数理逻辑与集合论

石纯一
王家廞

清华大学出版社

数理逻辑与集合论

石纯一　王家廞　编著

清华大学出版社

内 容 简 介

数理逻辑与集合论是离散数学的主要组成部分，是计算机科学的基础数学。

全书共十章．前六章介绍数理逻辑，包括命题和谓词逻辑的基本概念、等值和推理演算以及公理系统．后四章介绍集合论，包括集合、关系、函数、实数集与基数．

本书可作为大学离散数学的教科书．也可供从事计算机科学、人工智能等方面的科技人员参考．

数理逻辑与集合论

石纯一 王家廞 编著

责任编辑 贾仲良

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京昌平环球科技印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：850×1168 1/32 印张：$9^{5}/_{8}$ 字数：250 千字

1990年2月第1版 1990年2月第1次印刷

印数：0001-6000

ISBN 7-302-00557-5/TP·197

定价：2.30 元

前　言

离散数学或计算机数学是大学计算机系的基础数学课程。它是以离散量为研究对象的。而数学分析（微积分）是以连续函数为主要研究对象，属于连续型数学。

由于计算机的软、硬件都具有离散型结构，从而离散数学就成为计算机科学的基本工具了。像 Turing 对可计算性的研究所建立的 Turing 机是计算机的理论模型，导致计算机的出现。Boole 的逻辑代数已十分成功地用于计算机的硬件分析和设计，谓词逻辑演算为人工智能学科提供了一种重要的知识表示和推理方法等。

离散数学的原理和方法常常要求在计算机上的可实现性。而一般数学理论有时仅给出存在性讨论，这是不能满足实用要求的。

离散数学包括数理逻辑、集合论、代数结构、图论、形式语言、自动机和计算几何等。

清华大学计算机系把离散数学安排为“数理逻辑与集合论”和“代数结构与图论”两门课程，分两个学期讲授，各占50学时。

本书是编著者在讲授“数理逻辑与集合论”时所编写的讲义基础上完成的。在讲义的编写中， 孙承镃、陈群秀和赵琦等同志参加了工作，在此表示谢意。

离散数学的参考书较多，而且它的各部分也有专门的书。

本书的编写过程主要参考了王宪钧的“数理逻辑引论”、胡世华和陆钟万的“数理逻辑基础”、陈进元等的“离散数学(上)”和张锦文的“集合论浅说”等书。”

由于编著者水平所限，错误和不当之处在所难免，请读者批评指正。

石纯一　王家廞

1988.3 于清华园

目　　录

概述……………………………………………………………………（1）
第一章　命题逻辑的基本概念 ………………………………………（3）
1.1　命题………………………………………………………………（3）
1.2　命题联结词及真值表……………………………………………（5）
1.3　合式公式…………………………………………………………（13）
1.4　重言式……………………………………………………………（14）
1.5　命题形式化………………………………………………………（16）
1.6　波兰表达式………………………………………………………（19）
习题 1 ……………………………………………………………（20）
第二章　命题逻辑的等值和推理演算………………………………（23）
2.1　等值定理…………………………………………………………（23）
2.2　等值公式…………………………………………………………（25）
2.3　命题公式与真值表的关系………………………………………（31）
2.4　联结词的完备集…………………………………………………（33）
2.5　对偶式……………………………………………………………（36）
2.6　范式………………………………………………………………（38）
2.7　推理形式…………………………………………………………（46）
2.8　基本的推理公式…………………………………………………（49）
2.9　推理演算…………………………………………………………（52）
2.10　归结推理法………………………………………………………（55）
习题 2 ……………………………………………………………（58）
第三章　命题逻辑的公理化 …………………………………………（61）
3.1　公理系统的结构…………………………………………………（61）
3.2　命题逻辑的公理系统……………………………………………（62）

3.3 公理系统的完备性和演绎定理……………………………… (67)
3.4 命题逻辑的另一公理系统——王浩算法…………………… (69)
3.5 命题逻辑的自然演绎系统……………………………………… (74)
3.6 非标准逻辑……………………………………………………… (76)
习题 3 ……………………………………………………………… (81)

