angle C'BC$也是以定义的表述形式出现的。

②二面角的平面角的意义又可表述成“若一个平面垂直于二面角的棱，那么这个平面与二面角的两个面的交线所夹的角即是二面角的平面角”。

这个命题不难证明（从略）。

也就是二面角的平面角可以用二面角的棱的一个垂面与

二面角的两个面的交线来表述（如图10－3 中的 a、b 所夹角）。

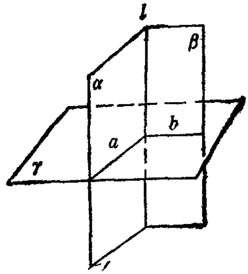

图10－3

例1　自二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 内一点 P 分别向两个面引垂线 $PA\perp$ 平面 α 于 A，$PB\perp$ 平面 β 于 B。

求证　$\angle APB$ 与二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 互补。

证明　如图10－4，由于 $PA\perp\alpha$，$PB\perp\beta$ 及 $\alpha\cap\beta=l$。

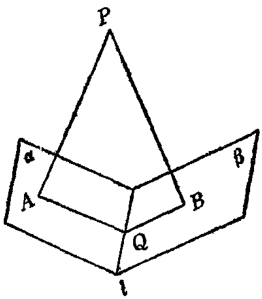

图 10－4

∴　$l\perp PA$，$l\perp PB$，

∴　$l\perp$ 平面 PAB。

QA、QB 是平面 PAB 与面 α、β 的交线，

∴　$\angle AQB$ 是二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$，的平面角，以下证明从略。

证明表明，这里二面角 $\alpha\text{-}l\text{-}\beta$ 的平面角 $\angle AQB$ 的两边是棱 l 的垂面 PAB 与二面角的两个面的交线。

例2　三棱锥 $V\text{-}ABC$ 中，顶点 V 在底面的射影 O 恰落在底面的一条高线 CN 上，M 是棱 VC 上一点，且二面角 $M\text{-}AB\text{-}C$ 等于 $\angle OVC$。

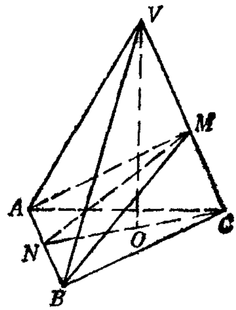

图10－5

求证　$VC\perp$ 平面 MAB。

证明　连接 MN。如图10－5。

由于 $CN\perp AB$ 及 $VO\perp AB$（因为 $VO\perp$ 平面 ABC）