函　　数
解析几何

（試用教材）

成都电訊工程学院

一九七二年八月

毛主席語录

唯物辯証法的宇宙观主張从事物的內部、从一事物对他事物的关系去研究事物的发展，即把事物的发展看做是事物內部的必然的自己的运动，而每一事物的运动都和它的周圍其他事物互相联系着和互相影响着。

函　　数

第一节　函数及其图形

变量与函数

什么是变量，什么是函数？举例来说：

例1．一列火车从北京站开出，速度是70公里/小时，走过的路程S与时间t的关系是

$$S=70t$$

例2．图1是一条灌溉渠道的断面图，底宽$AB=3$米，边坡的坡度是$1:1$（即$EF:AF=1:1$）。CD是水平面，$ABDC$叫做过水断面。设水深$AG=h$，则$\because CG=AG=h$，$\therefore CD=AB+2CG=3+2h$。从而过水断面梯形$ABDC$的面积为

$$Q=\frac{AB+CD}{2}\cdot AG$$

$$=\frac{3+(3+2h)}{2}\cdot h$$

$$=3h+h^2$$

即　　$Q=3h+h^2$

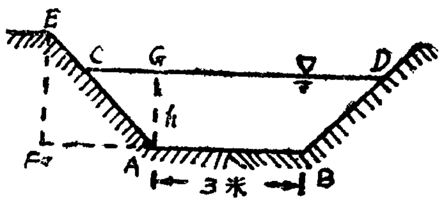


图1

这两个例子中，火车的速度70公里/小时与渠道底宽3米等，在我们研究的问题里是不变的量，叫做常量；时间t、路程S、水深h、过水断面面积Q则是变化着的量，叫做变量。

毛主席教导我们："**每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。**"变量的变化也是如此，它总是与同一过程中其它变量的变化密切相关。如上两例中，路程S随着时间t的变化而变化，面积Q随着深度h的变化而变化。而且相互联系具有一定

的规律性：一个变量取定某个数值时，另一个变量有确定的数值与它相对应。如

当 $t=2$ 小时，　　$S=70\times2=140$(公里)

当 $h=1$ 米，　　$Q=3\times1+1^2=4$(米^2)

一般来说，数值可以任意选择的变量，叫做自变量；如果对于自变量的每一个值，另一个变量有确定的值和它相对应，那么这个变量叫做因变量，或叫自变量的函数。如例1中，t 是自变量，S 是因变量，S 是 t 的函数；例2中，h 是自变量，Q 是因变量，Q 是 h 的函数。

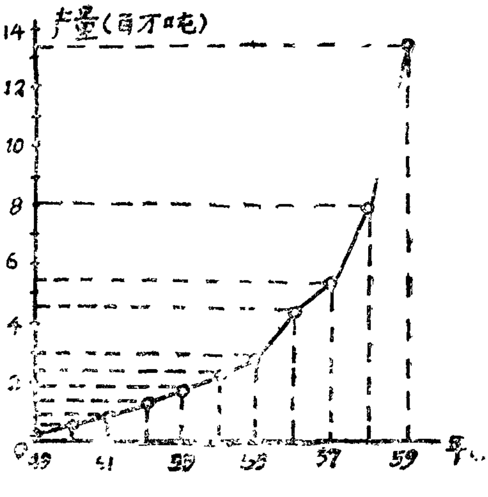
因变量取得的数值，叫做函数值。如 $S=140$ 是对应于 $t=2$ 的函数值，$Q=4$ 是对应于 $h=1$ 的函数值。

两个变量之间的函数关系，不仅能象例1、2那样用公式表示，也可以用表格或图形表示。

例3．解放以来，我国钢产量逐年上升，头11年的产量是：

年　份	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
产　量（万吨）	15.8	60.6	89.6	134.9	177.4	222.5	285.3	446.5	535	800	1335

画成生产图表就是：



2

根据表格或图2都能从某个确定的年份，找到与之相对应的钢产量，如58年的钢产量是800万吨。

1．下列各公式里，那些是常量？那些是变量？在变量中，那些是自变量？那些是自变量的函数？

练　习

(1) 钢的重量 P 与体积 V 的关系是 $p=\rho V$。其中 $\rho=7.8$ 克/厘米^2 是钢的密度；

(2) 物体从空中自由下落(初速为0，不计空气阻力)的路程 S 与时间 t 的关系是

$S=\frac{1}{2}gt^2$。其中 $g=9.8$米/秒^{2}是重力加速度；

(3) 园周长 l 与园半径 r 的关系是 $l=2\pi r$。

2. 举出一些常量、变量、自变量、函数的实例。

3. 写出下列函数关系的公式表达式：

(1) 正方形的面积 S 是边长 a 的函数；

(2) 一铜球在 0 ℃时的体积是100立方厘米，温度每增加 1 ℃，体积增加0.057立方厘米，铜球体积 V 是温度 T 的函数；

(3) 等腰直角三角形的斜边长 y 是直角边长 x 的函数。

4. 根据上题中列出的函数关系，计算函数值：

(1) 当正方形边长 a 分别取 2 厘米、5 厘米、7.5厘米时，函数值 S 各是多少？

(2) 加热到 $T=200$℃时，铜球的体积 $V=$？

(3) 直角边长 $x=\sqrt{2}$ 时，斜边长 $y=$？

函数的图形

在实际工作中，我们经常用图形来表示函数关系。用图形表示函数关系具有形象、醒目的特点。如从图 2 可以看出：解放后11年中我国钢产量是逐年上升的，而且57～59年间上升得特别快，这说明了社会主义制度的优越性，以及党的总路线的无比威力。

