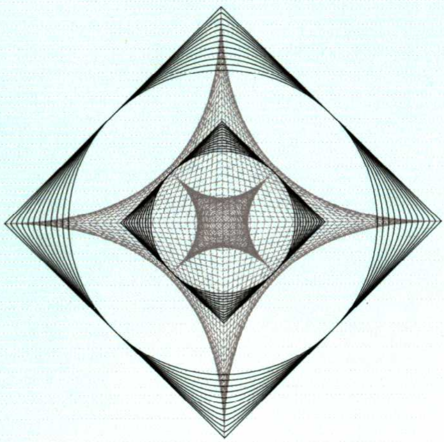
工科微积分

习题1000

刘景麟　黄振友　编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

工科微积分习题1000

刘景麟　黄振友　编

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

工科微积分习题 1000 / 刘景麟，黄振友编．—北京：国防工业出版社，2006.1

ISBN 7-118-04247-1

Ⅰ.工… Ⅱ.①刘…②黄… Ⅲ.微积分—高等学校—习题 Ⅳ.O172—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 136680 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

京南印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 4¼ 105 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月北京第 1 次印刷

印数：1—4000 册 定价：10.00 元

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

目　录

习题 1　函　数

1. 判断题

(1) $f(x)=\ln(x\sin x)$、$g(x)=\ln x+\ln\sin x$ 是同一个函数。 (　　)

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & x\neq 1\\ -1, & x=1\end{cases}$、$g(x)=x-2$ 是同一个函数。 (　　)

(3) 长方形的面积是它的对角线长度的函数。 (　　)

(4) $f(x)=\begin{cases}x, & x \text{ 为有理数}\\ -x, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 是奇函数。 (　　)

(5) 若 f 为严格减少函数，则其反函数 f^{-1} 是严格增加函数。 (　　)

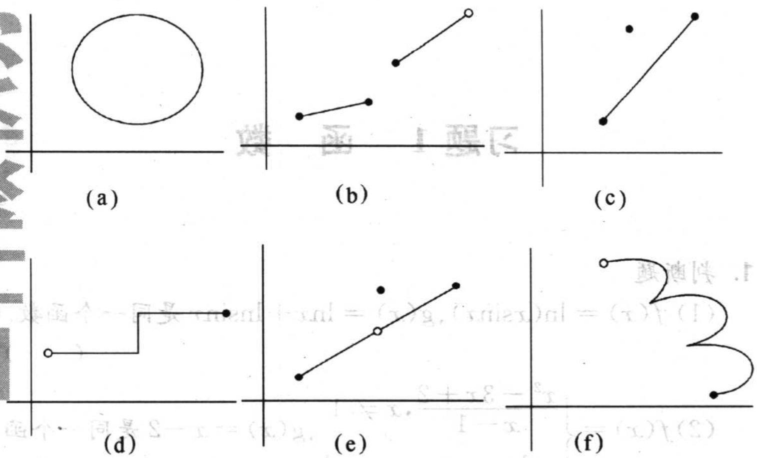
2. 填空题

(1) 设 f 是偶函数且当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)=\sin x$，则 f 的定义域是________；当 $x<0$ 时，$f(x)=$ ________。

(2) $f(x)=\sqrt{3-x}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ 的定义域是________。

(3) 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(x)+f(-x)$ 的定义域是________，$f(x^2)$ 的定义域是________，$f(\lg x)$ 的定义域是________。

(4) 在下列图形中，图________是某函数的图形，而图________则不是函数的图形。

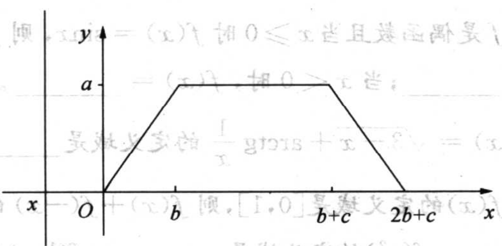


(5) 设 $f(x)=\begin{cases}x+3, x\geqslant 0\\ 4-x, x<0\end{cases}$，$g(x)=x, x\geqslant 1$，则

