SHU XUE JING SAI ZHI DAO

谢廷桢　王伟

小学数学竞赛指导

天津教育出版社

95

4-2

奇2

2

SHU XUE JING
SAI ZHI DAO

责任编辑：钟启红
封面设计：赵林沼

ISBN 7-5309-0783-2/G·622 定价：

小学数学竞赛指导

谢廷桢

王　伟

天 津 教 育 出 版 社

小学数学竞赛指导

谢廷祯　王　伟

*

天津教育出版社出版

（天津市湖北路27号）

新华书店天津发行所发行

天津市武清县永兴印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开　6.25印张　132千字

1989年12月第1版

1989年12月第1次印刷

印数1—14000

ISBN　7-5309-0783-2

G·622　定价：2.45元

前　言

半个世纪以来，国内外各类数学竞赛的开展，有力地推动了对数学学科本质的研究和发展，同时通过这项活动，培养选拔了一大批数学人材。特别是“华罗庚金杯”少年数学邀请赛的开展，在广大少年朋友中涌现出一大批数学爱好者。他们从小立下了到数学王国驰骋的雄心壮志，并迈出了走向数学王国的坚实步子。形势令人鼓舞。

但是，从目前中小学数学教学的实际状况看，由于受升学指挥棒的摆布，有相当一部分同学，特别是小同学，仅着眼于手中的课本，翻来复去地演习题，而对一些成熟的思维方法、灵活的解题技巧、普遍的解题规律，不作深入的探讨。这样，在数学竞赛中，他们仅能对问题作出一般性的思考，缺乏解决这些问题所需要的系统知识和思维方法，因而常吃败仗。

为了弥补上述缺陷，编写了这本学习指导书。编写中，我们试图既依据小学数学教材，又不拘泥于教材，并充分注意中小学数学知识的衔接，尽量从各类常见的数学竞赛问题中，揭示一些规律性的东西，归纳一些常用的思维方法，突出一些解题技巧。旨在通过各类问题的讲解，启迪同学们的智慧，锻炼同学们的思维能力，培养小学生学习数学的兴趣，提高参赛水平。以期为他们在今后的数学竞赛中夺得金

标助上一臂之力！

由于水平有限，书中缺点错误在所难免，敬请专家和老师们指教。

编 者

一九八八年十二月

目　　录

一　数字问题

（一）猜　数

猜数问题是一类奇妙的数字问题，有的奇妙得象魔术一般。但把“秘密”揭示后，其中无非都是运用了一些数学知识。

1　猜奇数、偶数

一个整数，它或是奇数，或是偶数，这是整数最基本的性质。此外，数的奇偶性还有如下性质：

奇数＋奇数＝偶数；奇数＋偶数＝奇数；奇数个奇数的和是奇数；偶数个奇数的和是偶数；任意个偶数的和是偶数。

奇数－奇数＝偶数；奇数－偶数＝奇数；偶数－奇数＝奇数。

奇数×奇数＝奇数；奇数×偶数＝偶数；偶数×偶数＝偶数；任意个奇数的积仍是奇数；其中有一个偶数的若干个自然数相乘，其结果是偶数。

这些性质似乎很简单，但在解决问题时作用很大。请看下面的几个例子。

问题1　兰兰两只手都握有一分硬币若干个，知道她一手握的个数为奇数，另一手为偶数。若她右手握的硬币的个数乘以2，左手握的个数乘以3，其和为35。请你猜一猜，兰

兰哪一只手握的硬币的个数为奇数？

因为兰兰右手握的一分硬币的个数，不论是奇数还是偶数，乘以2后必为偶数.知道和为奇数35，所以兰兰左手握的一分硬币的个数乘以3后得奇数.因而兰兰左手所握的一分硬币的个数肯定为奇数.