为了深入地了解函数图形的概念，下面先介绍"直角坐标系"，然后举例说明，用公式表示的函数的关系如何作图。

直角坐标系

大家知道，要确定长方形板上园孔的位置，只要给定两个尺寸：园心到左边缘的距离与园心到下边缘的距离(图 3)。校阅一页教材，要指出一个错别字，必须说明它在第几行的第几个字。这些例子说明：只要先立个基准，用两个数就可以表示平面上一件东西的位置。

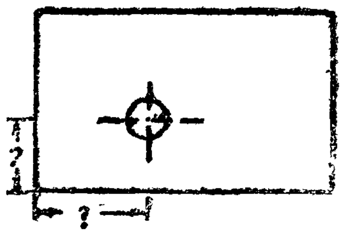


图 3

这种方法运用到数学上，就是"直角坐标系"的概念：在平面内，作两条互相垂直的数轴，使它们在原点相交，水平数值向右为正，竖直数轴向上为正，这样就建立了一个直角坐标系(图 4)。其中水平数轴叫做横坐标轴或 x 轴，竖直数轴叫做纵坐标轴或 y 轴，，交点 0 叫做坐标原点，简称原点。

建立了直角坐标系以后，平面上一个点的位置可以用一对(两个)有次序的数来表示。例如，为了表示图 5 中点 A 的位置，可分别从 A 点作 x 轴与 y 轴的垂线，与 x 轴的交点在 x 轴上表示数 2，叫做 A 点的横坐标，与 y 轴的交点在 y 轴上表示数 5，叫做 A 点的纵坐标。这一对数表示了点 A 的位置，记作 $A(2,\ 5)$，叫做 A 点的坐标。

用同样的方法可求得：B 点的坐标是$(-3,\ 3)$

C 点的坐标是$(-4,\ -2)$

D 点的坐标是$(3,\ -3)$

一般说来，平面内任一点P，如果它的横坐标是x，纵坐标是y，P点的坐标就记作$p(x, y)$。p点的坐标(x, y)是一对有次序的数，x表示横坐标，y表示纵坐标。

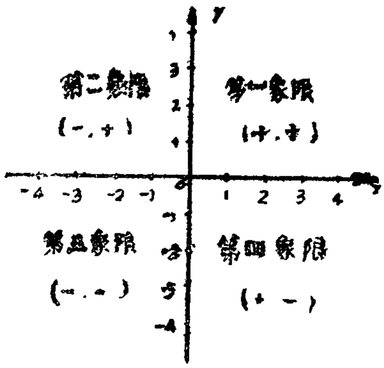


图 4

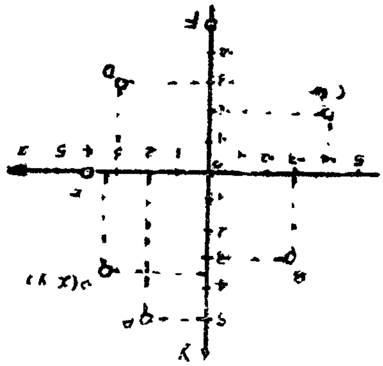


图 5

x 轴与 y把平面分为四部分，如图 4 所示，分别叫做第一、二、三、四象限。各象限中点的坐标符号是：第一象限$(+, +)$；第二象限$(-, +)$；第三象限$(-, -)$；第四象限$(+, -)$。

很明显，x轴上任一点的纵坐标都是 0，y 轴上任一点的横坐标都是 0。如图 5 中E点的坐标是$(4, 0)$，F点的坐标是$(0, -5)$。原点 0 的坐标是$(0, 0)$。

反过来，知道了点的坐标，也可在平面上作出这个点。例如已知一个点的坐标是$(-3, 1.5)$，在x轴上找出表示-3的点，过这个点作x轴的垂线，在y轴找出表示1.5的点，过这个点作y轴的垂线，两垂线交于p_1点，这就是所要求的点。又如已知一个点的坐标是$(0, -2)$，因为横坐标是 0，所以这个点在y轴上。在y上取表示-2的点p_2，就是所要求的点（图 6）。

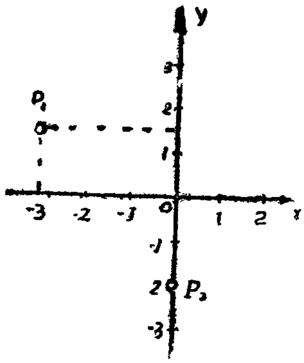
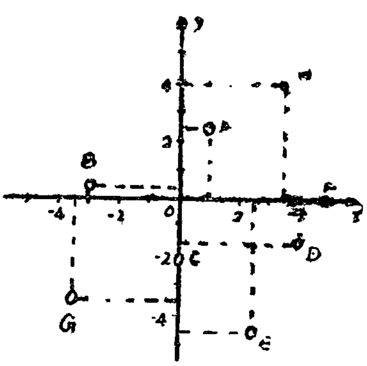