$\left(3g-\dfrac{2}{3}f\right)(-1)=$ ________，$(fg)\left(\dfrac{1}{2}\right)=$ ________，

$\left(\dfrac{g}{f}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$ ________，$(g\circ f)(-3)=$ ________。

3. 梯形如下图所示，与 x 轴垂直的直线（垂足坐标为 $(x,0)$）从左向右扫过梯形，试将扫过的面积 S 表示为 x 的函数。



4. 关于反函数

(1) 由摄氏温度 t 到华氏温度 $F(t)$ 的转换公式是 $F(t)=\dfrac{9}{5}t+32$，求反函数 F^{-1}，它有什么实际意义？

(2)设 $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+1}$，求 f^{-1}，它的定义域是什么？

(3)设 $f(x)=\sin x, x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 f^{-1}。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant 1\\1,1<x\leqslant 2\end{cases}$，求定义在$[-2,2]$上的奇函数 F，使得 $\forall x\in[0,2], F(x)=f(x)$（称 F 为 f 在$[-2,2]$上的奇延拓）。

6. 设 f 是周期为 2π 的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的对应关系如下：

$$f(x)=\begin{cases}x, -\pi\leqslant x<0\\0, 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

求 f 在$(-\infty,+\infty)$上的表达式，并作出其图形。

7. 设 $f(0)=0$，f 在 $\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right]$（$n\in\mathbb{N}$）上的图形为连接点 $\left(\dfrac{1}{n+1},0\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)$ 的直线段，试给出 f 的表达式，并作出其图形。

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x, |x-2|\leqslant 1\\0, |x-2|>1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}x, |x-1|<3\\1, |x-1|\geqslant 3\end{cases}$，求 $f\circ g$ 的表达式与图形。

9. 求 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, x>0\\0\quad, x=0\\-1-x^2, x<0\end{cases}$ 的反函数的定义域与对应法则，并作出其图形。

10*. 试作出 $f(x)=|5-|5-|x|||$ 的图形并给出 f 的不带绝对值符号的分段表达式。

习题 2　数列的极限

1. 判断题

(1) 如果 $\{x_n\}$ 满足：存在实数 a 使得对任何自然数 N，都存在正数 ε，当 $n \geqslant N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

(　　)

(2) 如果对任何 a 点的 ε 邻域，都存在数列 $\{x_n\}$ 的一项 x_N，使得 x_N 后数列 $\{x_n\}$ 所有的项都在此邻域内，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

(　　)

(3) 如果存在 a 点某个 ε_0 邻域，使得数列 $\{x_n\}$ 任一项 x_N 之后都至少有一项 x_n 不在此 ε_0 邻域中，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq a$。

(　　)

(4) 如果 $\{x_n\}$ 满足：存在实数 a 使得对任何正数 ε，都存在自然数 N，使得 x_N 后有无穷多项 x_n 让 $|x_n - a| < \varepsilon$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。 (　　)

(5) 由于原点有一个邻域 $(-1,1)$，数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 任一项 $N^{(-1)^N}$ 后都有一项 $(2N)^{(-1)^{2N}} = 2N$ 不在此邻域内，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{(-1)^n} \neq 0$。 (　　)

2. 选择题

(1) 设 ε 为任意给定的正数，如果在实数 a 的 ε 邻域内总有 $\{x_n\}$ 的无穷多项，则________。

A. $\{x_n\}$ 以 a 为极限

B. $\{x_n\}$ 不以 a 为极限

C. $\{x_n\}$ 可能以 a 为极限，也可能不以 a 为极限

(2)数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$、$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$、$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 都趋于零，其中________。

A. 趋于零最快的是 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$，最慢的是 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

B. 趋于零最快的是 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，最慢的是 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

