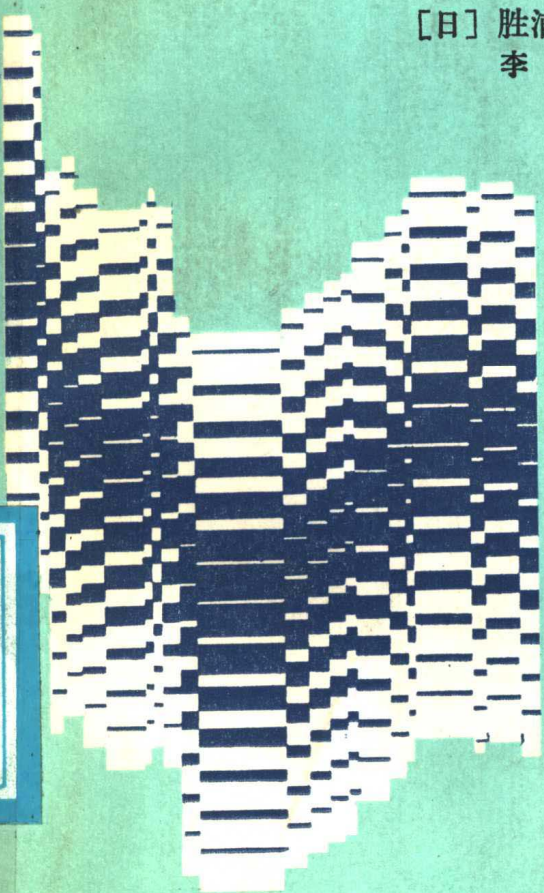


日本新高中数学研究丛书 2

数与式

[日] 胜浦捨造 著
李瑞年 译



文化教育出版社

日本新高中数学研究丛书 2

数 与 式

[日] 胜浦捨造 著

李瑞年 译

文化教育出版社

内 容 提 要

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书,原书共分十五册,书中除有中学数学传统题材外,还包括了一些较新的内容.

本册主要内容有集合,数的四则运算,数的集合与运算,剩余系,平方根,大小关系,整式及其加法、减法、乘法、除法,因式分解,整式的最高公因式与最低公倍式,恒等式,剩余定理、因式定理,分式及其计算,部分分式,比例,无理式,式子的值,等式的证明等.叙述比中学教材广泛、深入、易懂,可供中学数学研究人员、中学数学教师,中学学生在研究、教学或自学中参考.

日本新高中数学研究丛书 2

数 与 式

[日]胜浦拾造 著

李瑞年 译

*

文化教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 7.75 字数 155,000

1985年1月第1版 1987年2月第1次印刷

印数 1—3,500

书号 7057·082 定价 0.98 元

译者的话

这套丛书,译自日本旺文社出版的新高中数学研究丛书。原书共分十五册,我们译出了其中的第二册至第十三册,本册是第二册。丛书包括了中学数学教材中一些较新的内容。

这套丛书的特点是比教材内容广泛、深入、易懂。对基础知识作了系统整理、归纳概括、重视典型例题的解题方法、解题要点、思考方法的研究,可供我国中学数学教师和高中学生研究参考。

这套丛书是由我院教研部组织辽宁师范学院数学系、沈阳师范学院数学系、沈阳市教育学院数学系等单位合译的。本册由沈阳市教育学院李瑞年同志译出,最后由我院教研部钱永耀同志审校。

由于时间仓促以及译者和校者水平所限,缺点错误,恐难避免。希望读者提出宝贵意见。

辽宁教育学院

1982年10月

序 言

正确地理解数和式子的结构，并能对它们进行正确的计算，乃是学习整个数学的基础，这一点是无须赘言的。特别是

1. 在进行数学研究或解答数学问题的时候，实际所考虑的就是对式子的计算。如果不能采用恰当的方法进行正确的计算，那么就得出研究的成果，问题也得不到解决。

2. 见到一个式子，应予以见到：“按怎样的步骤变形，这样做了之后又会得到怎样的式子。”这一点是至关重要的。为此，必须练习处理各种形式的式子，必须熟悉对它们的计算。

试看现在高中生的实际情况，有很多人对于数或式及其计算不能理解，由于练习不足，而达不到上述1、2两项要求，就断言说：“我搞不了数学，不擅长啊！”此外，诸如运算或剩余系等等的思考方法，作为数学基础，乃是非常重要的。而对于这些“思考方法”也有许多人深感困难。

在本书里，总括了高中数学中关于数与式的全部内容，以

更加广泛，更加深入，更加易懂

为宗旨，是为了使苦于数学的人能够爱好数学，使擅长数学的人更加爱好而写的。另外，这里也收录了发展应用的各种问题，确信本书是准备高考最适合的指导书。

特别是，作为本书的特点是致力于通过

解说——→例题——→发展题——→练习

进行反复学习，使得读者在不知不觉中形成能力。如能充分运用本书，读者定会增强实力，这是确信无疑的。

著 者

几点说明

如序言所述,本书是一本独具风格的参考书,可使苦于学习数学的人容易理解,又能使擅长数学的人更加爱好.为此,本书的结构编排如下.