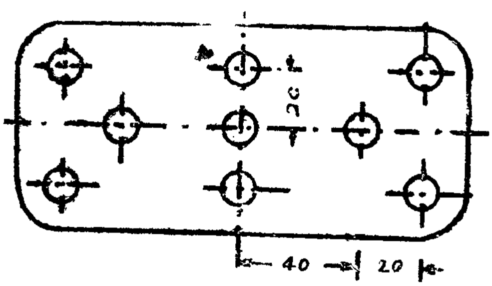
图 6

练　习

1.标出图中各点的坐标：



（第一题）



（第三题）

2. 在平面直角坐标系内作出下列各点：

$A(2,\ 4)$，　$B(2.5,\ -5)$，　$C(-5,\ 2.5)$，　$D\left(-\frac{1}{2},-3\frac{1}{2}\right)$，

$E(5,\ 0)$，　$F(0,\ 0)$，　$G(0,\ -3)$。

3. 工件如图，选择合适的坐标系，标出各孔中心的坐标。

函数的描点作图法

为了从直观上研究因变量随自变量变化的规律性，常常需要作用公式表示的函数的图形。作图方法举例说明如下：

例1. 作函数$y=-2x+1$的图形。

先给出x一系列值，算出相应的y值，列成下表：

x	……	-2	-1	0	1	2	……
y	……	5	3	1	-1	-3	……

在直角坐标系中作出坐标为$(-2,\ 5)$，$(-1,\ 3)$、$(0,\ 1)$、$(1,\ -1)$、$(2,\ -3)$……的点：用光滑线依次连结各点，得函数$y=-2x+1$的图形如图7。

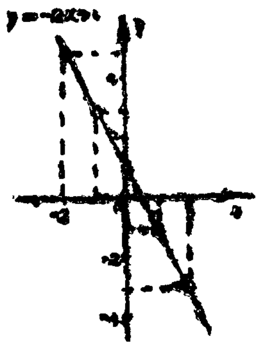


图 7

这是函数作图的一般方法，叫做描点作图形，其基本步骤是：

(1)列自变量与因变量的对应数值表；(2)描点；(3)连线。

例2. 火车走的路程与时间的函数关系为$S=70t$（第一页例1）作它的图形。

由于时间t不能是负数，故列出下表：

t（小时）	0	1	2	3	4	5	6
S（公里）	0	70	140	210	280	350	420

在直角坐标中，如果横坐标与纵坐标取相同的单位，作图就很不方便，因此取t轴每格表1小时，S轴每格表示100公里。描点作出图形如图8。

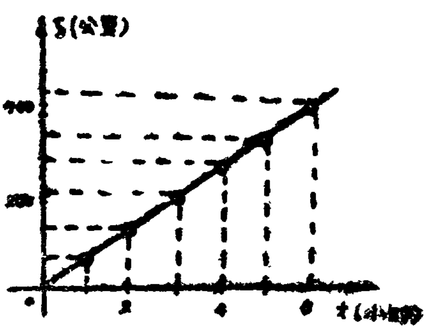


图 8

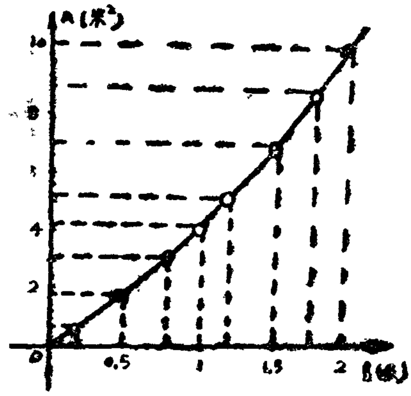


图 9

例3. 水渠过水断面面积与水深的函数关系为$A=3h+h^2$(第1页例2)作它的图形。

给出自变量h一系列值，算出相应的函数值A，列表如下：

h(米)	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.5	1.8	2
A(米)^2	0	0.64	1.75	3.04	4	5.04	6.75	8.64	10

为作图方便起见，直角坐标中h轴每大格表示0.5米，A轴每小格表示1米^2。描点作出图形如图9。

练　习

1. 用描点作图法作下列函数的图形：

　(1) $y=3-x$(x取值：$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$)

　(2) $y=x^2$(x取值：$-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2$)

　(3) $y=\frac{1}{x}$(取$x>0$：$0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1.5, 2, 3$)

　(4) $y=x^2$(x取值：$-2, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2$)

