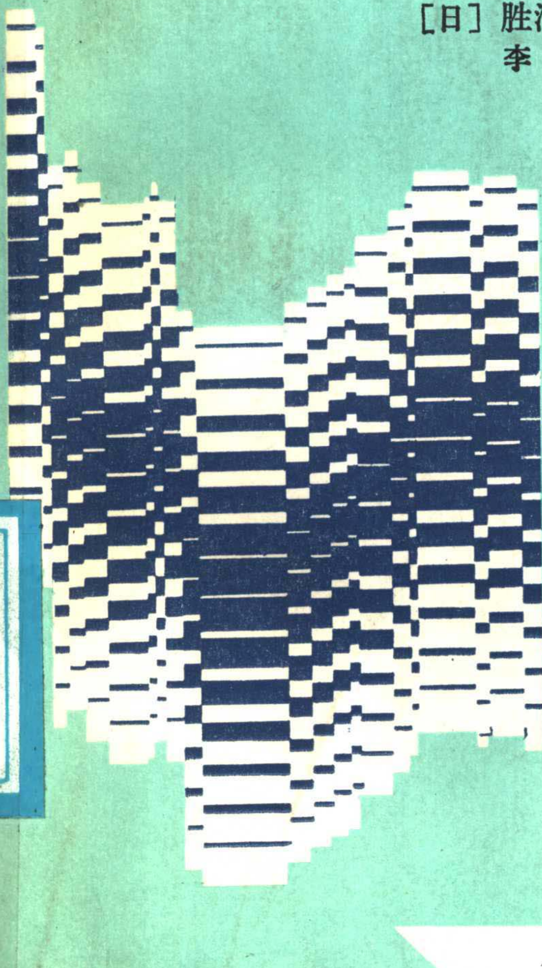
日本新高中数学研究丛书 2

数与式



[日] 胜浦捨造 著
李瑞年 译

文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 2

数 与 式

[日] 胜浦捨造 著
李瑞年 译

文化教育出版社

内容提要

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书，原书共分十五册，书中除有中学数学传统题材外，还包括了一些较新的内容.

本册主要内容有集合，数的四则运算，数的集合与运算，剩余系，平方根，大小关系，整式及其加法、减法、乘法、除法，因式分解，整式的最高公因式与最低公倍式，恒等式，剩余定理、因式定理，分式及其计算，部分分式，比例，无理式，式子的值，等式的证明等. 叙述比中学教材广泛、深入、易懂，可供中学数学研究人员、中学数学教师，中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书 2

数 与 式

[日]胜浦捨造 著

李瑞年 译

*

文化教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 7.75 字数 155,000

1985 年 1 月第 1 版 1987 年 2 月第 1 次印刷

印数 1— 3,500

书号 7057·082 定价 0.98 元

译者的话

这套丛书，译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书. 原书共分十五册，我们译出了其中的第二册至第十三册，本册是第二册. 丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容.

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂. 对基础知识作了系统整理、归纳概括、重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究，可供我国中学数学教师和高中学生研究参考.

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的. 本册由沈阳市教育学院李瑞年同志译出，最后由我院教研部钱永耀同志审校.

由于时间仓促以及译者和校者水平所限，缺点错误，恐难避免. 希望读者提出宝贵意见.

辽宁教育学院

1982年10月

序　　言

正确地理解数和式子的结构，并能对它们进行正确的计算，乃是学习整个数学的基础，这一点是无须赘言的．特别是

1．在进行数学研究或解答数学问题的时候，实际所考虑的就是对式子的计算．如果不能采用恰当的方法进行正确的计算，那么就得不出研究的成果，问题也得不到解决．

2．见到一个式子，应予见到："按怎样的步骤变形，这样做了之后又会得到怎样的式子．"这一点是至关重要的．为此，必须练习处理各种形式的式子，必须熟悉对它们的计算．

试看现在高中生的实际情况，有很多人对于数或式及其计算不能理解，由于练习不足，而达不到上述1、2两项要求，就断言说："我搞不了数学，不擅长啊！"此外，诸如运算或剩余系等等的思考方法，作为数学基础，乃是非常重要的．而对于这些"思考方法"也有许多人深感困难．

在本书里，总括了高中数学中关于数与式的全部内容，以

更加广泛，更加深入，更加易懂

为宗旨，是为了使苦于数学的人能够爱好数学，使擅长数学的人更加爱好而写的．另外，这里也收录了发展应用的各种问题，确信本书是准备高考最适合的指导书．

特别是，作为本书的特点是致力于通过

解说——→例题——→发展题——→练习

进行反复学习，使得读者在不知不觉中形成能力. 如能充分运用本书，读者定会增强实力，这是确信无疑的.