主张划分细目

本书各部分尽量划分细目,凡披阅所及均能一目了然;同时,解说既能配合教科书,又写得

更加广泛,更加深入,更加易懂.

在解说后面的提要中,归纳出重要的公式.因此,希望读者在理解解说的同时,必须把它记住.另外,用竖线把版面分成不等的两部分,在左边列记重要项目,以便提高学习效率.

例题——→发展题——→练习

本书最大的优点是,力求在理解解说的基础上反复学习例题、发展题、练习题,使在不知不觉中增强解决问题的实际能力.虽然由例题到发展题,依次提高了难度,但又借助于解法和要点,指出了它的思考方法和解题要领;所以,希望读者反复学习,使对这两种问题,达到几乎能够背诵的程度.总之,学习数学最重要的是

要循序渐进,逐步积累学习方法.

为此,建议读者要反复进行学习.如果前面两个内容都能掌握,解练习题时就不会感到什么困难;反之,如果不大能解练习题,那就应该认为学习得还不够深刻.

习题

分为 A 、 B 两部分。 A 的程度相当于例题和发展题， B 中还包含着稍难的问题。 因为在高考试题中， 这种程度的题目出得最多， 所以， 对有志于参加高考的读者， 这些是不可缺少的问题。

虽然常说， 学习数学背下来也没有用， 但那是指不结合思维的机械记忆。 本书不提倡单纯的记忆。 对于数学， 在适当指导“怎样进行思考”之后， 应记忆应用范围较广的知识。

深切地希望本书的读者， 能真正理解数学， 从而获得广泛应用数学的实际本领。

目 录

序言	1
几点说明	3
1. 集合	1
集合, 元素, 元, $x \in A$, $x \notin A$, 集合的表示方法, $A = B$, $A \neq B$, 子集合, $A \subseteq B$, 真子集, $A \subset B$, 空集合, $\emptyset$, $A \cap B$, 交集, 交, $A \cup B$, 和, 并, 直积, $A \times B$.	
2. 数的四则运算	7
四则运算, 运算的基本法则, 单位元, 逆元, 相反数, 减法与相反数, 倒数, 除法与倒数.	
3. 数的集合与运算	13
自然数集合与四则运算, 整数集合与四则运算, 有理数集合与四则运算, 无理数集合与四则运算, 实数集合与四则运算, 运算.	
4. 剩余系	22
剩余类, 剩余类与加法, 剩余类与乘法, 剩余系, 加法, 乘法, 加法表, 乘法表, 运算基本法则, 单位元, 逆元, 反数, 倒数, 减法, 减法与反数, 除法, 除法与倒数.	
5. 平方根	32
平方根, 根号($\sqrt{\quad}$), 双重符号($\pm$), 平方根的计算公式, 分母有理化, 有理数, 无理数, 实数, 无理数与有理数的和、积.	

6. 大小关系	42
实数的大小关系, $a \geq b$, 顺序关系, 不等式的性质.	
习题(1~13)	48
7. 整式和它的加法、减法	51
单项式, 单项式的次数, 函数, 特定字母的次数与系数, 多项式, 整式, 整式的项, 常数项, 整式的次数, 同类项, 括号的用法, 脱括号的方法, 整式的加减.	
8. 整式的乘法	61
指数法则, 计算的基本法则, 单项式与多项式的乘法, 多项式与多项式的乘法, 展开, 乘法公式.	
9. 整式的除法	71
指数法则, 除以单项式的除法, 多项式除以多项式的计算方法, 多项式的除法, 除式、被除式、商式、余式的关系, 整除.	
习题(14~26)	80
10. 因式分解	83
因式分解, 因式, 因式分解的公式, 因式分解的步骤.	
11. 整式的最高公因式与最低公倍式	93
因式, 倍式, 公因式, 最高公因式, 公倍式, 最低公倍式, 质因式, 互质, 最高公因式和最低公倍式的关系, 互除法, 最高公因式 $\rightarrow$ 最低公倍式.	
12. 恒等式	103
恒等式, 方程, 恒等变形, 恒等式的基本性质, 待定系数法.	
13. 剩余定理·因式定理	109
符号 $f(x)$ 、 $A(x)$ 、 $p(x)$ 等, 剩余定理, 因式定理.	
习题(27~42)	118