2. 设一弹簧不挂重量时长为10厘米，挂重每增加1公斤，弹簧长度增加0.5厘米。写出弹簧长l与挂重p的函数关系，并作图。

3. 写出圆面积s与半径r的函数关系，并作图。

4. 选取合适的坐标单位，作函数

$$y=100+0.057x$$

的图形。

第二节　一次函数与直线

我们曾研究过下列函数关系：

火车走过的路程s是时间t的函数：$s=vt$，其中v代表火车的速度，是一个常量；

弹簧的长度l是重量p的函数：$l=l_0+kp$，其中l_0代表弹簧原长，k代表重量每增加1公斤时弹簧的伸长，两者都是常量。

又如，在直流电路中，电阻R上的电压v是电流I的函数：$U=RI$，其中R是常量；

一段铜丝，已知$0°C$时电阻是R_0，温度每增加1℃，电阻增加ρ(欧)，则这段铜丝的电阻R是温度T的函数：$R=R_0+\rho T$。

在这些问题中，虽然物理现象不同，但函数关系的表达式是同类型的；等式右边都是自变量的一次式。写成一般形式，就是

$$y=kx+b$$

其中k、b是常数，x是自变量，y是因变量。这种类型的函数叫做**一次函数**。

下面着重研究一次函数图形的特点，及其一些性质。

正比函数 Y＝KX 及其图形

函数 $s=vt$、$U=RI$ 等写成一般形式是

$$y=kx \qquad (k\neq o)$$

其中 k 是不等于 o 的常数。这类函数的特点是：自变量扩大（或缩小）几倍，函数值也跟着扩大（或缩小）相同的倍数。例如

x	0	1	2	3	k	y 对 x 的倍数
$y=x$	0	1	2	3	1	1 倍
$y=2x$	0	2	4	6	2	2 倍
$y=\frac{1}{2}x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$倍

也就是说，无论 x 取什么数，相应的 y 值与 x 值的比值总是常数 k：

$$\frac{y}{x}=k \quad (x\neq o)$$

因此，函数 $y=kx$ 叫做**正比函数**，或者说 y 和 x 成正比。常量 k 叫做**比例常数**。

正比函数的图形是什么曲线呢？

例1． 讨论函数 $y=2x$ 的图形。

解：首先用描点法作函数 $y=2x$ 的图形。

列自变量 x 与因变量 y 的对应数值表：

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

描点连线得图 10 。从图上看出，函数 $y=2x$ 的图形是一条过原点的直线（註 1 ）。

这是个一般规律：

正比函数 $y=kx$ 的图形，是一条过原点的直线。

根据这个规律，作 $y=kx$ 的图形时，只要找一个不是原点的点，过此点与原点的直线，就是它的图形。

例2． 作下列正比函数的图形：

（1） $y=-2x$ （2） $y=\frac{1}{2}x$

（3） $y=-\frac{1}{2}x$

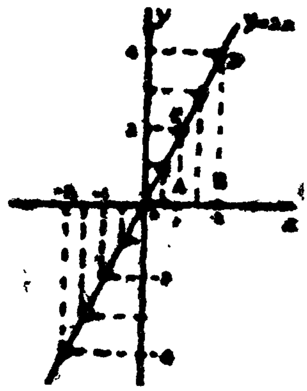


图10

（註 1 ） 这个直观的认识对不对？它有没有普遍性？遵照毛主席的教导，**“要完全地反映整个的事物，反映事物的本质，反映事物的内部规律性”**，我们**“必须从感性认识跃进到理性认识”**。为要说明 $y=2x$ 的图形确实是一条直线，可以这样来论证：任取图形上两个点，如 $o(0,0)$，$c(1.2)$ 连结这两点得一条直线；如果能证明图形上任何其他点都在这根直线上

解：取 $x=1$，算出这三个函数的 y 值：

x	$y=-2x$	$y=\frac{1}{2}x$	$y=-\frac{1}{2}x$
1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

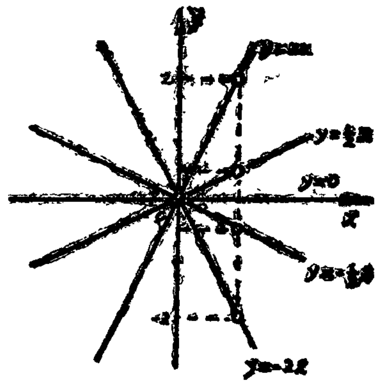


图11

在直角坐标中画三个点 $(1,-2)$，$(1,\frac{1}{2})$ $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$。

过这些点分别作过原点的直线，得所求图形如图11。

为了对照起见，$y=2x$ 的图形也昼在图11中。

对比图中四个正比函数的图形，可看出：

直线 $y=kx$（註 2 ）的位置：当 $k>o$ 时，在第一、第三象限内；当 $k<o$ 时，在第二、四象限内。

函数 $y=kx$ 的变化趋势：$k>o$ 时，y 随 x 的增大而增大，这种函数叫增函数；$k<o$ 时，y 随 x 的增大而减小，这种函数叫减函数。

直线 $y=kx$ 的倾斜方向和倾斜程度：$k>o$ 时往上倾斜，$k<o$ 时往下倾斜；而且 $|k|$ 越大，直线越陡。因此，比例常数 k 叫做直线 $y=kx$ 的斜率。

在特殊情况下，当 $k=o$ 时，直线 $y=kx$ 变成了 $y=o$，这表示无论 x 取什么值，y 都取 o。因此 $y=o$ 也可看成一个函数，它的图形是 x 轴。（图11）。