第四章 谓词逻辑的基本概念 ………………………………………… (82)
4.1 谓词和个体词…………………………………………………… (83)
4.2 函数和量词……………………………………………………… (86)
4.3 合式公式………………………………………………………… (89)
4.4 自然语句的形式化……………………………………………… (90)
4.5 有限域下公式 $(\forall x)P(x)$、$(\exists x)P(x)$的表示法 ………… (96)
4.6 公式的普遍有效性和判定问题………………………………… (99)
习题 4 ………………………………………………………………(101)

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算 ………………………………(105)
5.1 否定型等值式……………………………………………………(105)
5.2 量词分配等值式…………………………………………………(108)
5.3 范式………………………………………………………………(113)
5.4 基本的推理公式…………………………………………………(117)
5.5 推理演算…………………………………………………………(120)
5.6 谓词逻辑的归结推理法…………………………………………(125)
习题 5 ………………………………………………………………(128)

第六章 谓词逻辑的公理化 …………………………………………(132)
6.1 谓词逻辑的公理系统……………………………………………(132)
6.2 谓词逻辑的自然演绎系统………………………………………(140)
6.3 递归函数…………………………………………………………(143)
6.4 相等词和摹状词…………………………………………………(151)
习题 6 ………………………………………………………………(154)

第七章 集合 …………………………………………………………(156)
7.1 集合的概念和表示方法…………………………………………(156)

7.2 集合间的关系和特殊集合……(160)
7.3 集合的运算……(163)
7.4 集合的图形表示法……(169)
7.5 集合运算的性质和证明……(171)
7.6 有限集合的基数……(184)
7.7 集合论公理系统……(187)
习题 7 ……(196)

第八章 关系 ……(202)
8.1 二元关系……(202)
8.2 关系矩阵和关系图……(205)
8.3 关系的逆、合成、限制和象……(207)
8.4 关系的性质……(214)
8.5 关系的闭包……(219)
8.6 等价关系和划分……(231)
8.7 相容关系和覆盖……(236)
8.8 偏序关系……(238)
习题 8 ……(245)

第九章 函数 ……(252)
9.1 函数和选择公理……(252)
9.2 函数的合成与函数的逆……(258)
9.3 函数的性质……(265)
9.4 开集与闭集……(268)
9.5 模糊子集……(272)
习题 9 ……(279)

第十章 实数集合与集合的基数 ……(283)
10.1 实数集合 ……(283)
10.2 集合的等势 ……(288)
10.3 有限集合与无限集合 ……(291)
10.4 集合的基数 ……(292)
10.5 基数的算术运算 ……(293)

10.6 基数的比较 ……………………………………………………(296)
10.7 可数集合与连续统假说 ……………………………………(299)
习题10 ……………………………………………………………(300)

概　述

数理逻辑是研究推理逻辑规律的，采用数学符号化的方法，给出推理规则来建立推理体系.进而讨论推理体系的一致性、可靠性和完备（全）性.

数理逻辑的研究方面是两个演算加四论.即命题演算与谓词演算（第一到第六章）、集合论（第七到第十章）、模型论（形式语言语法与语义间的关系）、递归论（可计算性可判定性）和证明论（数学本身的无矛盾性）.

数理逻辑是形式逻辑与数学相结合的产物，也是一门数学.但数理逻辑研究的是各学科包括数学共同遵从的一般性的逻辑规律，而各门学科只研究自身的具体规律.

数理逻辑的创始人是17世纪德国数学家和哲学家Leibniz，他把数学引入形式逻辑.1847年Boole实现了命题演算，1879年Frege建立了第一个谓词演算系统.到本世纪30年代数理逻辑进入了一个新的时期，逻辑学不仅与数学相互渗透与结合，而且与其他科学技术相互渗透与结合，显示了逻辑学的实用意义.1931年Gödel不完全性定理的提出，以及递归函数可计算性的引入，导致了1936年Turing机器的出现，它是现代电子计算机的理想的数学模型.十年后1946年第一台电子计算机诞生.数理逻辑与计算机科学、控制论、人工智能的相互渗透推动了数理逻辑的发展.人们正在模糊逻辑、概率逻辑、归纳逻辑和时态逻辑等方面进行研究.

