高中数学复习指导

下

全国十五所重点中学编
天津南开中学主编

天津科学技术出版社

高中课程总复习丛书

高中数学复习指导

（下）

全国十五所重点中学　编
天 津 南 开 中 学　主编

天津科学技术出版社

高中课程总复习丛书

高中数学复习指导

（下）

全国十五所重点中学　编
天 津 南 开 中 学　主编

*

天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道124号
天津新华印刷二厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本 787×1092毫米　1/32　印张 15.75　字数 336,000
一九八六年一月第一版
一九八六年一月第一次印刷
印数：1—73,000

书号：13212·100　　定价：2.35元

前　言

为提高我国普通中学的教育水平，集全国重点中学的教学经验，由天津南开中学组织全国十五所重点中学，编写了这套《高中课程总复习丛书》。参加编写的全国十五所重点中学是：天津南开中学、北大附中、北京景山学校、北京实验中学、北京师院附中、上海师大附中、华东师大一附中、华东师大二附中、南京师大附中、苏州中学、杭州学军中学、福州一中、福州三中、东北师大附中、辽宁省实验中学。丛书包括《高中数学复习指导》（上、下、）、《高中物理复习指导》（上、下）、《高中化学复习指导》、《高中生物复习指导》、《高中语文复习指导》、《高中政治复习指导》、《高中英语复习指导》、《高中历史复习指导》、《高中地理复习指导》共十一册。

本丛书以巩固基础知识，加强基本训练，提高学生灵活运用所学知识的能力为目的，根据中学教学大纲和全国统编教材，归纳出了复习要求、复习要点、例题分析等内容，精心设计和筛选了一定数量的练习题和习题，配置了2～3套综合模拟试题。

本书为《高中数学复习指导》（下），各章编者如下：第九章　上海师大附中　王剑青、毛梦奇；第十章　北京景山学校　徐望根；第十一章　天津南开中学　张学聪；第十二、十三章　天津南开中学　郗昌盛；第十四章　天津南开

中学　林立茂；综合训练题　董晶达、高学仁、郝昌盛；总复习题　高学仁、董晶达、韩子阳、王剑青、王梦奇、徐望根、郝昌盛等。书中带*者为较高要求内容，读者可酌情参考。

由于时间仓促，加之水平所限，书中可能有疏漏不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

一九八五年七月

目　　录

立 体 几 何

第九章 直线与平面

复习要求

一、正确理解并牢固掌握基础知识

1. 平面的概念、平面的基本性质.

2. 空间两条直线的位置关系，异面直线所成的角与距离.

3. 直线与平面的位置关系，线面平行和线面垂直，直线与平面所成的角，三垂线定理.

4. 平面与平面的位置关系，平面与平面的平行和垂直，二面角.

二、具有熟练地进行逻辑推理和逻辑表达的能力

1. 能证明线线、线面、面面之间的位置关系的有关问题.

2. 能证明空间量的相等与比较大小.

3. 能证明或判定空间图形的形状和大小.

4. 能用反证法及同一法证明较简单的问题，并能用简练的数学语言加以表达.

三、具有熟练运算的能力

1．能计算空间两点之间、点线之间、异面直线之间、平面与其平行线之间，以及平行平面之间的距离（对求异面直线的距离一般不要求）．

2．能计算异面直线所成角、直线与平面所成的角、二面角的大小．

3．能运用平面几何的基础知识和解直三角形、解斜三角形、列方程求未知量的基本技能来计算空间量．

四、具有一定的空间想象能力

1．能熟练画出直线和平面各种位置关系的图形．

2．能作较简单的截面．

复习要点

本章重要的基础知识如下：

一、平面

1．平面的基本性质

（1）如果一条直线上的两点在平面内，则此直线上所有的点都在此平面内．此时，称直线在平面内或平面过直线．

（2）如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线，此直线称做两个平面的交线．

（3）过不在同一条直线上的三点可以确定一个平面，也就是说可以作并且只可以作一个平面．

2．平面的表示法　一般都用平行四边形表示一个平面，平面在空间是可以无限伸展的．

3．确定平面的条件

（1）不在同一条直线上的任意三点．

(2) 一条直线和此直线外的一点.

(3) 两条相交直线.

(4) 两条平行直线.

二、两条直线的位置关系

1. 重合　如果两条直线有两个公共点,这两条直线就叫做重合的直线.

2. 相交　两条直线只有一个公共点,这两条直线就叫做相交的直线.

3. 平行　在同一平面内的两条直线如果没有公共点,这两条直线就叫做平行线.

4. 异面直线　不同在任一平面内的两条直线叫做异面直线. 两条异面直线既不平行，也不相交.

(1) 异面直线所成的角　过空间任一点且与两条异面直线分别平行的二直线所成的角（一般是指锐角或直角）. 如果异面直线所成的角是直角，称这两条异面直线互相垂直.

(2) 异面直线的距离. 与两条异面直线都垂直相交的直线叫做异面直线的公垂线。这条公垂线夹在两条异面直线间的线段的长叫做两条异面直线的距离.