練　习

1．找一个不是原点的点，作下列函数的图形：

（1）$y=x$　　（2）$y=-x$

（3）$y=\frac{1}{4}x$　　（4）$y=-\frac{1}{4}$

2．举出几个正比函数的实例。

3．列函数关系式，并作图：

（1）某飞轮每秒钟转 3 圈，t 秒钟转 n 圈，n 是 t 的函数。

（2）四平方米的地面上，压上 w 公斤的重量（均匀分布），单位面积上的承重为 p，p 是 w 的函数。

4．指出下列直线在何象限内？是向上倾斜还是向下倾斜？哪条最陡？作它们的图形。

就行了。

取图形上 O、C 以外的任一点，如点 $D(2.4)$。在直角三角形 $\triangle CAO$ 和 $\triangle DBO$ 中，$\because \frac{CA}{AO}=\frac{DB}{BO}=2$，$\therefore \triangle CAO \sim \triangle DBO$，从而 $\angle DOB=\angle COA$，也就是说直线 DO 与 CO 重合，即 D 点在直线 CO 的延长线上。这就证明了我们的结论。

（註 2 ）以后把"函数 $y=kx$ 的图形"简称"直线 $y=kx$"。

（1） $y=5x$ （2） $y=0.5x$ （3） $y=-10x$ （4） $y=-0.1x$

一次函数 $y=kx+b$ 的图形

一次函数 $y=kx+b$ 的图形有什么特点呢？

例1. 讨论函数 $y_1=\frac{1}{2}x+1$ 与 $y_2=\frac{1}{2}x-1$ 的图形。

解：为了研究这两个函数的图形，把它们与函数 $y=\frac{1}{2}x$ 进行比较。先列表如下：

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y=\frac{1}{2}x$	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$y_1=\frac{1}{2}x+1$	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$y_2=\frac{1}{2}x-1$	-2	-1.75	-1.5	-1.25	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0

从表上可以看出，对于每一个 x 值，相应的 y_1 都比 y 大1，相应的 y_2 都比 y 小1。这说明，只要把 $y=\frac{1}{2}x$ 的图形向上平移1个单位，就得到 $y_1=\frac{1}{2}x+1$ 的图形；只要把 $y=\frac{1}{2}x$ 的图形往下平移1个单位，就得到 $y_2=\frac{1}{2}x-1$ 的图形。由此可见，函数 $y_1=\frac{1}{2}x+1$ 与 $y_2=\frac{1}{2}x-1$ 的图形，是与 $y=\frac{1}{2}x$ 平行的直线。此外，直线 $y_1=\frac{1}{2}x+1$ 与 y 轴交点的坐标是 $(0,1)$，直线 $y_2=\frac{1}{2}x-1$ 与 y 轴的交点的坐标是 $(0,-1)$（图12）。

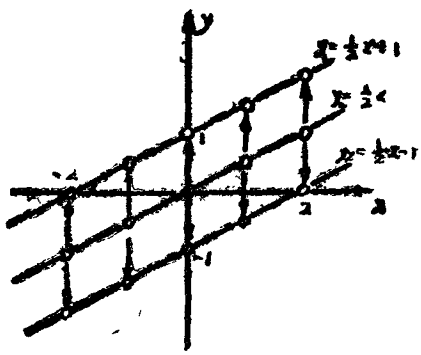


图12

一般来说，一次函数 $y=kx+b$ 的图形，是一条平行于 $y=kx$ 的直线，它与 y 轴的交点的坐标是 (o,b)。k 叫做直线 $y=kx+b$ 的斜率，b 叫直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的**截距**。

根据这些特点，作函数 $y=kx+b$ 的图形有两个简单的方法：（1）过点 (o,b) 作 $y=kx$ 的平行线；（2）除点 (o,b) 外，再找出直线 $y=kx+b$ 上的一个点，作过此点与点 (o,b) 的直线。

例2. 有一台拖拉机，耕地前油箱中有40公斤油，已知翻地时它每小时消耗6公斤油。油箱中剩油量 y（公斤）与时间 t（小时）的函数关系是

$$y=40-6t$$

作这个函数的图形。

解：方法(1)：先作$y=-6t$的图形，这是一条过原点(0,0)与点(3，−18)的直线；然后过点(0,40)作这条直线的平行线，就得到$y=40-6t$的图形（图13）。