集合论可看作为数理逻辑的一个分支，也是一门现代数学，是各个数学分支的共同语言和基础.

集合论是关于无穷集和超穷集的数学理论.古代数学家就已

接触到无穷概念，但对无穷的本质缺乏认识。为微积分寻求严密的基础促使实数集结构的研究，早期的工作都与数集或函数集相关联。

集合论中一直引人注意的一些问题有：选择公理 AC（对任意多个两两不相交的非空集合，存在一个集合与这些非空集合中的每一个都有唯一的一个共同元素）、连续统假设 CH（Cantor 对直线上点的个数问题的猜测）、广义连续统假设 GCH（无穷集的幂集基数的猜测）。

集合论的创始人是Cantor，他从1871年到1883年发表了关于基数、序数和良序集理论的一系列结果。1909年前后在他创建的集合论中发现了种种悖论。1908年Zermelo给出了集合论的第一个公理系统Z。此后人们又提出ZF和GB等公理系统。1938年Gödel证明了用现有的集合论公理系统不能证明CH是假的。1963年Cohen证明，用现有的集合论公理系统也不能证明CH是真的。应当寻求新的工具和方法来解决这个问题。

集合论已在计算机科学、人工智能学科、逻辑学、经济学、语言学和心理学等方面有着重要的应用。

本书以大体相当的篇幅讲述数理逻辑与集合论的基本内容，鉴于这两部分内容的内在密切联系，我们使用数理逻辑的方法来引入集合论的有关概念并证明有关定理。

第一章　命题逻辑的基本概念

命题逻辑研究的是命题的推理演算。这一章介绍命题逻辑的基本概念，包括引入命题联结词，讨论合式公式，重言式以及自然语句的形式化等内容。

1.1　命题

1.1.1　什么是命题

命题是一个非真即假（不可兼）的陈述句。有两层意思，首先命题是一个陈述句，而命令句、疑问句和感叹句都不是命题。其次是说这个陈述句所表达的内容可决定是真还是假，而且不是真的就是假的，不能不真又不假，也不能又真又假。凡与事实相符的陈述句为真语句，而与事实不符的陈述句为假语句。这就是说，一个命题具有两种可能的取值（又称真值）为真或为假，又只能取其一。通常用大写字母T表示真值为真，用F表示真值为假，有时也可分别用1和0表示它们。因为只有两种取值，所以这样的命题逻辑称为二值逻辑。

举例说明命题概念：

1．“雪是白的”。是一个陈述句，可决定真值，显然其真值为真，或说为T，所以是一个命题。

2．“雪是黑的”。是一个陈述句，可决定真值，显然其真值为假，或说为F，所以是一个命题。

3．“好大的雪啊！”不是陈述句，不是命题。

4．“一个偶数可表示成两个素数之和”（古德巴赫猜想）。是

命题，或为真或为假，只不过当今尚不知其是真命题还是假命题.

5. “$1+101=110$”.这是一个数学表达式，相当于一个陈述句，可以叙述为“1加101等于110”，这个句子所表达的内容在十进制范围中真值为假，而在二进制范围中真值为真.可见这个命题的真值还与所讨论问题的范围有关.

1.1.2 命题变项

为了对命题作逻辑演算，采用数学手法将命题符号化（形式化）是十分重要的.我们约定用大写字母表示命题，如以P表示“雪是白的”，Q表示“北京是中国的首都”等等.当P表示任一命题时，P就称为命题变项（变元）.

命题与命题变项含义是不同的，命题指具体的陈述句，是有确定的真值，而命题变项的真值不定，只当将某个具体命题代入命题变项时，命题变项化为命题，方可确定其真值.命题与命题变项象初等数学中常量与变量的关系一样.如5是一个常量，是一个确定的数字，而x是一个变量，赋给它一个什么值它就代表什么值，即x的值是不定的.初等数学的运算规则中对常量与变量的处理原则是相同的，同样在命题逻辑的演算中，命题与命题变项的处理原则也是相同的.因此，除在概念上要区分命题与命题变项外，在逻辑演算中就不再区分它们了.

