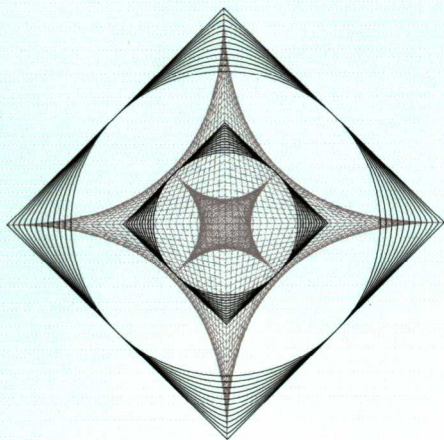


工科微积分

习题1000

刘景麟 黄振友 编



国防工业出版社

National Defense Industry Press

工科微积分

习题1000

刘景麟 黄振友 编

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分习题 1000 / 刘景麟, 黄振友编. —北京:
国防工业出版社, 2006. 1

ISBN 7-118-04247-1

I. 工... II. ①刘... ②黄... III. 微积分—高等学
校—习题 IV. 0172—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 136680 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

京南印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 4¼ 105 千字

2006 年 1 月第 1 版

2006 年 1 月北京第 1 次印刷

印数: 1—4000 册

定价: 10.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

目 录

习题 1	函数	1
习题 2	数列的极限	4
习题 3	数列极限的存在与计算	6
习题 4	数项级数的概念与性质	8
习题 5	非负级数与变号级数	10
习题 6	函数极限的概念	12
习题 7	函数极限的存在与计算	13
习题 8	无穷小量与无穷大量	14
习题 9	无穷小量、无穷大量的阶	16
习题 10	函数的连续性	18
习题 11	连续函数的性质	20
习题 12	导数概念	21
习题 13	导数计算 (1)	23
习题 14	导数计算 (2)	25
习题 15	导数计算 (3)	27
习题 16	微分及其应用	28
习题 17	高阶导数	30
习题 18	微分中值定理	31
习题 19	Taylor 公式	33
习题 20	L'Hospital 法则	34
习题 21	幂级数的收敛半径与收敛区域	36



习题 22	函数的幂级数展开及其应用	38
习题 23	函数的单调性	39
习题 24	函数的极值与最大、最小值	40
习题 25	曲线的凹凸与扭转, 函数作图	42
习题 26	曲率	43
习题 27	Riemann 积分的概念及性质	44
习题 28	Newton-Leibnitz 公式	46
习题 29	原函数、不定积分的简单计算	48
习题 30	换元公式(1)	49
习题 31	换元公式(2)	50
习题 32	换元公式(3)	51
习题 33	分部积分公式(1)	53
习题 34	分部积分公式(2)	54
习题 35	特殊函数类的积分(1)	55
习题 36	特殊函数类的积分(2)	56
习题 37	积分的其它计算方法	57
习题 38	广义积分	58
习题 39	积分的几何应用(1)	59
习题 40	积分的几何应用(2)	60
习题 41	积分的几何应用(3)	61
习题 42	积分在力学、物理中的应用(1)	62
习题 43	积分在力学、物理中的应用(2)	64
习题 44	微分方程及其解	66
习题 45	一阶微分方程初等解法(1)	67
习题 46	一阶微分方程初等解法(2)	68
习题 47	可降阶的高阶微分方程	69
习题 48	多元函数及其极限	71



习题 49	偏导数	73
习题 50	全微分及其应用	75
习题 51	方向导数与梯度	77
习题 52	多元复合函数的求导	79
习题 53	隐函数的求导	81
习题 54	偏导数的几何应用	83
习题 55	多元函数的 Taylor 公式	85
习题 56	多元函数的极值	86
习题 57	二重积分的概念与性质	87
习题 58	二重积分的计算(1)	89
习题 59	二重积分的计算(2)	91
习题 60	三重积分的计算(1)	93
习题 61	三重积分的计算(2)	95
习题 62	重积分的应用(1)	97
习题 63	重积分的应用(2)	98
习题 64	含参变量的积分	99
习题 65	第一型曲线积分	100
习题 66	第二型曲线积分	103
习题 67	Green 公式	106
习题 68	与路径无关的曲线积分	109
习题 69	一阶微分方程初等解法(3)	111
习题 70	第一型曲面积分	112
习题 71	第二型曲面积分	114
习题 72	Gauss 公式与散度	116
习题 73	Stokes 公式与旋度	118
习题 74	线性微分方程解的结构	119
习题 75	常系数齐次线性微分方程	120



习题 76	常系数非齐次线性微分方程	122
习题 77	Euler 方程、幂级数解、线性微分方程组	124
习题 78	周期为 2π 的函数的 Fourier 级数	125
习题 79	正弦级数和余弦级数	127
习题 80	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128

习题 81	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 82	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 83	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 84	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 85	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 86	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 87	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 88	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 89	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 90	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 91	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 92	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 93	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 94	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 95	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 96	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 97	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 98	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 99	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 100	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 101	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 102	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 103	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 104	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 105	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 106	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 107	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 108	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 109	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 110	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 111	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 112	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 113	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 114	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 115	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 116	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 117	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 118	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 119	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128
习题 120	周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 级数	128