方法(2)：当$t=3$时，$y=40-3\times6=22$，作过点(0,40)与点(3,22)的直线，得$y=40-6t$的图形（图13(2)）。

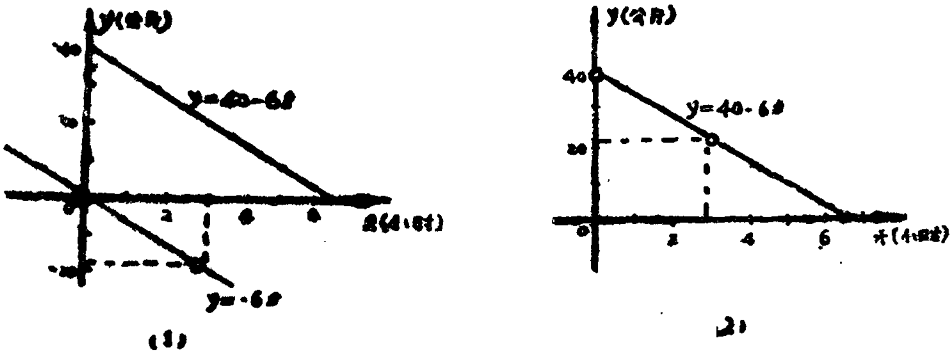


图13

这里时间不能为负数，剩油量也不能是负数，因而图形只画了第一象限那一段。

最后讨论一下$y=b$的图形。$y=b$表示y是一个常数b。但$y=b$也可看作一次函数$y=kx+b$中$k=o$这个特殊情形。这时无论x取何值，y都取b值，因此$y=b$表示在y轴上截距为b的、平行于x轴的直线。如$y=2$表示过点(0,2)的平行于x轴的直线，$y=-2$表示过点(0,−2)的平行于x轴的直线（图14）。

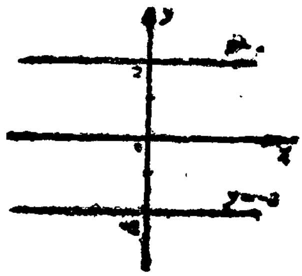


图14

练　习

1．指出下列直线的斜率k、截距b各是多少？分别用平移和两点法作它们的图形：

（1）$y=\frac{3}{4}x+2$　　（2）$y=\frac{3}{4}x-2$

（3）$y=-\frac{3}{4}x+2$　　（4）$y=-\frac{3}{4}x-2$

2．设$x=2$，上题各直线对应的y值是多少？作这个点，检验上题中图形画得对不对。

3．作$y=\frac{1}{3}x-1$的图形，从图上找出$y=o$所对应的x值，并用计算的方法检验结果。

4．从例2的图形上指出40公斤油能用几小时，并用计算的方法进行核对。

第三章　二次函数与抛物线

我们知道，园形轴截面积A与直径D的函数关系是

$$A=\frac{1}{4}\pi D^2$$

如果一物体从空中下落，初速度是V_0（米/秒），则物体下落的距离s（米）与时间t（秒）的函数关系是

$$S=V_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

其中$g=9.8$米/秒^2，是重力加速度。

这些函数的表达式有一个共同点：自变量的最高方次都是2，所以叫做二次函数。二次函数的一般形式是

$$y=ax^2+bx+c(a\neq o)$$

其中，a、b、c为常量，x是自变量，y是因变量。

二次函数 $y=ax^2$ 的图形及性质

根据由浅入深，由特殊到一般的原则，我们先研究最简单的二次函数$y=ax^2$

例1. 有一个小球，在平台上以速度V_0（米/秒）滚动，当它离开台面时沿着一条曲线下落。这是一条什么曲线呢？

为分析这个问题，先建立直角坐标系如图15，其中h轴向下为正。

在直角座标系中，小球的垂直位置h是水平位置S的函数。根据力学原理推得（从略）：

$$h=\frac{g}{2V_0^2}S^2$$

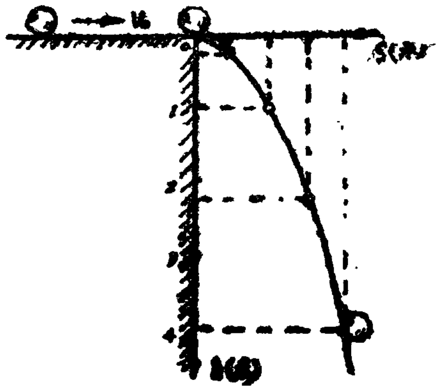


图15

其中$g=9.8$米/秒^{2}为重力加速度。

今设小球在平台上的速度$V_0=2.2$米/秒，于是h与s的函数关系，近似为

$$h=S^2$$

取$S=0$，0.5，1，1.5，2（米）计算相应的h值，列表如下：

S	0	0.5	1	1.5	2……
$h=S^2$	0	0.25	1	2.25	4……

描点，作出图形如图15。这是抛射物体所走过的路线，所以叫做抛物线。

把自变量与因变量的字母改成x与y，得$y=x^2$。显然$y=x^2$的图形与$h=s^2$的一

样，也叫做抛物线，列表作图如下：

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	3
$y=x^2$	9	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	9

从图16 可看出，抛物线 $y=x^2$ 有下列性质：

1．因为 $y=x^2\geqslant 0$，所以抛物线 $y=x^2$ 在 x 轴的上方。顶点O(0.0)是抛物线的最低点，叫做抛物线 $y=x^2$ 的顶点。在顶点处，y 取最小值。

2．抛物线 $y=x^2$ 对称于 y 轴，也就是说，只要将坐标纸沿 y 轴折叠，一、二象限的图形能完全重合。确切地说，抛物线 $y=x^2$ 对 y 轴对称，是因为数值相等，符号相反的自变量 x 与 $-x$ 对应的函数值相等：$x^2=(-x)^2$。从图形上看，就是两个 y 值相同的点到 y 轴等距离。