著　者

几点说明

如序言所述，本书是一本独具风格的参考书，可使苦于学习数学的人容易理解，又能使擅长数学的人更加爱好．为此，本书的结构编排如下．

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目，凡披阅所及均能一目了然；同时，解说既能配合教科书，又写得

更加广泛，更加深入，更加易懂．

在解说后面的提要中，归纳出重要的公式．因此，希望读者在理解解说的同时，必须把它记住．另外，用竖线把版面分成不等的两部分，在左边列记重要项目，以便提高学习效率．

例题——→发展题——→练习

本书最大的优点是，力求在理解解说的基础上反复学习例题、发展题、练习题，使在不知不觉中增强解决问题的实际能力．虽然由例题到发展题，依次提高了难度，但又借助于解法和要点，指出了它的思考方法和解题要领；所以，希望读者反复学习，使对这两种问题，达到几乎能够背诵的程度．总之，学习数学最重要的是

要循序渐进，逐步积累学习方法．

为此，建议读者要反复进行学习．如果前面两个内容都能掌握，解练习题时就不会感到什么困难；反之，如果不大会解练习题，那就应该认为学习得还不够深刻．

习题

分为 A、B 两部分．A 的程度相当于例题和发展题，B 中还包含着稍难的问题．因为在高考试题中，这种程度的题目出得最多，所以，对有志于参加高考的读者，这些是不可缺少的问题．

虽然常说，学习数学背下来也没有用，但那是指不结合思维的机械记忆．本书不提倡单纯的记忆．对于数学，在适当指导"怎样进行思考"之后，应记忆应用范围较广的知识．

深切地希望本书的读者，能真正理解数学，从而获得广泛应用数学的实际本领．

目　录

1. 集合

集合

集合——满足一定条件的事物的全体.

元素

元

构成集合的每件事物叫做这个集合的**元素**或**元**.

$x \in A$

把 x 是集合 A 的元素，记作 $x \in A$ 或 $A \ni x$. 这时就说"x 属于 A"，"x 在 A 中"，"A 含有 x".

$x \notin A$

把 x 不是集合 A 的元素，记作 $x \notin A$ 或 $A \not\ni x$.

例 对于自然数集合 N，有 $2 \in N$，$-1 \notin N$，$1.5 \notin N$.

对于整数集合 Z，有 $2 \in Z$，$-1 \in Z$，$1.5 \notin Z$.

对于有理数集合 Q，有 $2 \in Q$，$-1 \in Q$，$1.5 \in Q$.

集合的表示方法

(1) **揭示条件的方法**：记成 $\{x \mid x$所满足的条件$\}$的形式；

(2) **列举元素的方法**：记成 $\{a, b, c, d\}$ 的形式.

例 由 1 至 5 的整数的集合：

(1) $\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 5,\ x$ 是整数$\}$；

(2) $\{1,2,3,4,5\}$.

$A=B$

$A=B$——集合 A 和 B 的元素完全相同.(集合 A 和 B 相等)

$A\neq B$

$A\neq B$——集合 A 和 B 不相等.

例 $A=\{x\mid x^2=1\}, B=\{1,-1\}$ 时, $A=B$;

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ 时, $A\neq B$.

子集合

$A\subseteq B$

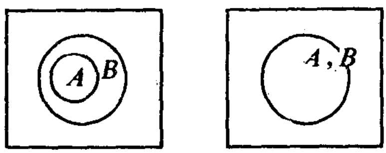
子集合, $A\subseteq B$——A 的元素都是 B 的元素($A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$). 这时说, A 包含于 B, B 包含 A.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\supseteq B$ 时, 有 $A=B$.

真子集合

$A\subset B$

真子集合, $A\subset B$——$A\subseteq B$ 且 $A\neq B$, 也就是, A 的元素都属于 B, 而且 B 中有不属于 A 的元素.



$A\subset B$　　$A=B$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A\subseteq B}$$

空集合 $\varnothing$

空集合, $\varnothing$——不包含任何元素的集合.

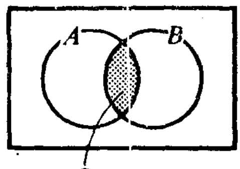
空集合可作为任何集合的子集合.

$A\cap B$

$A\cap B$——**由同时属于集合 A 和 B 的一切元素所组成的集合** $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{且} x\in B\}$

交集合　交
$A\cup B$

叫做A, B的**交集合**或**交**.

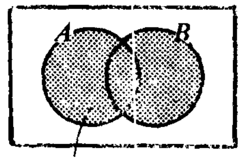


$A\cap B$

$A\cup B$——至少属于A, B之一的一切元素的集合

和 · 并

$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$叫做 A, B的**和集合**或**并**.



$A\cup B$

例　当 $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{3,4\}$时,

$A\cap B=\{2\}$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cup C=\{2,3,4\}$.

设有两个集合A, B, 对于$a\in A$, $b\in B$, 我们约定把A的元素放在前面, B的元素放在后面, 作出关于a, b的组(a,b).