问题2 我一只手握一枚二分硬币，另一只手握一枚五分的硬币，然后把左手中硬币的币值乘以一个偶数，右手中硬币的币值乘以一个奇数，并把所得的两积加起来.当我告诉你最后的得数是奇数还是偶数时，你如何知道我哪只手握的是二分币，哪只手握的是五分币？

问题的结果会有两种情况：

第一种：

$$\begin{array}{rr} \text{（左手）}\ 2\text{分} & \text{（右手）}\ 5\text{分} \\ \underline{\times）\ \text{偶数}} & \underline{\times）\ \text{奇数}} \\ \text{偶数} & +\quad \text{奇数}=\text{奇数} \end{array}$$

第二种：

$$\begin{array}{rr} \text{（左手）}\ 5\text{分} & \text{（右手）}\ 2\text{分} \\ \underline{\times）\ \text{偶数}} & \underline{\times）\ \text{奇数}} \\ \text{偶数} & +\quad \text{偶数}=\text{偶数} \end{array}$$

所以，最后的得数是奇数时，左手握的是二分硬币，右手握的是五分硬币；最后的得数是偶数时，左手握的是五分硬币，右手握的是二分硬币.

问题3 全校师生都在握手，两个人每握一次手都记握了一次手.问握手的次数是奇数的那些师生的总人数是奇数还是偶数？为什么？

由于两个人每握一次手，每人都记握了一次手，那么两

个人握手次数的和就是2次.也就是说，不管是谁，两人每握一次手，总次数都增加2.所以,全校师生握手的总次数是个偶数.

我们把全校师生分成两类：握手次数是偶数的那些师生作为第一类，握手次数是奇数的那些师生作为第二类.很明显，第一类师生握手的总次数是一个偶数.由于全校师生握手的总次数为偶数.于是有：偶数＋第二类师生握手的总次数＝偶数.从而第二类师生握手的总次数也是个偶数.由于第二类中每个师生握手次数为奇数，根据“偶数个奇数之和是一个偶数”的性质，所以第二类师生的人数只能是偶数.也就是说，握手次数是奇数的那些师生的总人数是偶数.

练 习 一

1. 平面上有五个点，任何三个点都不在一条直线上，现在要求从每个点都正好引出三条直线和其余的任意三个点相连，你能连成吗？
2. 一人买了99只茶杯，装在两种大小不同的箱子里，每个大箱子装12只，每个小箱子装5只，恰好装完.已知箱子的总数不超过10只，问两种箱子各多少只？
3. 有苹果和梨若干个，任意分为五堆，你一定可以从中选出这样两堆，使你所得到的苹果总数和梨的总数都是偶数.这个结论对吗？为什么？
4. 兰兰对红红说：“我可猜到你的年龄.只要将你的年龄乘以10，加上5，再除以5，等你把最后的结果说出来，我可马上把你的年龄说出来.”红红按兰兰的意思进行了心算，然后告诉兰兰：“我算出的结果是24！”

兰兰立即说：“不对，不是你算错，就是你骗我，反正不会是24.”请你想一想，兰兰为什么说不会是24？

5. 将数1，2，……20排成一个圆圈，如果甲报出一个数a（在1～20之间），那么就从这个数a往前再数a个数（不连a本身）.例如$a=3$，就从3往前再数3个数到6.若$a=15$，就以15往前再数15个数到10.问a是多少时，可以数到17？

2 猜原数

有些题目，要求我们去猜某数.猜数，可不能漫无边际地瞎猜，而是要在探求问题规律的过程中试探着猜.它比捉迷藏中的猜测更有规律性，请看以下几个例子.

问题1 用2乘你出生的月份，再加上5，再乘以50，再加上你的年龄，再减去365，然后把最后的得数告诉我，我就知道你今年是几岁，是在哪个月出生的.你知道我是怎样猜出的？

这个问题不难解决.题目中的加、减、乘给出了探求的路径，沿着这条路去追根求源，就能解决问题.

因为（出生月份×2+5）×50+年龄－365＝出生月份×100+年龄－115.

而月份1～12都是一位数或两位数，年龄一般也是一位数或两位数（超过100岁的人较少），所以根据上面等式的最后一行，只要把最后的结果加上115，那么后两位（十位、个位）就是年龄数，前两位（千位、百位）就是出生的月份数.

