同济版高等数学辅导教材

23456789

高等数学考研冲刺

GAODENG
SHUXUE
KAOYAN CHONGCI

张 艳 袁晓娜 编

加强理解

掌握技巧

解题过程全新突破

中国建材工业出版社

高等数学考研冲刺

张　艳　袁晓娜　编

中国建材工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学考研冲刺/张艳等编. 北京：中国建材工业出版社，2005.2

ISBN 7-80159-850-4

Ⅰ. 高... Ⅱ. 张... Ⅲ. 高等数学—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 005646 号

高等数学考研冲刺

张 艳 袁晓娜 编

出版发行：中国建材工业出版社

地　址：北京市西城区车公庄大街 6 号

邮　编：100044

经　销：全国各地新华书店

印　刷：北京鑫正大印刷有限公司

开　本：787 mm×1092 mm 1/16

印　张：10.25

字　数：248 千字

版　次：2005 年 3 月第 1 版

印　次：2005 年 3 月第 1 次

定　价：**16.00 元**

网上书店：www. ecool100. com

本书如出现印装质量问题，由我社发行部负责调换。联系电话：（010）88386904

前　　言

高等数学是高等院校的一门重要基础课，也是全国工学硕士研究生入学考试的必考科目之一。由于受课时的限制，该课程无论在内容的广度、深度上还是在解题方法上，均不可能全面展开讲解。为了帮助一些学有余力的学生提高数学水平，我们编写了《高等数学考研冲刺》一书。

本书包括两大部分：第一部分共十二章，是按同济大学版《高等数学》的知识系统编写的。每章结合典型例题，对该章的基本题型和解题方法进行了较为全面的讨论，对难度较大的题型，做出了思维定式处理，目的是为了使大家在较短时间内加深对数学的理解、掌握解题技巧、提高解题能力。每章均配有练习题和答案，供大家自我检测。第二部分是附录。附录给出了十二、十三、十四届北京市大学生（非数学专业）数学竞赛本科甲、乙组试题及解析和 2002～2004 年考研数学——高数部分试题及答案，供大家参考。

本书既可作为高等数学竞赛赛前辅导教材，也可作为大学生及数学爱好者提高数学素质或报考硕士研究生的有益读物，是一本颇具特色的教学参考书。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。

编者

2004 年 8 月

目 录

第一章　函数、极限与连续

本章重点:求函数的表达式,判断函数的性质;求极限;有关闭区间上连续函数的性质证明题.下面逐一举例介绍.

首先围绕函数这一概念,简单介绍常见的填空题:

一、求函数的表达式,判断函数的性质

1. 求函数的表达式

求这类问题的关键是掌握函数表示法的"无关性",即 $f(x)$ 只与其定义域和对应关系有关,而与自变量用什么字母表示无关.我们认为 $f(x)$,$f(u)$,$f(t)$ 为同一函数.

【例 1】 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$,其中 $x\neq0$,$x\neq1$,则 $f(x)=$________

解 利用函数表示法的无关性

可令 $t=\dfrac{x-1}{x}$,即 $x=\dfrac{1}{1-t}$,代入原方程得:

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t}$$

即

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x} \tag{1}$$

再令 $\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{u-1}{u}$,即 $x=\dfrac{1}{1-u}$代入上式得:

$$f\left(\frac{1}{1-u}\right)+f\left(\frac{u-1}{u}\right)=\frac{2(u-1)}{u}$$

即

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x} \tag{2}$$

由(1)、(2)和原方程联立方程组得

$$f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-1$$

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant2\\0 & |x|>2\end{cases}$,求 $f[f(x)]=$________

解 由题意知

$$f[f(x)]=\begin{cases}4-f(x)^2 & |f(x)|\leqslant2\\0 & |f(x)|>2\end{cases}$$

而已知

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant2\\0 & |x|>2\end{cases}$$

所以有
$$f[f(x)]=\begin{cases}4-(4-x^2)^2 & |f(x)|\leqslant 2 \text{ 且 } |x|\leqslant 2\\ 4-0^2 & |f(x)|\leqslant 2 \text{ 且 } |x|>2\\ 0 & |f(x)|>2 \text{ 且 } |x|\leqslant 2\end{cases}$$

解不等式

$$(1)\begin{cases}|4-x^2|\leqslant 2\\ |x|\leqslant 2\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}|0|\leqslant 2\\ |x|>2\end{cases}\qquad (3)\begin{cases}|4-x^2|>2\\ |x|\leqslant 2\end{cases}$$

可知
$$f[f(x)]=\begin{cases}4-(4-x^2)^2 & -2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2} \text{ 或 } \sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\\ 4 & |x|>2\\ 0 & -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

【例 3】 设 $f_n(x)=\underbrace{f[f\cdots f(x)\cdots]}_{n次}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

解 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$f_3(x)=f[f_2(x)]=\dfrac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2{}^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$

由以上两式可猜想：$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，用数学归纳法证明，证明过程略.