1.1.3 简单命题和复合命题

简单命题又称原子命题，它是不包含任何的与、或、非一类联结词的命题.如1.1.1中所举的命题例子都是简单命题.这样的命题是不可再分割了，如再分割就不是命题了.而像命题“雪是白的而且$1+1=2$”，就不是简单命题，它可以分割为“雪是白的”以及“$1+1=2$”两个简单命题，联结词是“而且”.在简单命题中，尽管常有主语和谓语，但我们不去加以分割，是将简单命题作为一个不可分的整体来看待，进而作命题演算.

在谓词逻辑里，才对命题中的主谓结构进行深入分析.

仅只限于简单命题的讨论，除分别讨论真值外，再没有可研究的内容了.而命题逻辑所讨论的正是多个命题联结而成的复合命题的规律性.把一个或几个简单命题用联结词（如与、或、非）联结所构成的新的命题称为复合命题，也称为分子命题.复合命题自然也是陈述句，其真值依赖于构成这复合命题的各简单命题的真值以及联结词，从而复合命题有确定的真值.如“张三学英语和李四学日语”就是一个复合命题，由简单命题“张三学英语”“李四学日语”经联结词“和”联结而成，这两个简单命题真值均为真时，这复合命题方为真.

在数理逻辑里，仅仅把命题看成是一个可取真或可取假的陈述句，所关心的并不是这些具体的陈述句的真值究竟为什么或在什么环境下是真还是假，这是有关学科本身研究的问题，而逻辑关心的仅是命题可以被赋予真或假这样的可能性，以及规定了真值后怎样与其他命题发生联系的问题.

1.2 命题联结词及真值表

联结词可将命题联结起来构成复杂的命题，命题逻辑联结词的引入是十分重要的，其作用相当于初等数学里在实数集上定义的+、−、×、÷等运算符.通过联结词便可定义新的命题，从而使命题逻辑的内容变得丰富起来，我们要讨论的仅只是复合命题的真值，可由组成它的相应命题的真值所确定.值得注意的是逻辑联结词与日常自然用语中的有关联结词的共同点和不同点.

下面介绍五个常用的逻辑联结词：

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$

1.2.1 否定词$\neg$

否定词“$\neg$”是个一元联结词.一个命题P加上否定词就形成

了一个新的命题，记作$\neg P$，这个新命题是命题的否定，读作非P。

规定，若命题P的真值为真，那么$\neg P$的真值就为假。若P的真值为假，那么$\neg P$的真值就为真。$\neg P$与P间的真值关系，常常使用称作真值表的一种表格来表示，见图1.2.1

P	$\neg$P		P	$\neg$P
T	F	或	1	0
F	T		0	1

图 1.2.1

也可将图1.2.1看作是对$\neg P$的定义。它表明了$\neg P$的真值如何依赖于P的真值。真值表描述了命题之间的真值关系，很直观，当命题变项的个数不多时，也很容易建立，所以真值表是命题逻辑里研究真值关系的重要工具。

例1：“昨天张三去看球赛了”。这命题以P表示，于是“昨天张三没有去看球赛”，这新命题便可以$\neg P$表示了。

若昨天张三去看球赛了，命题P是真的，那么新命题$\neg P$必然是假的。反之，若命题P是假的，那么$\neg P$就是真的。这符合图1.2.1的描述。

例2：Q：今天是星期三。

　　　$\neg$Q：今天不是星期三。

然而$\neg$Q不能理解为“今天是星期四”，因为“今天是星期三”的否定，并不一定必是星期四，还可能是星期五、星期六……。在这种情况下，要注意否定词的含义是否定被否定命题的全部，而不是一部分。

1.2.2 合取词$\wedge$

合取词“$\wedge$”是个二元命题联结词。将两个命题P、Q联结起来，构成一个新的命题$P \wedge Q$，读作P、Q的合取，也可读作P与Q。这个新命题的真值与构成它的命题P、Q的真值间的关系，由

合取词真值表图1.2.2来规定。

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

图 1.2.2

图1.2.2指出，只有当两个命题变项$P=T$，$Q=T$时方有$P\wedge Q=T$，而P、Q只要有一为F则$P\wedge Q=F$。这样看来，$P\wedge Q$可用来表示日常用语P与Q，或P并且Q。