例　当 $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$时, 若把这样的组全写出来, 就是

$(1,3)$, $(1,4)$, $(2,3)$, $(2,4)$.

关于由A、B作出的组(a,b), (a',b'), 仅当$a=a'$, $b=b'$时规定为$(a,b)=(a',b')$. 由A、B作出的这样的组(a,b)的全体构成的集合叫做A和B的**直积**, 记作$A\times B$.

直　积
$A\times B$

例　$A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$时,

$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$;

$B\times A=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$.

提　要

关于集合的用语，记号

元素，元，$x \in A$，$A=B$，子集合，$A \subseteq B$，真子集合，$A \subset B$，空集合，ϕ，交集合，交，$A \cap B$，和集合，并，$A \cup B$，直积，$A \times B$.

例题 1. 对自然数集合 N，整数集合 Z，有理数集合 Q，回答下列问题:

(1) 关于三个集合 N, Z, Q，有怎样的包含、被包含的关系(包含关系)?

(2) 填空:

① $Z \cap Q = \boxed{}$; ② $Z \cup Q = \boxed{}$;

③ $Z = N \cup \{-x \mid x \in N\} \cup \boxed{}$ (其中，填入$\boxed{}$里的集合和N及$\{-x \mid x \in N\}$都没有公共元素.).

解法 (1) 自然数集合 $N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$,

整数集合 $Z=\{\cdots\cdots, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\}$

故，N是Z的真子集合，$N \subset Z$

有理数就是可以表示成分数$\frac{a}{b}$(a, b是整数，$b \neq 0$) 形式的数. 任何整数都可以表示成形如

$$3=\frac{3}{1}, -4=\frac{-4}{1}, 0=\frac{0}{1}$$

的分母是1的分数. 就是说，**所有整数都是有理数.**

因此，可以说Z是Q的子集合. 但是，还有象1.5这样的是有理数而不是整数的数，所以Z是Q的真子集合. $Z \subset Q$.

通过上面的考察，得到 $N\subset Z, Z\subset Q$. 把这两个关系连结起来，就有 $N\subset Q$. 一般把这些关系合起来表示为 $N\subset Z\subset Q$.

(2) ①② 由 Z 是 Q 的真子集合，有 $Z\subset Q$. 这时再考虑交 $Z\cap Q$，并 $Z\cup Q$ 应是怎样的.

③ 符号 $\{-x \mid x\in N\}$ 表示"把集合 N 的所有元素冠以负号'—'的数的集合"，就是 $\{-1, -2, -3, \cdots\}$. 详细地写出来，就是 $\{x \mid x=-n, n\in N\}$.

中应填入以 0 为元素的集合符号.

解 (1) $N\subset Z\subset Q$.

(2) ① Z; ② Q; ③ $\{0\}$.

发展题

就有理数集合 Q，无理数集合 P，实数集合 R，回答下列问题:

(1) 化简 $Q\cap P, Q\cup P$.

(2) 答出 Q 和 R，P 和 R 的包含关系.

(3) 化简 $(Q\cap R)\cap P, (Q\cup R)\cap P$.

要点

(1) "把不是有理数的数称做无理数."

"有理数和无理数统称为实数."

把这样的说法更确切地用集合的交与并表示出来应是怎样的.

解 (1) 没有既是有理数又是无理数的数. 就是说，同时属于有理数集合 Q 和无理数集合 P 的元素不存在.

$$\therefore \quad Q\cap P=\varnothing \qquad \text{(答)}$$

有理数集合 Q 和无理数集合 P 的并是实数集合 R. 就是

$$Q\cup P=R \qquad \text{(答)}$$

(2) 上面的 $Q\cup P=R$ 已经明显地表

示了有理数集合 Q 是实数集合 R 的子集合，而且 Q 是 R 的真子集合.

$Q\subset R$ （答）

同样的，无理数集合 P 也是实数集合 R 的真子集合.

$P\subset R$ （答）

（3）由括号里面考虑起. 参考(1),(2)的答案.

(3) $(Q\cap R)\cap P$

$=Q\cap P$ （由 $Q\subset R$，故 $Q\cap R=Q$）

$=\varnothing$ （由①, $Q\cap P=\varnothing$）

$(Q\cup R)\cap P$

$=R\cap P$ （由 $Q\subset R$，故 $Q\cup R=R$）

$=P$ （由 $P\subset R$，故 $R\cap P=P$）.

练习 （答案 189 页）

1. 关于自然数集合 N，整数集合 Z，下面各是怎样的集合？对于不是空集合的，各写出它们的五个元素.

   (1) $E=\{2x\mid x\in Z\}$； (2) $F=\{2x-1\mid x\in Z\}$；

   (3) $E\cap N$； (4) $E\cap F$.

2. 当 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3,4\}$ 时，分别写出下面各集合的全体元素：

   (1) $A\times B$； (2) $B\times A$； (3) $A\times A$.