习题 1 函 数

1. 判断题

(1) $f(x) = \ln(x \sin x)$ 、 $g(x) = \ln x + \ln \sin x$ 是同一个函数。
()

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$ 、 $g(x) = x - 2$ 是同一个函数。
()

(3) 长方形的面积是它的对角线长度的函数。
()

(4) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数} \\ -x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 是奇函数。
()

(5) 若 f 为严格减少函数, 则其反函数 f^{-1} 是严格增加函数。
()

2. 填空题

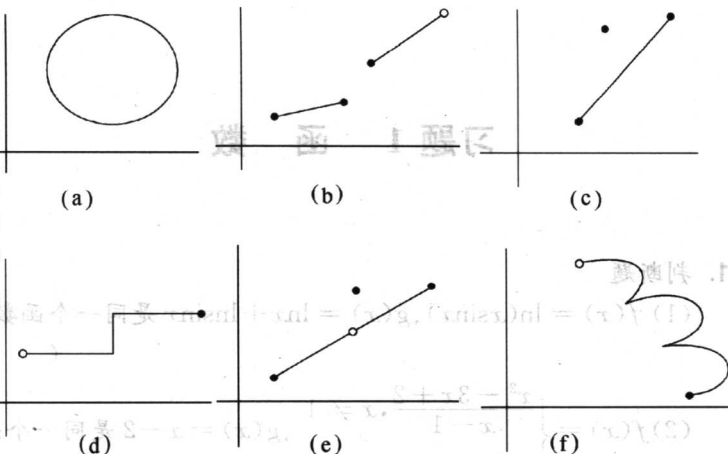
(1) 设 f 是偶函数且当 $x \geq 0$ 时 $f(x) = \sin x$, 则 f 的定义域是 _____; 当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____。

(2) $f(x) = \sqrt{3-x} + \arctg \frac{1}{x}$ 的定义域是 _____。

(3) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 则 $f(x) + f(-x)$ 的定义域是 _____, $f(x^2)$ 的定义域是 _____, $f(\lg x)$ 的定义域是 _____。

(4) 在下列图形中, 图 _____ 是某函数的图形, 而图 _____ 则不是函数的图形。



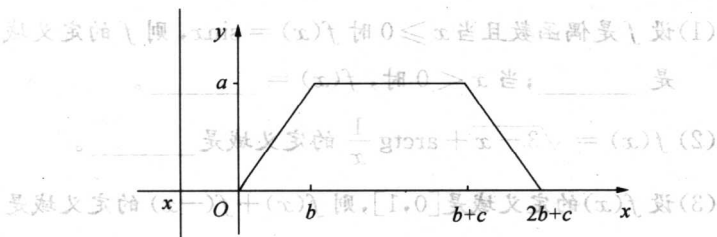


(5) 设 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 0 \\ 4-x, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = x, x \geq 1$, 则

$$\left(3g - \frac{2}{3}f\right)(-1) = \underline{\hspace{2cm}}, \left(fg\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}, (g \circ f)(-3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

3. 梯形如下图所示, 与 x 轴垂直的直线(垂足坐标为 $(x, 0)$)从左向右扫过梯形, 试将扫过的面积 S 表示为 x 的函数。



4. 关于反函数

(1) 由摄氏温度 t 到华氏温度 $F(t)$ 的转换公式是 $F(t) = \frac{9}{5}t + 32$, 求反函数 F^{-1} , 它有什么实际意义?



(2) 设 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$, 求 f^{-1} , 它的定义域是什么?

(3) 设 $f(x) = \sin x, x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, 求 f^{-1} .

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数 F , 使得 $\forall x \in [0, 2], F(x) = f(x)$ (称 F 为 f 在 $[-2, 2]$ 上的奇延拓).

6. 设 f 是周期为 2π 的函数, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上的对应关系如下:

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

求 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的表达式, 并作出其图形.

7. 设 $f(0) = 0$, f 在 $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] (n \in \mathbb{N})$ 上的图形为连接点 $\left(\frac{1}{n+1}, 0\right)$ 与 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ 的直线段, 试给出 f 的表达式, 并作出其图形.

8. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & |x-2| \leq 1 \\ 0, & |x-2| > 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x, & |x-1| < 3 \\ 1, & |x-1| \geq 3 \end{cases}$, 求 $f \circ g$ 的表达式与图形.

9. 求 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1-x^2, & x < 0 \end{cases}$ 的反函数的定义域与对应法则, 并作出其图形.

10*. 试作出 $f(x) = |5 - |5 - |x||$ 的图形并给出 f 的不带绝对值符号的分段表达式.