例3：P：教室里有10名女同学。

Q：教室里有15名男同学。

不难看出，命题“教室里有10名女同学与15名男同学”，便可由$P\wedge Q$来描述了。

例4：A：今天下雨了。

B：教室里有100张桌子。

可知$A\wedge B$就是命题“今天下雨了并且教室里有100张桌子”。

P、Q、A、B都是简单命题，通过合取词$\wedge$，得到了复合命题$P\wedge Q$，$A\wedge B$。复合命题通过$\wedge$还可得到复合命题的复合命题。

日常自然用语里的联结词“和”、“与”、“并且”，一般是表示两种同类有关事物的并列关系的（如例3）。而在逻辑语言中仅考虑命题与命题之间的形式关系或说是逻辑内容，并不顾及日常自然用语中是否有此说法。这样，“$\wedge$”同“与”、“并且”又不能等同视之。例4在日常自然用语中是不出现的语句，因A，B毫无联系，然而在数理逻辑中$A\wedge B$是可以讨论的。

日常自然用语中说，“这台机器质量很好，但是很贵”，这句话的含义是说同一台机器质量很好而且很贵。若用P表示“这台机器质量很好”，用Q表示“这台机器很贵”，那么这句话的

逻辑表示就是$P\wedge Q$.尽管这句话里出现的联结词是"但是".总之，合取词有"与"、"并且"的含义，但逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象，两者并不是等同的，这是需注意的.

1.2.3 析取词$\vee$

析取词"$\vee$"是个二元命题联结词.将两个命题P、Q联结起来，构成一个新的命题$P\vee Q$，读作P、Q的析取，也读作P或Q.这个新命题的真值与构成它的命题P、Q的真值间的关系，由析取词真值表图1.2.3来规定.

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

图 1.2.3

图1.2.3指出，当P、Q有一取值为T时，$P\vee Q$便为T.仅当P、Q均取F值时，$P\vee Q$方为F.这就是析取词的定义，$P\vee Q$可用来表示自然用语P或Q.

例5：P：今天刮风.

　　Q：今天下雨.

命题"今天刮风或者下雨"便可由$P\vee Q$来描述了.

例6：A：2小于3.

　　B：雪是黑的.

$A\vee B$就是命题"2小于3或者雪是黑的".由于2小于3是真的，所以$A\vee B$必取值为真，尽管"雪是黑的"这命题取假.

同样需注意析取词同"或"的异同.

1.2.4 蕴涵词$\rightarrow$

蕴涵词"$\rightarrow$"也是个二元命题联结词.将两个命题P、Q联结

起来，构成一个新的命题$P \to Q$，读作如果P则Q，或读作P蕴涵Q，如果P那么Q，其中P称前件（前项、条件），Q称后件（后项、结论）.

规定只有当P为T而Q为F时，$P \to Q = F$.而$P = F$、Q任意，或$P = T$、$Q = T$时$P \to Q$均取值为T. 真值表见图1.2.4.

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

图 1.2.4

引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系.

图1.2.4说明了：

$P \to Q = T$ 下，若$P = T$ 必有$Q = T$，而不会出现$Q = F$，这表明$P \to Q$体现了P是Q成立的充分条件.

$P \to Q = T$ 下，若$P = F$ 可有$Q = T$，这表明$P \to Q$体现了P不必是Q成立的必要条件.

使用$P \to Q$能描述推理.即$P \to Q$为真时，只要P为真必有Q真，而不能出现P真而Q假就够了.至于P为假时，Q取真取假，并不违背P为真时Q必真.从而仍可规定P为假时，$P \to Q$取真.这当然只是对$P \to Q$的一种说明，而从逻辑上说，本可按真值表定义$P \to Q$，可不必涉及具体含义.另外，当$P = F$时对$P \to Q$真值的不同定义方式将给推理的讨论带来不同的表示形式，也是允许的.

图1.2.5是$\neg P \vee Q$的真值表，显然图1.2.4同1.2.5是相同的，在P、Q的所有取值下，$P \to Q$同$\neg P \vee Q$都有相同的真值，于是可记作

$$P \to Q = \neg P \vee Q$$

（真值相同的等值命题以等号联结）.这也说明→可由¬、∨来表