2. 求定义域

【例 4】 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$的表达式及定义域.

解 首先求 $\varphi(x)$的表达式，由题意：

$$f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]=1-x^2$$

所以
$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)+2k\pi\quad k\in Z$$

且其定义域为
$$-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$$

即
$$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

3. 求值域

这类问题往往可以通过求导转化为求极值来做.

【例 5】 求 $y=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$的值域.

解
$$y'=\frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2}$$

即
$$y'=\frac{-2(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$$

令 $y'=0$ 得 $x_1=2$ $x_2=-\dfrac{1}{2}$

代入 y 得 $y(2)=1$ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$

又因为
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{x^2+1}=0$$

所以 y 的值域为 $y\in[-4,1]$

4. 判断函数的性质

函数有四个基本性质:单调性,奇偶性,周期性,有界性.

【例 6】 当 $x\in[0,\pi]$ 时,$f(x)=0$ 且 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,则在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 是( )

A)以 π 为周期的函数　　B)以 2π 为周期的函数

C)以 3π 为周期的函数　　D)不是周期函数

解 因为 $f(x+\pi)\neq f(x)$,所以不选 A.

又因为
$$f(x+2\pi)=f[(x+\pi)+\pi]=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)$$
$$=[f(x)+\sin x]-\sin x=f(x)$$
所以
$$f(x+2\pi)=f(x)$$
即本题答案选 B.

【例 7】 下列四个函数中为偶函数的是( )

A)$f(x)=x^3+x^{-\frac{1}{3}}$　　B)$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

C)$f(x)=\begin{cases}-x^2+\sin x & x<0\\ x^2+\sin x & x\geqslant 0\end{cases}$　　D)$f(x)=\dfrac{x(e^x-1)}{e^x+1}$

分别以 $-x$ 代替 x,可知选 D.

【例 8】 设函数 $y=f(x)$,$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$,$x=b$ 均对称 $(a\neq b)$ 求证:$f(x)$ 是周期函数.

分析　要证 $f(x)$ 是周期函数,只需证明存在 T,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,等式 $f(x+T)=f(x)$ 成立.

证明 因为 $f(x)$ 关于 $x=a$,$x=b$ 均对称

所以 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有:
$$f(a+x)=f(a-x),\ f(b+x)=f(b-x)$$
所以
$$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)$$
$$=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$$
故 $f(x)$ 是周期函数.

【例 9】 设 $f(x)$ 在包含原点的区间上可积,且 $f(x)$ 是偶函数,讨论函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的奇偶性.

解
$$\Phi(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-z}\int_0^x f(-z)\mathrm{d}(-z)$$
$$=-\int_0^x f(-z)\mathrm{d}z=-\int_0^x f(z)\mathrm{d}z=-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\Phi(x)$$
所以 $\Phi(x)$ 是奇函数.

思考 若 $f(x)$ 是奇函数,$\Phi(x)$ 是奇函数还是偶函数?

二、求极限

在求极限问题中,最常见的是求未定式的极限,最基本的方法是用罗必达法则,或者利用

两个重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$来进行计算．除此之外，求极限还有很多其他方法，以下将就一些主要方法举例说明．在此提醒读者，恰当的运用等价无穷小，可大大简化计算．

几个重要的等价无穷小

当 $x\to0$ 时　$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$a^x-1\sim x\ln a$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$．

1．利用重要极限

【例 1】 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

解　原式

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{n}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}}\right]^{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\cdot\frac{1}{x}}$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}-n}{n}\cdot\frac{1}{x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{n}$$

$$=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(n+1)}$$

注：1）即使应用两个重要极限，也常常还需要罗必达法则或其他方法，才能求出极限．

2）使用两个重要极限时，关键在于“凑”出已知极限的形式．

【例 2】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$，$x\neq0$

解　原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}$$

本题通过对分子分母同乘一个因子，使之出现连锁反应，变形为一个简单函数．

2．利用泰勒展式

对于复杂函数的极限，泰勒公式是一个有力且有效的工具．

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\cot^2x$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]^2-x^2[1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)]^2}{x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)-x^2+x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\frac{2}{3}$$

在用泰勒公式求极限时，应当灵活应用，分清哪些项需展开，哪些项可以保留，本例中分母中的 $\sin^2x$ 是作为一个乘积因子，当 $x\to0$ 时，与 x^2 是等价无穷小，因此可直接看作 x^2，无需展开，而分子中的 $\sin^2x$ 则不同，要用泰勒公式展开.