问题2 元旦联欢会上，小惠献了一个“猜数”节目：请你任选一个三位数，秘密地写在纸上，然后将此数乘以37，再

将所得的积乘以27.只要告诉我最后的得数是多少？我立即可以说出你们各自在开始时挑选的是哪个三位数.请你揭示小惠猜数的秘密在哪里.

小惠猜数的秘密并不难找.一个数乘以37，再乘以27，就相当于将该数乘以999，而$999=1000-1$，所以一个三位数乘以999所得的六位数的前三位数比原来的三位数少1.

例如：$865\times37\times27$

$$=865\times999$$

$$=865\times(1000-1)$$

$$=865000-865$$

$$=864135$$

因此，小惠只要听到报数人说出前三位数字，她会立即说出比报数人说出前三位数大1的数，这就是报数人原先挑选的数字.

问题3 请你写出50以内任意三个连续的自然数（如16、17、18），并把这三个数加起来（$16+17+18=51$）.再选一个不超过50的3的倍数（如36），把它告诉我，然后把这三个连续自然数的和与这个3的倍数相加（$51+36=87$），再把所得的和乘以67（$87\times67=5829$）.最后，只要你把积的末两位数（29）告诉我，我就能猜出你最初所写的三个连续的自然数.试解释其中的道理.

道理肯定出在计算上.为此，我们设三个连续的自然数为x，$x+1$，$x+2$，3的倍数为$3n$（n为自然数）.根据题意有

$$67\times\{[x+(x+1)+(x+2)]+3n\}$$

$$=200\times(x+n+1)+(x+n+1)$$

因为$x<50$，$n<50$，所以$x+n+1<100$.这样，上面计

算结果的末两位数字就等于$x+n+1$.于是，我们只要将末两位数减去$n+1$，即$3n$的三分之一与1的和，就可得到三个连续自然数中的第一个数x.

例如，当你告诉我所选取的3的倍数是36时，我先将36除以3再加上1，得13.当你再告诉我积的末两位数是29时，我只要将29减去13，就得到第一个自然数16.从而知道三个连续的自然数是16，17，18.

练 习 二

1. 把你的出生月份乘以2，再加上7，再乘以50，再加上你的年龄，再加上365，最后的得数如果是1755,那末我就知道你今年是40岁,是在10月份出生的.你知道我是怎样推算的吗？
2. 大牛家的门牌号是一个三位数，个位数字是十位数字的3倍，十位数字是百位数字的3倍,三位数字的和是13.大牛家的门牌号是多少？
3. 小军做题时，由于粗心大意，把被减数个位上的3写成8，把十位上的0错写成6，这样算得的差是199,正确的差是多少？
4. 明明做两位数乘两位数的题时，把一个乘数的个位数4错当作1，乘得的结果是525，实际应为600，这两个两位数各是多少？

（二）拆 数

把一个合数用质因数相乘的形式表示出来，叫分解质因

数．由于质因数具有双重身份，它本身既是质数，又是这个合数的因数．这样通过将一个或几个合数分解质因数，可灵活地解答一些“拆数”问题．请看下面的几个例子．

问题1 105的约数有多少个？

105的质因数分解式为$105 = 3 \times 5 \times 7$，所以它的约数是1，3，5，7，15，21，35，105共8个．

上面用的方法，是写出所有的约数直接数数的方法．但当所给的数字较大时，就不易写出它所有的约数，因而也就不易搞清它所有约数的个数，但有个定理可以帮助我们．定理是这样叙述的：“一个大于1的整数的约数的个数等于它的质因数分解式中每个相同质因数个数加1所得和的连乘积．”按照这一定理，我们寻求大于1的整数的约数的个数就有了一个简便的新方法．如$105 = 3 \times 5 \times 7$，它所有的约数共有$(1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$（个）