14. 分式	120
分式, 有理式, 分母不得为零, 分式的基本性质, 约分, 既约分式, 约分与变域, 通分, 公分母.	
15. 分式的计算	126
加法, 减法, 乘法, 除法.	
16. 部分分式	136
化为部分分式 化为带分数.	
17. 比例	143
比 $a:b$, 比值, 比的前项、后项, 比例, 外项, 内项, 内项之积与外项之积, 比的变形, 比例的基本变形, 连比, 等比定理.	
习题(43~52)	150
18. 无理式	153
无理式, 有理式, $\sqrt{a^2}$ 的处理, 绝对值的符号 $ a $, 二重根号.	
19. 式子的值	159
关于两个字母的对称式, 基本对称式, 关于三个字母的对称式.	
20. 等式的证明	166
等式 $A=B$ 的证明, 由条件式的形式找出证明的途径, 由结论的形式找出证明的途径.	
21. 整数的性质	178
最大公约数, 最小公倍数, $G.C.M.$ $L.C.M.$ $G.C.M.$ 的求法, 倍数(约数)的辨别方法, 连续整数的积, 整数的分类, 剩余类.	
习题(53~69)	187
练习题答案	189
习题答案	210

1. 集合

集合

元素

元

$x \in A$

$x \notin A$

集合的表示方法

集合——满足一定条件的事物的全体.

构成集合的每件事物叫做这个集合的元素或元.

把 x 是集合 A 的元素, 记作 $x \in A$ 或 $A \ni x$.
这时就说“ x 属于 A ”, “ x 在 A 中”, “ A 含有 x ”.

把 x 不是集合 A 的元素, 记作 $x \notin A$ 或 $A \nmid x$.

例 对于自然数集合 N , 有 $2 \in N$,
 $-1 \notin N$, $1.5 \notin N$.

对于整数集合 Z , 有 $2 \in Z$, $-1 \in Z$,
 $1.5 \notin Z$.

对于有理数集合 Q , 有 $2 \in Q$, $-1 \in Q$,
 $1.5 \in Q$.

(1) 揭示条件的方法: 记成 $\{x | x \text{ 所满足的条件}\}$ 的形式;

(2) 列举元素的方法: 记成 $\{a, b, c, d\}$ 的形式.

例 由 1 至 5 的整数的集合:

(1) $\{x | 1 \leq x \leq 5, x \text{ 是整数}\}$;

$A=B$

$A \neq B$

子集合

$A \subseteq B$

真子集合

$A \subset B$

空集合 $\emptyset$

$A \cap B$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A=B$ ——集合 A 和 B 的元素完全相同.

(集合 A 和 B 相等)

$A \neq B$ ——集合 A 和 B 不相等.

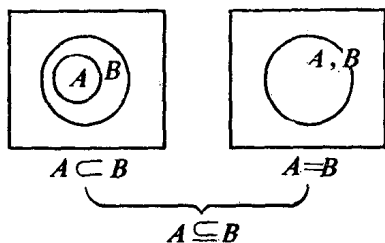
例 $A = \{x | x^2 = 1\}$, $B = \{1, -1\}$ 时, $A = B$;

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ 时, $A \neq B$.

子集合, $A \subseteq B$ —— A 的元素都是 B 的元素 ($A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$). 这时说, A 包含于 B , B 包含 A .

若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$ 时, 有 $A=B$.

真子集合, $A \subset B$ —— $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$, 也就是, A 的元素都属于 B , 而且 B 中有不属于 A 的元素.



空集合, $\emptyset$ ——不包含任何元素的集合.

空集合可作为任何集合的子集合.

$A \cap B$ ——由同时属于集合 A 和 B 的一切元素所组成的集合 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

交集 交

$A \cap B$

和 · 并

直 积

$A \times B$

叫做 A, B 的交集或交.

$A \cup B$ —— 至少属于 A, B 之一的一切元素的集合

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

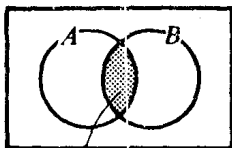
叫做 A, B 的和集合或并.

例 当 $A = \{1, 2\}$,

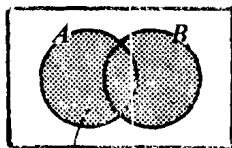
$B = \{2, 3\}, C =$

$\{3, 4\}$ 时,

$A \cap B = \{2\}, A \cap C = \emptyset, B \cup C = \{2, 3, 4\}.$



$A \cap B$



$A \cup B$

设有两个集合 A, B , 对于 $a \in A, b \in B$, 我们约定把 A 的元素放在前面, B 的元素放在后面, 作出关于 a, b 的组 (a, b) .

例 当 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$ 时, 若把这样的组全写出来, 就是

$(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4).$

关于由 A, B 作出的组 $(a, b), (a', b')$, 仅当 $a = a', b = b'$ 时规定为 $(a, b) = (a', b')$. 由 A, B 作出的这样的组 (a, b) 的全体构成的集合叫做 A 和 B 的直积, 记作 $A \times B$.