3. 利用单调有界性

适用于已知一个数列的通项求极限.

【例 4】 已知 $x_1=\sqrt{a}, x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}, (a>0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

解 不能直接对 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$ 两边求极限，首先说明极限的存在性.

用数学归纳法证明数列是单调的.

(1)$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}>\sqrt{a}=x_1$

(2)假设当 $n=k$ 时，$x_k>x_{k-1}$

则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}>\sqrt{a+x_{k-1}}=x_k$$

所以 $\forall$ $k\in N$，命题都成立.

再说明数列有上界，仍用数学归纳法证明.

(1)显然 $x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$

(2)假设当 $n=k$ 时，$x_k<\sqrt{a}+1$

则

$$x_{k+1}=\sqrt{a+x_k}<\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a+2\sqrt{a}+1}=\sqrt{a}+1$$

所以 $\forall$ $k\in N$，数列有上界.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

令

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l$$

则

$$l=\sqrt{a+l}\ \Rightarrow\ l^2-l-a=0$$

解得

$$l=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})\text{或}\ l=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1+4a})(\text{舍去})$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$$

4. 利用中值定理

【例5】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$

解 题目中出现同一函数在不同两点的差函数,而且差值为1,考虑用微分中值定理.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{\arctan\zeta}\cdot\frac{1}{1+\zeta^2},\text{其中 }\zeta\in(x,x+1)$$
$$=\frac{2}{\pi}$$

【例6】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,(p>0)$

解 属于超越定积分不可能积出来,利用积分中值定理有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\zeta_n}{\zeta_n}p,n\leqslant\zeta_n\leqslant n+p$$
$$=0$$

【例7】 已知 $f(x)$ 可微,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$,求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}f(t)\mathrm{d}t$

解 由积分中值定理,得

$$\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}\cdot f(t)\mathrm{d}t=\zeta\sin\frac{3}{\zeta}f(\zeta)\cdot[(x+2)-x],x\leqslant\zeta\leqslant x+2$$

所以 $\text{原式}=\lim\limits_{\zeta\to\infty}\zeta\sin\frac{3}{\zeta}\cdot f(\zeta)\cdot 2$

$$=\lim_{\zeta\to\infty}6\frac{\sin\frac{3}{\zeta}}{\frac{3}{\zeta}}\cdot f(\zeta)$$
$$=\lim_{\zeta\to\infty}6f(\zeta)=6$$

5. 利用定积分求和式极限

【例8】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})$

解 由于 $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n})=\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

这个和式可以看作函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间[0,1]上的积分和,根据定积分的定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\zeta_i}\Delta x_i=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

故原极限 $=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

【例9】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}]$

解 类似这种正负相间又不易抵消的和式不宜直接求,可以将其分成两部分,这就涉及到最后一项截止到奇数项还是偶数项.

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\frac{1}{2n+1}=\ln 2$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2$$

另外,还可以考虑求数项级数来做.

6. 倒代换求极限

当未定式为$\infty-\infty$型,但不能通分时,可采用倒代换的方法来求极限.

【例 10】 求$\lim\limits_{x\to\infty}x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

解 令
$$x=\frac{1}{t}$$

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2t(1+t)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

7. 利用数列极限的三个定理来求极限

定理 1 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

定理 2 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

定理 3 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$

【例 11】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$

解 令$a_n=\sqrt[n]{n}$,又$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,故由定理 1,有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=1$$

注：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0),\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

【例 12】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$$

【例 13】 已知 $x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$ 的极限为 2，求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2+x_{n-1}}}}$$

解 由定理 3，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$（利用例 4 的结论）

8. 利用级数收敛的必要条件

【例 14】 设 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

证明 因为 $x_n>0$， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 为正项级数.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$， 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

故
$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

另外，还有一类求极限的变形题，在此类题中，极限式中含未知常数，现举例如下：

【例 15】 确定 A、B、C 的值.