C. 趋于零最快的是 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$，最慢的是 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

(3)如果数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 极限都不存在，则数列 $\{x_n+y_n\}$ ________。

A. 极限不存在

B. 极限存在

C. 极限可能存在也可能不存在

(4)设 $x_n=(\sqrt{n})^{(-1)^n}$，当 $n\to\infty$ 时，下述结论中________是正确的。

A. $\{x_n\}$有极限

B. $\{x_n\}$是无界量

C. $\{x_n\}$是无穷大量

3. 用 $\varepsilon-N$ 定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{3n^2-2}=\dfrac{4}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{2n+1}}{n}=0$

4. 试利用 2 的方幂构造一个数列$\{x_n\}$，使得：

(1)$\{x_n\}$从数轴上小于 1 的一方趋于 1；

(2)$\{x_n\}$从数轴上 1/4 的两侧跳跃式地趋于 1/4。

5. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$。

习题 3　数列极限的存在与计算

1. 判断题

(1)既然收敛数列一定是有界数列，那么无界数列就一定是发散的。　(　　)

(2)既然收敛数列一定是有界数列，那么发散数列就一定是无界的。　(　　)

(3)单调有界的数列有极限，而有极限的数列却未必非单调不可。　(　　)

2. 试考虑下列数列极限的存在性问题，若极限存在则求出其极限值。

(1) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}\right\}$

(2) $\left\{(-1)^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

(3) $\left\{\dfrac{n^2}{2n-1}\right\}$

(4) $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}+\cos n\pi\right\}$

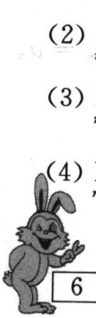
3. 计算下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n-1}{3^{n-1}+2^n+1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$，其中 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$



(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{4}\cdots\cos\dfrac{a}{2^n}$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

4. 设 $x_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求极限值。

5. $\left|\dfrac{\sin n!}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n!}{n}=0$，试验证数列 $\left\{\dfrac{\sin n!}{n}\right\}$ 满足 Cauchy 准则的条件。

6. 设 $|a|<1$，证明数列 $\{na^n\}$ 趋于零，数列 $\{n^2a^n\}$ 又将如何变化？

7. 设 $a>0$，而

$$x_1=1$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ n=1,2,\cdots$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求极限值。

习题4　数项级数的概念与性质

1. 判断题

(1)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$　　(　　)

(2)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\infty$　　(　　)

(3)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也发散（　　）

(4)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散（　　）

(5)若加括号后所得级数发散，则原级数也发散　　(　　)

2. 填空题

(1)级数 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots$ 的一般项 $u_n=$ ________。

(2)级数 $\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3-\left(\frac{5}{15}\right)^4+\cdots$ 的一般项 $u_n=$

________。

(3)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{7}\right)^n$ 的和 $s=$ ________。

(4)已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=$ ________。

(5)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\neq 0)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$ ________。

3. 按定义讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

4. 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\ln 3}{3}\right)^{n}+\frac{1}{2^{n}}\right)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

5. 分别就 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛和发散两种情况讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+0.0001)$

6. 已知 $\lim_{n\to\infty}nu_n$ 存在，$\sum_{n=2}^{\infty}n(u_n-u_{n-1})$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

7. 利用 Cauchy 准则判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n!}{2^{n}}$ 的敛散性。

习题 5　非负级数与变号级数

1. 判断下列陈述是否正确，并说明理由。

(1) 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $u_n \leqslant v_n$，$n=1, 2, \cdots$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛。

(2) 若非负级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n u_n$ 也收敛。

(3) 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho < 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的非负级数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ 存在，且极限值小于 1。

(5) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 可能不存在，即使存在也不一定小于 1。

(6) 绝对收敛的数项级数一定是条件收敛的。

(7) 收敛的数项级数一定是条件收敛的。

2. 判断下列级数的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sin^2 \dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{na^n}, a>0$　　(6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$