例 $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$ 时,

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\};$

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}.$

提 要

关于集合的用语, 记号

元素, 元, $x \in A$, $A=B$, 子集合, $A \subseteq B$, 真子集合, $A \subset B$, 空集合, ϕ , 交集, 交, $A \cap B$, 和集合, 并, $A \cup B$, 直积, $A \times B$.

例题 1. 对自然数集合 N , 整数集合 Z , 有理数集合 Q , 回答下列问题:

(1) 关于三个集合 N, Z, Q , 有怎样的包含、被包含的关系(包含关系)?

(2) 填空:

① $Z \cap Q = \boxed{}$; ② $Z \cup Q = \boxed{}$;

③ $Z = N \cup \{-x | x \in N\} \cup \boxed{}$ (其中, 填入 $\boxed{}$ 里的集合和 N 及 $\{-x | x \in N\}$ 都没有公共元素.) .

解法 (1) 自然数集合 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$,

整数集合 $Z = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

故, N 是 Z 的真子集合, $N \subset Z$

有理数就是可以表示成分数 $\frac{a}{b}$ (a, b 是整数, $b \neq 0$) 形式的数. 任何整数都可以表示成形如

$$3 = \frac{3}{1}, -4 = \frac{-4}{1}, 0 = \frac{0}{1}$$

的分母是 1 的分数. 就是说, 所有整数都是有理数.

因此, 可以说 Z 是 Q 的子集合. 但是, 还有象 1.5 这样的是有理数而不是整数的数, 所以 Z 是 Q 的真子集合. $Z \subset Q$.

通过上面的考察,得到 $N \subset Z, Z \subset Q$. 把这两个关系连结起来,就有 $N \subset Q$. 一般把这些关系合起来表示为 $N \subset Z \subset Q$.

(2) ①② 由 Z 是 Q 的真子集合,有 $Z \subset Q$. 这时再考虑交 $Z \cap Q$, 并 $Z \cup Q$ 应是怎样的.

③ 符号 $\{-x | x \in N\}$ 表示“把集合 N 的所有元素冠以负号‘-’的数的集合”, 就是 $\{-1, -2, -3, \dots\}$. 详细地写出来, 就是 $\{x | x = -n, n \in N\}$.

_____ 中应填入以 0 为元素的集合符号.

解 (1) $N \subset Z \subset Q$.

(2) ① Z ; ② Q ; ③ $\{0\}$.

发展题

就有理数集合 Q , 无理数集合 P , 实数集合 R , 回答下列问题:

(1) 化简 $Q \cap P, Q \cup P$.

(2) 答出 Q 和 R, P 和 R 的包含关系.

(3) 化简 $(Q \cap R) \cap P, (Q \cup R) \cap P$.

要点

(1) “把不是有理数的数称做无理数.”

“有理数和无理数统称为实数.”

把这样的说法更确切地用集合的交与并表示出来应是怎样的.

解 (1) 没有既是有理数又是无理数的数. 就是说, 同时属于有理数集合 Q 和无理数集合 P 的元素不存在.

$$\therefore Q \cap P = \emptyset \quad (\text{答})$$

有理数集合 Q 和无理数集合 P 的并是实数集合 R . 就是

$$Q \cup P = R \quad (\text{答})$$

(2) 上面的 $Q \cup P = R$ 已经明显地表

示了有理数集合 Q 是实数集合 R 的子集合, 而且 Q 是 R 的真子集合.

$$Q \subset R \quad (\text{答})$$

同样的, 无理数集合 P 也是实数集合 R 的真子集合.

$$P \subset R \quad (\text{答})$$

(3) 由括号里面考虑起. 参考(1),(2)的答案.

$$\begin{aligned} (3) & (Q \cap R) \cap P \\ &= Q \cap P \quad (\text{由 } Q \subset R, \text{ 故 } Q \cap R \\ & \quad = Q) \\ &= \emptyset \quad (\text{由①, } Q \cap P = \emptyset) \\ & (Q \cup R) \cap P \\ &= R \cap P \quad (\text{由 } Q \subset R, \text{ 故 } Q \cup R \\ & \quad = R) \\ &= P \quad (\text{由 } P \subset R, \text{ 故 } R \cap P \\ & \quad = P). \end{aligned}$$

练习 (答案 189 页)

- 关于自然数集合 N , 整数集合 Z , 下面各是怎样的集合? 对于不是空集合的, 各写出它们的五个元素.
 - $E = \{2x | x \in Z\}$; (2) $F = \{2x-1 | x \in Z\}$;
 - $E \cap N$; (4) $E \cap F$.
- 当 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ 时, 分别写出下面各集合的全体元素:
 - $A \times B$; (2) $B \times A$; (3) $A \times A$.