3．$|x|$ 越大，y 值也就越大，从顶点 O 出发，抛物线的两个分支左右同时向上无限伸展。它的开口向上。

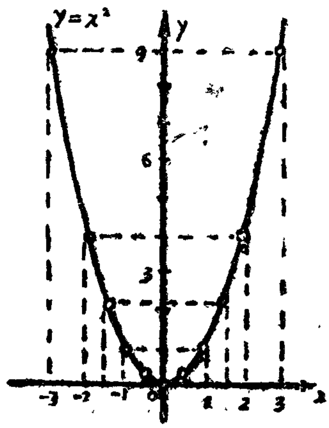


图16

例2．用描点法在同一坐标系里作下列函数的图形，并比较它们的特点：(1) $y=2x^2$，(2) $y=-2x^2$，(3) $y=\frac{1}{2}x^2$，(4) $y=-\frac{1}{2}x^2$。

列表：

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
$y=2x^2$	……	18	8	2	0	2	8	18	……
$y=-2x^2$	……	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	……
$y=\frac{1}{2}x^2$	……	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	……
$y=-\frac{1}{2}x^2$	……	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5	……

描点作图如图17，从中可看出：这四个函数的图形都是顶点为原点 O 的抛物线，并且都对 y 轴对称。$y=2x^2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的开口向上；$y=-2x^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的开口向下。$y=2x^2$ 的开口比 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的开口小；$y=-2x^2$ 的开口比 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的开口小。

综上所说，可得出结论：

二次函数 $y=ax^2$ 的图形，是对 y 轴对称的抛物线，顶点在原点；当 $a>0$ 时，图形在 x 轴的上方，开口向上；当 $a<0$ 时，图形在 x 轴的下方，开口向下；$|a|$ 越大开口越小，

$|a|$越小开口越大。

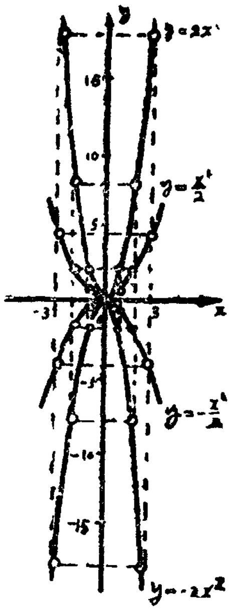


图17

练　　习

1．用描点法作下列函数的图形：

（1）$y=3x^2$　　　　（2）$y=-3x^2$

（3）$y=\frac{1}{3}x^2$　　　　4）$y=-\frac{1}{3}x^2$

2．指出下列抛物线的顶点，位置、开口方向，并比较它们开口的大小：

（1）$y=10x^2$　　　　（2）$y=0.1x^2$

（3）$y=-5x^2$　　　　（4）$y=-0.5x^2$

3．作 $x=y^2$ 与 $x=-y^2$ 的图形，并总结 $x=ay^2$ 图形的特点：顶点、位置、开口方向、开口大小。

4．作园面积A与直径D的函数图形：$A=\frac{1}{4}\pi D^2$

$y=ax^2+bx+c$ 的图形

例1．作$y=\frac{1}{2}x^2+2$ 与 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 的图形。

解：把这两个函数与$y=\frac{1}{2}x^2$ 比较容易看出，对于x的同一个值，$y=\frac{1}{2}x^2+2$ 比 $y=\frac{1}{2}x^2$ 多2，$y=\frac{1}{2}x^2-2$ 比$y=\frac{1}{2}x^2$ 少2。如

x	$y=\frac{1}{2}x^2$	$y=\frac{1}{2}x^2+2$	$y=\frac{1}{2}x^2-2$
0	0	2	-2
2	2	4	0

因此，跟$y=kx+b$与$y=kx$的图形关系一样，把$y=\frac{1}{2}x^2$分别向上与向下平移2个单位，就得到$y=\frac{1}{2}x^2+2$与$y=\frac{1}{2}x^2-2$的图形（图18）

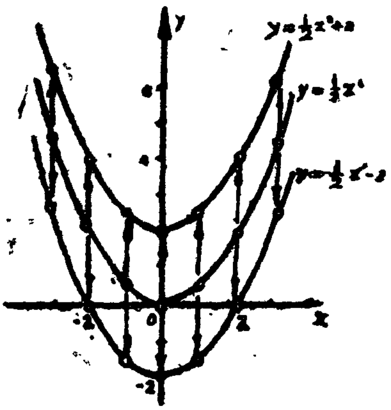


图18

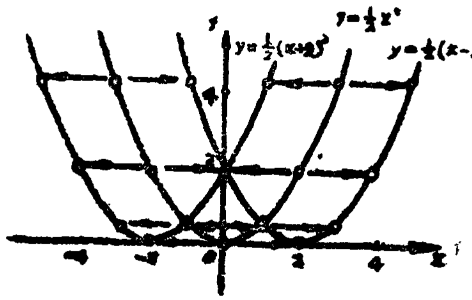


图19

例2.作$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$与$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$的图形。