问题2 72的全部约数之和是多少？

写出72的12个约数，逐个相加求和显然是拙笨的．我们不妨这样考虑：$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$，从$2 \times 2 \times 2$来看，它含有约数1，2，4，8；从$3 \times 3$来看，它含有约数1，3，9．把1，2，4，8称作第一组数，1，3，9称作第二组数．今以第二组数中的1分别去乘第一组中的各数得1，2，4，8，它们全是72的约数，其和为$1+2+4+8$．再以第二组数中的3去乘第一组中的各数，得3，6，12，24，它们也全是72的约数，其和为$(1+2+4+8) \times 3$．最后以第二组数中的9乘以第一组中的各数，得1×9，2×9，4×9，8×9，它们也都是72的约数，其和为$(1+2+4+8) \times 9$．因此，72的全部约数的和是

$(1+2+4+8)\times(1+3+9)=15\times13=195$.

由此，我们可学会求任意自然数全部约数的和。例如：$300=2\times2\times3\times5\times5$，所以300全部约数的和 $=(1+2+4)\times(1+3)\times(1+5+25)=7\times4\times31=868$.

问题3 把20拆成怎样的几个自然数的和，才能使这些自然数的乘积尽可能的大？

拆法很简单：将20拆成几个2或几个3的和，而且要使3尽可能地多。即 $20=3+3+3+3+3+3+2$。这样，拆得的六个3与一个2的乘积为最大。

为什么这种拆法能够符合题目的要求？其道理是这样的：

把自然数x，拆成有限个自然数a、b、c、d……p之和，不妨设$x=a+b+c+d$（四个以上同理可证）。

（1）a、b、c、d中不能有1。如果有1，不妨设$a=1$，则$x=1+b+c+d$，这四个数的积为$b\times c\times d$。若将x拆成$(1+b)$、c、d，则这三个数的积为$(1+b)\times c\times d$。而这三个数的积减去前四个数的积所得差为$(1+b)\times c\times d-b\times c\times d=c\times d$，这说明四个自然数1、$b$、$c$、$d$的乘积没有三个自然数$(1+b)$、$c$、$d$的乘积大。所以$a$、$b$、$c$、$d$中不能有1。

（2）a、b、c、d中哪个都不能比4大。设$a>4$，这样，x可拆成$(a-2)$、2、b、c、d五数之和。此时，这五个数之积比原先的四数之积要大，即$2\times(a-2)\times b\times c\times d-a\times b\times c\times d=a\times b\times c\times d-4\times b\times c\times d=(a-4)\times b\times c\times d>0$ $(\because a>4)$，这就说明a、b、c、d四数都不能比4

大.

（3）a、b、c、d中若有4，则把4写成$2+2$.

（4）综上所述，a、b、c、d只能为2或3，但要注意到3要尽可能的多.不妨令$a=b=c=2$，$d=3$，则$x=2+2+2+3$，其积为$2\times2\times2\times3=24$，而$x=3+3+3$，其积为$3\times3\times3=27$.

问题4 大牛的舅舅是体校的教练，他的年龄有四个特征：

（1）他已是四十开外的中年人了；

（2）他获得的金牌不止一枚；

（3）他获得的银牌也不止一枚；

（4）他的年龄与他获得的金银牌数及体校学生人数的乘积是141846，问大牛的舅舅的年纪是多大？他获得的金银牌共几枚？体校的学生共多少？

我们可以这样想："他已是四十开外的中年人了"，说明他的年龄在40～60之间；获得的金牌、银牌都不止一枚，这说明他获得的金银牌总数不小于4.又知年龄×金银牌数×学生人数＝141846，为此，我们先将141846分解质因数：$141846=2\times3\times47\times503$，并将2、3、47、503搭配成三个整数的连乘积，看哪三个整数符合题意也就行了.

2、3、47、503、搭配成三个整数的连乘积有六种不同的形式，也就是说141846可拆成六种三数相乘的形式：

$6\times47\times503$，　$3\times94\times503$，　$3\times47\times1006$，

$2\times141\times503$，　$2\times47\times1509$，　$2\times3\times23641$.

很明显，六种搭配中，只有第一种是符合题意的.因此，大牛舅舅今年47岁，他获得的金银牌总数为6，体校共有503