两条异面直线的距离,还可以利用下面两个性质来计算:

如果一个平面通过两条异面直线中的一条，且平行于另一条，则后一条直线与平面间的距离等于这两条异面直线的距离.

如果两个平面平行,且分别通过两条异面直线中的一条,则这两个平行平面间的距离等于这两条异面直线的距离.

三、直线和平面的位置关系

1. 直线在平面内.

2. 直线和平面相交　直线和平面只有一个公共点.

(1) 直线和平面垂直　一条直线和一个平面相交，并且和此平面内每一条直线都垂直. 此直线叫做平面的垂线.

直线和平面垂直的判定：

如果一条直线垂直于一个平面内的两条相交直线，则它垂直于这个平面.

直线和平面垂直的性质：

如果一条直线和一个平面垂直，则它垂直于平面内的任何直线.

过一个已知点，并且垂直于一个已知平面的直线是唯一的.

垂直于同一平面的两条直线平行.

(2) 直线和平面斜交　一条直线和一个平面相交，并且不和它垂直，此直线叫做平面的斜线，交点叫做斜足.

直线和平面所成的角：一个平面的斜线和它在此平面内的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角.

一条直线垂直于平面，我们称它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们称它们所成的角是0°的角.

线段的射影的长度：线段l在平面M内的射影是l'，α是此线段和平面M所成的角，则$l'=l\cos\alpha$.

(3) 斜线段和垂线段的长　从平面外一点引此平面的垂线和斜线，这点到垂足和斜足的线段的长.

从平面外一点引此平面的垂线和斜线，垂线段比任何一条斜线段都短，这条垂线段的长叫做从这点到这平面的距离.

从平面外一点引此平面的垂线和斜线，射影相等的两条斜线段也相等，射影较长的那条斜线段也较长（逆命题也成立）．

（4）三垂线定理：平面内的一条直线，如果与此平面的一条斜线的射影垂直，那么它也与这条斜线垂直．

三垂线逆定理：平面内的一条直线，如果与此平面的一条斜线垂直，那么它也与这条斜线在此平面内的射影垂直．

3．直线和平面平行　直线和平面没有公共点．

（1）直线和平面平行的判定：平面外的一条直线，如果和此平面内的一条直线平行，则此直线平行于此平面．

（2）直线和平面平行的性质：如果一条直线与一个平面平行，并且过此直线的一个平面与这个平面相交，则此直线就与交线平行．

如图9-1，直线$a \parallel$平面M，平面N过a且与平面M相交于直线b，则$a \parallel b$．

如果一条直线和一个平面平行，则此直线上所有各点到此平面的距离相等．这个相等的距离为互相平行的直线和平面间的距离．

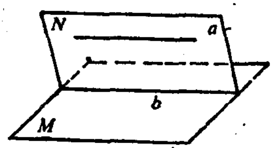

图9-1

四、平面和平面的位置关系

1．重合　一个平面内的所有点都在另一个平面内，则称这两个平面重合．

2．相交　如果两个不重合的平面有一个公共点，则它们必相交于过这点的一条直线．

（1）二面角　从一条直线出发的两个半平面所组成的图

形，叫做二面角．此直线叫做二面角的棱，两个半平面都叫做二面角的面．

如图9-2，在二面角$P\text{-}AB\text{-}Q$的棱AB上任取一点C，分别在面P和Q内作棱AB的垂线CD、CE，则$\angle DCE$叫做二面角的平面角．二面角的度数规定为它的平面角的度数．

90°的二面角叫做直二面角．

（2）两个平面互相垂直　相交成直二面角的两个平面叫做互相垂直的两个平面．

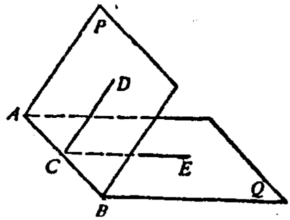

图9-2

两个平面垂直的判定：

一个平面经过另一个平面的一条垂线，则此两个平面互相垂直．

两个平面垂直的性质：

如果两个平面互相垂直，则在一个平面内垂直于它们交线的直线，必垂直于另一个平面．

如果两个平面互相垂直，则过第一个平面内一点而垂直于第二个平面的直线，必在第一个平面内．

如果两个平面都垂直于第三个平面，则它们的交线必垂直于第三个平面．

过已知平面的一条斜线与此平面垂直的平面是唯一的．

3．平行　两个平面没有公共点，称这两个平面互相平行．

（1）两个平面平行的判定　如果两条相交直线同平行于一个平面，则过这两条直线的平面也和这个平面平行．

如果一个平面内的两条相交直线，分别和另一个平面内的两条直线平行，则这两个平面平行．

如果两个平面垂直于同一条直线，则此两个平面平行.

如果两个平面同平行于第三个平面，则此两个平面互相平行.

(2) 两个平行平面的性质　如果两个平面互相平行，在一个平面内的直线，必平行于另一个平面.

两个平行平面都和第三个平面相交，则它们的交线互相平行.