解：把这两个函数与$y=\frac{1}{2}x^2$比较，可以看到：对于y的相同的值，$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$中的x应比$y=\frac{1}{2}x^2$中的x少2，$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$中的x应比$y=\frac{1}{2}x^2$中的x多2。如

y	$y=\frac{1}{2}x^2$中的x值	$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$中的x值	$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$中的x值
2	-2	-4	0
0.5	-1	-3	1
0	0	-2	2
0.5	1	-1	3
2	2	0	4

由此可见，把$y=\frac{1}{2}x^2$的图形分别向左与向右平移2个单位，就得到$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$与$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$的图形(图19)。

一般来说，$y=a(x+m)^2$与$y=ax^2$的图形状完全一样，只有左右位置的不同。抛物线$y=a(x+m)^2$的顶点在x轴上点$(-m,\ 0)$处，它的对称轴是顶点$(-m,\ 0)$处x轴的垂线。

例3.作$y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$的图形。

解：为了与上面研究过的简单图形作比较，先用配方法改变$y=\frac{1}{2}x^2-2x+4$的形式：

$$\because =\frac{1}{2}x^2-2x+4=\frac{1}{2}(x^2-4x+4)+2=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-2x+4\text{可写成}$$

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$$

由此可见，将$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$的图形向上平移2个单位，就得到$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$的图形；而$y=\frac{1}{2}(x-2)^2$的图形可将$y=\frac{1}{2}x^2$右移2个单位得到。因此，将抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$右移两个单位再上移两个单位，就得到$y\ \frac{1}{2}=(x-2)^2+2$的图形（图20)。也就是说，

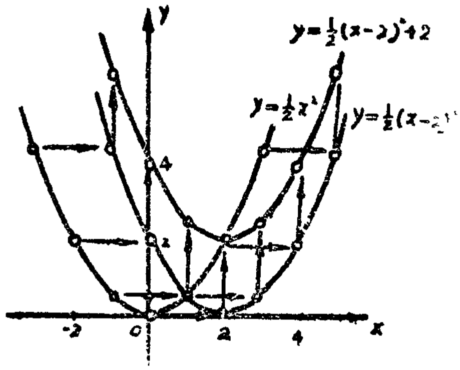


图20

$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$的图形是与$y=\frac{1}{2}x^2$图形形状完全一样的抛物线，只有上下左右位置的不同。抛物线$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$的顶点在点$(2,\ 2)$处。

对于一般的二次函数　$y=ax^2+bx+c$

可用配方法变成　$y=a(x+m)^2+L$的形式：

$$\because ax^2+bx+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

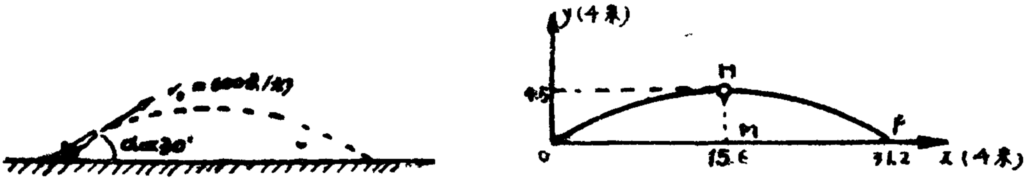
$$\therefore m=\frac{b}{2a}，\ L=\frac{4ac-b^2}{4a}\ 。$$

由例3可知，$y=ax^2+bx+c$ 的图形与 $y=ax^2$ 的图形形状完全一样，只有上下左右的位置不同。抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在点 $H\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 处，它的对称轴是过顶点 H 的 x 轴的垂线。

例4. 以初速 $V_0=600$ 米/秒，从仰角 $\theta=30^\circ$ 的炮身射出的炮弹（图21），高度 y 与水平距离 x 的函数关系是

$$y=-\frac{1}{54000}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

作弹道曲线，并求炮弹达到的最高高度和射程。



（1）　　　　　　　　（2）

图21

解：这是二次函数，因而弹道曲线是一条抛物线。它的形状与 $y=-\frac{1}{54000}x^2$ 一样，顶点的坐标是 $H(-m,\ L)$，其中

$$m=\frac{b}{2a}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{2}{54000}}=-\frac{54000}{2\sqrt{3}}\doteq-15600$$

$$L=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{4\left(-\frac{1}{54000}\right)}\doteq 4500$$

即抛物线顶点 H 的坐标是(15.6千米，4.5千米）。又 $a<0$，抛物线开口向下，且过原点 0(0.0)，故大致图形如图21(2)

最高点是抛物线的顶点 H，而最高高度是顶点 H 的纵坐标，即4.5千米。弹着点 p 和和射出点 0 与抛物线的中心线 HM 对称，所以射程

$$OP=2OM=2\times15.6=31.2(\text{千米})$$

实际上，由于空气阻力很大，因而炮弹所能达到的高度与射程，比计算结果小得多。

练　习

1. 指出下列抛物线的开口方向、顶点和对称轴，并用平移法作图：

（1） $y=x^2+3$　　　　（2） $y=4-x^2$