使 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}=0$

解 因为
$$\lim_{x\to1}(x-1)^2=0$$

所以
$$\lim_{x\to1}\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]=0,解得\ A=2$$

从而
$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[A+B(x-1)+C(x-1)^2]}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[2+B(x-1)]}{(x-1)^2}-C=0$$

所以
$$C=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^4+3}-[2+B(x-1)]}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+3}}-B}{2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-B\sqrt{x^4+3}}{2(x-1)\sqrt{x^4+3}}$$

所以
$$\lim_{x\to1}2x^3-B\sqrt{x^4+3}=0$$

即　$2-2B=0$,解得　$B=1$

所以
$$C=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-B\sqrt{x^4+3}}{2(x-1)\sqrt{x^4+3}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2\sqrt{x^4+3}}\frac{2x^3-\sqrt{x^4+3}}{x-1}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to1}6x^2-\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+3}}=\frac{5}{4}$$

【例 16】 已知 $f(x)$是三次多项式,且有 $\lim\limits_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$,求 $\lim\limits_{x\to3a}\frac{f(x)}{x-3a}$

解　依题意有:$f(x)=(x-2a)(x-4a)(Ax+B)$

因为
$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to2a}(x-4a)(Ax+B)=(-2a)(2aA+B)=1$$

所以
$$2aA+B=-\frac{1}{2a}\tag{1}$$

又因为
$$\lim_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=\lim_{x\to4a}(Ax+B)(x-2a)=(4aA+B)\cdot2a=1$$

所以
$$4aA+B=\frac{1}{2a}\tag{2}$$

联立(1)式和(2)式,解得:$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2a^2}\\ B=-\dfrac{3}{2a}\end{cases}$

所以
$$\lim_{x\to3a}\frac{f(x)}{x-3a}=\lim_{x\to3a}\frac{\frac{1}{2a^2}(x-3a)(x-2a)(x-4a)}{x-3a}$$
$$=\lim_{x\to3a}\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-4a)=-\frac{1}{2}$$

三、函数的连续性

1. 有关连续性的概念

【例 1】 设 $f(x),g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq0$,$g(x)$有间断点,则(　　).

A) $g[f(x)]$必有间断点　　B) $[g(x)]^2$ 必有间断点

C) $f[g(x)]$必有间断点　　D) $\dfrac{g(x)}{f(x)}$必有间断点

分析　取 $f(x)\equiv1$,$g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant0\\ -1 & x<0\end{cases}$,显然 A、B、C 都不对,此题选 D.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)} & x\neq1,-2\\ 2 & x=1\end{cases}$　在 $x=1$ 处连续,试求 a,b 的值.

解 由题意$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=f(1)=2$

又当 $x\to1$ 时,分母是无穷小,故$\lim\limits_{x\to1}(x^4+ax+b)=0$

即 $1+a+b=0,a=-b-1$

又 $$\lim_{x\to1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^4+(-b-1)x+b}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{(x^4-x)-b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-b)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2+x-b}{x+2}$$

$$=\frac{3-b}{3}=2$$

所以 $b=-3$

进而 $a=-(-3)-1=2$

2. 闭区间上连续函数的性质

(1)最大值最小值性;(2)介值性.

【例 3】 设单调函数 $f(x)$在(a,b)内具有介值性,则 $f(x)$在(a,b)内连续.

证明 只需证任意的 $x_0\in(a,b)$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

即 $$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

由已知不妨设 $f(x)$单调增加. 当 $x\in(a,x_0)$时,$f(x)\leqslant f(x_0)$

所以 $$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\leqslant f(x_0)\quad f(x_0-0)\leqslant f(x_0)$$

同理 $$f(x_0+0)\geqslant f(x_0)$$

若两式中等号都成立,则可推出 $f(x)$在 x_0 连续.

否则,设 $f(x_0+0)\neq f(x_0)$,即有 $f(x_0+0)>f(x_0)$.

当 $$x\in(a,x_0)\quad f(x)\leqslant f(x_0)$$

$$x\in(x_0,b)\quad f(x)\geqslant f(x_0+0)$$

任意取一 $r\in[f(x_0),f(x_0+0)]$,不存在 $x_1\in(a,b)$,使得 $f(x_1)=r$.

这与介值性相矛盾,所以 $f(x_0+0)=f(x_0)$

同理 $$f(x_0-0)=f(x_0)$$

所以 $f(x)$在 x_0 连续,由 x_0 的任意性,$f(x)$在(a,b)内连续.