夹在两个平行平面间的平行线段相等。特别地，夹在两个平行平面间的公垂线段相等，公垂线段的长叫做两个平行平面间的距离.

过已知平面外一点，并且和这已知平面平行的平面是唯一的.

(3) 与平行平面有关的一些定理　两条直线被一组平行平面所截，截得的线段对应成比例.

两个角的两边分别对应平行，则这两个角相等或互补.

一条直线垂直于两个平行平面中的一个，则它必垂直于另一个.

例　题

【例1】 P是正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$棱C_1D_1上一点，正方体棱长为1，且$\dfrac{D_1P}{PC_1}=\dfrac{1}{2}$，求过$P$和$AC$所作截面的面积.

分析：本题首先是作截面的问题，一直线和直线外一点可以确定一个平面，但这个平面与正方体相截，截面不是三角形PAC，因为平面PAC与平面A_1C_1有一个公共点P，它们

必相交于过P点的一条直线．又因为平面A_1C_1∥平面AC，根据平行平面被第三个平面所截，所得的两条交线平行的定理，所以过P点的直线PQ∥AC，所得的截面$ACPQ$是一个等腰梯形．

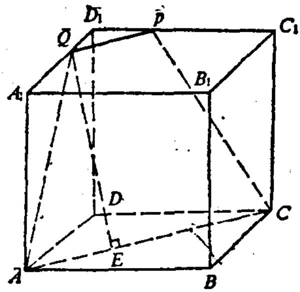

图9-3

解：过点P在平面A_1C_1内作PQ∥A_1C_1，

∵　AC∥A_1C_1，

∴　PQ∥AC．连PC、QA，在梯形$ACPQ$内，作$QE\perp AC$，

∵　正方体棱长为1，

∴　$A_1C_1=AC=\sqrt{2}$．

又　$\dfrac{D_1P}{PC_1}=\dfrac{1}{2}$，

∴　$PQ=\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$，且$\dfrac{D_1Q}{QA_1}=\dfrac{1}{2}$，

$$QA=\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

∵　梯形$ACPQ$为等腰梯形，

∴　$AE=\dfrac{AC-PQ}{2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$．

$$QE=\sqrt{AQ^2-AE^2}=\sqrt{\frac{13}{9}-\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3},$$

$$S_{截面ACPQ}=\frac{1}{2}(AC+PQ)\cdot QE$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{22}\ （平方单位）.$$

【例 2】二面角P-MN-Q的面Q上有一点B，棱MN上有一点A，AB与MN成α的角，AB与平面P所成的角为β，求二面角P-MN-Q的大小.

分析：本题涉及二面角和它的平面角、线面成角的概念．事实上，求二面角就是求它的平面角，此时，须联系三垂线定理.

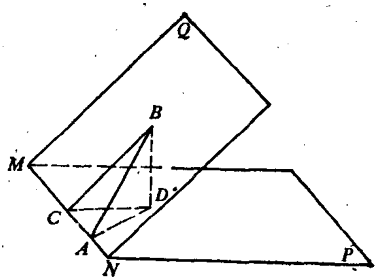

图9-4

解：过B作$BD\perp$平面P，在平面P内，作$DC\perp MN$，连BC，由三垂线定理知：$BC\perp MN$，则$\angle BCD$为二面角P-MN-Q的平面角.

设$AB=a$，由已知$\angle BAC=\alpha$，$\angle BAD=\beta$，

$\therefore\quad BC=a\cdot\sin\alpha,$

$\qquad BD=a\cdot\sin\beta.$

在直角三角形BCD中，

$$\sin\angle BCD=\frac{BD}{BC}$$

$$=\frac{a\sin\beta}{a\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\angle BCD=\arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right),$$

则二面角$P\text{-}MN\text{-}Q$的大小为$\arcsin\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$.

注：求二面角的大小，上述依三垂线定理作出它的平面角的方法是常用的，要熟练掌握.

【例3】 正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，

(1) 求B_1B与A_1C所成角的大小和距离；

(2) 求B_1C与A_1C_1所成角的大小和距离.

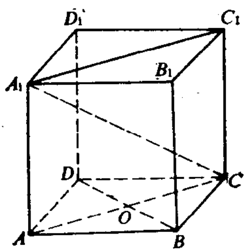

图9-5

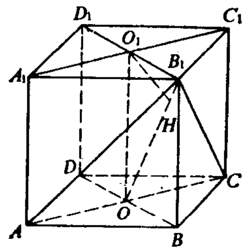

图9-6

解：(1) 连AC，因$A_1A\parallel B_1B$，所以$\angle AA_1C$为B_1B与A_1C所成角，且$B_1B\parallel$平面A_1C，B_1B与平面A_1C的距离即为B_1B与A_1C的距离.

∵ $A_1A\perp AC$，$A_1A=1$，$AC=\sqrt{2}$，$\operatorname{tg}\angle AA_1C=\sqrt{2}$，

∴ B_1B与A_1C所成角$=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

连结BD交AC于点O，$OB\perp AC$，又$OB\perp A_1A$，

∴ $OB\perp$平面A_1C，且$OB\perp B_1B$，