习题2 数列的极限

1. 判断题

(1) 如果 $\{x_n\}$ 满足: 存在实数 a 使得对任何自然数 N , 都存在正数 ε , 当 $n \geq N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
()

(2) 如果对任何 a 点的 ε 邻域, 都存在数列 $\{x_n\}$ 的一项 x_N , 使得 x_N 后数列 $\{x_n\}$ 所有的项都在此邻域内, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
()

(3) 如果存在 a 点某个 ε_0 邻域, 使得数列 $\{x_n\}$ 任一项 x_N 之后都至少有一项 x_n 不在此 ε_0 邻域中, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$.
()

(4) 如果 $\{x_n\}$ 满足: 存在实数 a 使得对任何正数 ε , 都存在自然数 N , 使得 x_N 后有无穷多项 x_n 让 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
()

(5) 由于原点有一个邻域 $(-1, 1)$, 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 任一项 $N^{(-1)^N}$ 后都有一项 $(2N)^{(-1)^{2N}} = 2N$ 不在此邻域内, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(-1)^n} \neq 0$.
()

2. 选择题

(1) 设 ε 为任意给定的正数, 如果在实数 a 的 ε 邻域内总有 $\{x_n\}$ 的无穷多项, 则_____。

A. $\{x_n\}$ 以 a 为极限

B. $\{x_n\}$ 不以 a 为极限

C. $\{x_n\}$ 可能以 a 为极限, 也可能不以 a 为极限



(2) 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 、 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 、 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 都趋于零, 其中_____。

A. 趋于零最快的是 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, 最慢的是 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

B. 趋于零最快的是 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, 最慢的是 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

C. 趋于零最快的是 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, 最慢的是 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

(3) 如果数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 极限都不存在, 则数列 $\{x_n + y_n\}$ _____。

A. 极限不存在

B. 极限存在

C. 极限可能存在也可能不存在

(4) 设 $x_n = (\sqrt{n})^{(-1)^n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 下述结论中_____是

A. $\{x_n\}$ 有极限

B. $\{x_n\}$ 是无界量

C. $\{x_n\}$ 是无穷大量

3. 用 $\epsilon - N$ 定义证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 - 2} = \frac{4}{3}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2n+1}}{n} = 0$$

4. 试利用 2 的方幂构造一个数列 $\{x_n\}$, 使得:

(1) $\{x_n\}$ 从数轴上小于 1 的一方趋于 1;

(2) $\{x_n\}$ 从数轴上 1/4 的两侧跳跃式地趋于 1/4。

5. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的充分必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$ 。



习题 3 数列极限的存在与计算

1. 判断题

- (1) 既然收敛数列一定是有界数列, 那么无界数列就一定是发散的. ()
- (2) 既然收敛数列一定是有界数列, 那么发散数列就一定是无界的. ()
- (3) 单调有界的数列有极限, 而有极限的数列却未必非单调不可. ()

2. 试考虑下列数列极限的存在性问题, 若极限存在则求出其极限值.

(1) $\left\{ \frac{1+(-1)^n}{n} \right\}$

(2) $\left\{ (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\}$

(3) $\left\{ \frac{n^2}{2n-1} \right\}$

(4) $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi \right\}$

3. 计算下列数列的极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n - 1}{3^{n-1} + 2^n + 1}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$, 其中 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$



$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cdots \cos \frac{a}{2^n}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^{2^n})$$

4. 设 $x_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在并求极限值。

5. $\left| \frac{\sin n!}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n} = 0$, 试验证数列 $\left\{ \frac{\sin n!}{n} \right\}$ 满足 Cauchy 准则的条件。

6. 设 $|a| < 1$, 证明数列 $\{na^n\}$ 趋于零, 数列 $\{n^2a^n\}$ 又将如何变化?

7. 设 $a > 0$, 而

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), n = 1, 2, \dots$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求极限值。

填空题 5



习题 4 数项级数的概念与性质

1. 判断题

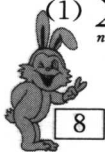
- (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ()
- (2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = \infty$ ()
- (3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 也发散 ()
- (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散 ()
- (5) 若加括号后所得级数发散, 则原级数也发散 ()

2. 填空题

- (1) 级数 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots$ 的一般项 $u_n =$ _____。
- (2) 级数 $\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 - \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \cdots$ 的一般项 $u_n =$ _____。
- (3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{7}\right)^n$ 的和 $s =$ _____。
- (4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} =$ _____。
- (5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \neq 0$) 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ _____。

3. 按定义讨论下列级数的敛散性:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$



$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

4. 判断下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\ln 3}{3} \right)^n + \frac{1}{2^n} \right)$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^n + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

5. 分别就 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛和发散两种情况讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + 0.0001)$$

6. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} mu_n$ 存在, $\sum_{n=2}^{\infty} n(u_n - u_{n-1})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

7. 利用 Cauchy 准则判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{2^n}$ 的敛散性。



习题 5 非负级数与变号级数

1. 判断下列陈述是否正确,并说明理由。

(1) 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $u_n \leq v_n, n=1, 2, \dots$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

(2) 若非负级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n u_n$ 也收敛。

(3) 若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的非负级数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ 存在, 且极限值小于 1。

(5) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的正项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 可能不存在, 即使存在也不一定小于 1。

(6) 绝对收敛的数项级数一定是条件收敛的。

(7) 收敛的数项级数一定是条件收敛的。

2. 判断下列级数的敛散性, 若收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + (-1)^n)^n}{3^n}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{na^n}, a > 0$$

$$(6) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