【例 4】 设 n 为自然数,函数 $f(x)$在$[0,n]$上连续,$f(0)=f(n)$,
试证:存在 $a,a+1\in[0,n]$,使 $f(a)=f(a+1)$

证明 当 $n=1$ 时,由假设,结论成立(取 $a=0$ 即可)

当 $n>1$ 时,令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$,则 $g(x)$在$[0,n-1]$上连续,故存在最大值 M 与最小值 m. 由于

$$m\leqslant\frac{1}{n}[g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)]\leqslant M$$

由介值定理:$\exists\, a\in[0,n-1]$(此时 $a,a+1\in[0,n]$),使得

$$g(a)=\frac{1}{n}[g(0)+g(1)+\cdots+g(n-1)]$$

$$=\frac{1}{n}[f(1)-f(0)+f(2)-f(1)+\cdots+f(n)-f(n-1)]$$

$$=\frac{1}{n}[f(n)-f(0)]=0$$

即 $$f(a+1)-f(a)=0 \qquad f(a)=f(a+1)$$

【例 5】 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$，求证：存在 $\zeta\in(-\infty,+\infty)$使得 $f(\zeta)=0$

证明 只需找满足 $f(x_1)>0, f(x_2)<0$ 的 x_1, x_2，用介值性.

由极限定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$

所以可取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，存在 $M>0$，当 $x_1\leqslant -M, x_2\geqslant M$ 时

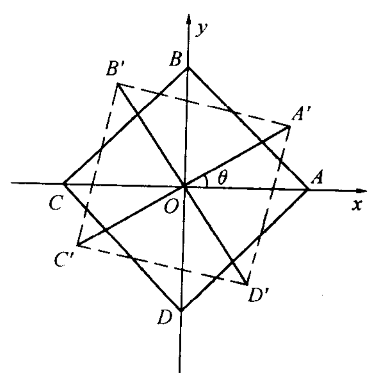
有 $$|f(x_1)-1|<\frac{1}{2} \quad |f(x_2)-(-1)|<\frac{1}{2}$$

取 $x_1=-M, x_2=M$ 则 $f(x_1)>\frac{1}{2}, f(x_2)<-\frac{1}{2}$

显然 $f(x)$在$[-M,M]$上连续，由介值性

存在 $\zeta\in(-M,M)\subset(-\infty,+\infty)$使得 $f(\zeta)=0$.

【例 6】 将四条腿一样长的椅子放在地面上，假定地面是光滑曲面，且椅子四条腿着地点为一正方形的四个顶点，证明：若将此正方形中心保持不动，总可以通过转动椅子使四条腿同时着地.



证明 如图建立坐标系，其中 A,B,C,D 四点表示四条腿的着地点. 设正方形转动 θ 角后成$A'B'C'D'$. A，C 两点与地面距离之和为$f(\theta)$，B，D 两点与地面距离之和为$g(\theta)$. 因为地面是光滑的，故 $f(\theta)$与 $g(\theta)$都是连续函数. 又因为椅子在任何位置都总有三只腿同时着地，故对任意 θ，$f(\theta)$与 $g(\theta)$至少有一个为零，因此总有

$$f(\theta)g\cdot(\theta)=0$$

令 $$F(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$$

则 $F(\theta)$是连续函数，由于

$$F(0)=f(0)-g(0)$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)-f(0)$$

所以 $$F(0)\cdot F\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant 0$$

由介值定理，$\exists\,\zeta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，使 $F(\zeta)=0$

即 $f(\zeta)=g(\zeta)$. 又由于 $f(\zeta).g(\zeta)=0$

所以 $$f(\zeta)=g(\zeta)=0$$

此时四条腿同时着地.

思考 若椅子四条腿着地点为一矩形的四个顶点，本题结论是否依然成立？为什么？

习　　题

1. 设对一切实数，$f(x)$满足关系式：$2f(x)+f(1-x)=x^2$，求 $f(x)$的表达式.

2. 设函数 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$，其中 $x>0$，求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________.

4. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，$x_1>0,x_2>0$，求证：

   (1)若$\frac{f(x)}{x}$单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

   (2)若$\frac{f(x)}{x}$单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

5. 设 $f(x)=\frac{ax+b}{x+c}$的反函数是$f^{-1}(x)=\frac{2x+5}{x-3}$，则 a,b,c 的值为________.

6. 设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，$f(x)=3x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则 $f(x)=$________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=2$，则 $a=$________，$b=$________.

8. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^b-(n-1)^b}=1999$，则 $a=$________，$b=$________.

9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$

10. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)$

11. 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

12. 设 $f(x)$在$[1,+\infty)$连续单调递减，且

    $f(x)>0,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(x)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$.求证：S_n 收敛.

13. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n-1}{n}\right)f(1)}$

14. 当$|x|<1$时，求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$

15. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$，其中 $a>0$.

16. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

17. 设 $f(u)$ 可微，$f(0)=0$，求$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi t^3}$

    其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$.