高等学校数学
公共课辅导系列

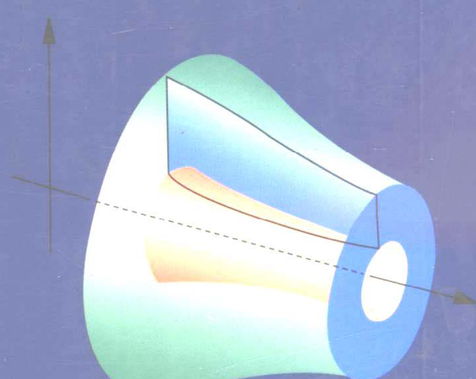
ShuXue FuDao XiLie

高等数学解题指导

概念、方法与技巧（下 册）

主编　李　静

编者　胡京兴　田　鑫　李贵斌
　　　梁志刚　李　静



北京大学出版社

高等学校数学公共课辅导系列

高等数学解题指导

——概念、方法与技巧

（下　册）

主　编　李　静
编　者　胡京兴　田　鑫　李贵斌
梁志刚　李　静

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指导. 下册：概念、方法与技巧/李静主编. —北京：北京大学出版社，2004.6
(高等学校数学公共课辅导系列)
ISBN 7-301-07411-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.李…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 039066 号

书　　名：**高等数学解题指导——概念、方法与技巧**(下册)
著作责任者：胡京兴　田　鑫　李贵斌　梁志刚　李　静　编
责 任 编 辑：刘　勇　曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 7-301-07411-5/O·0590
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
排 版 者：北京高新特打字服务社　51736661
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
890mm×1240mm　A5　12.75 印张　370 千字
2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：0001—5100 册
定　　价：19.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，翻版必究

内 容 简 介

本书是高等院校理工科、经济管理和财经类各专业数学公共课“高等数学”的学习辅导书，与国内通用的《高等数学》教材配套，可同步使用. 全书共十二章，分上、下两册出版. 上册内容包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用；下册内容包括空间解析几何与向量代数，多元函数微分及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，微分方程等. 每章按内容提要（包括本章框架、重要概念与性质）、教学要求、解题方法概论与错误辨析、典型例题分析、练习题及练习题答案，共分为五个部分. 典型例题分析中的例题分为 A,B,C 三类：A 类为基本题，B 类为综合题，C 类题大部分选自历年研究生入学考试的试题.

本书按照教育部颁布的“高等数学”教学大纲要求进行编写，注重数学思想、方法和技巧二位一体，结合了作者在教学第一线总结出的学习高等数学的认知规律与解题方法.

本书重点是各章典型例题分析中给出的解题指导与错误辨析. 典型例题是为解决学生在学习过程中暴露出的疑难与困惑而精心安排的，力求具有代表性，由浅入深，通过多侧面、不同解法的讨论以及对初学者易犯错误进行的剖析，使学生加深对高等数学中概念的理解并对解题方法与技巧进行归纳和总结，提高分析问题和解决问题的能力.

本书可作为高等院校理工科、经济管理和财经类各专业本科大学生学习“高等数学”的辅导教材，也可作为任课教师的教学参考书. 对于报考硕士研究生的高年级大学生，本书也是复习备考者的良师益友.

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数 …………………… (1)
一、内容提要 …………………… (1)
(一) 本章框架 …………………… (1)
(二) 重要的概念、性质与计算 …………………… (3)
二、教学要求 …………………… (14)
三、解题方法概论及错误辨析 …………………… (15)
(一) 解题方法概论 …………………… (15)
(二) 错误辨析 …………………… (16)
四、典型例题分析 …………………… (16)
五、练习题 …………………… (62)
第八章　多元函数微分及其应用 …………………… (66)
一、内容提要 …………………… (66)
(一) 本章框架 …………………… (66)
(二) 重要的概念、性质与计算 …………………… (67)
二、教学要求 …………………… (76)
三、解题方法概论及错误辨析 …………………… (77)
(一) 解题方法概论 …………………… (77)
(一) 错误辨析 …………………… (78)
四、典型例题分析 …………………… (78)
五、练习题 …………………… (134)
第九章　重积分 …………………… (137)
一、内容提要 …………………… (137)
(一) 本章框架 …………………… (137)
(二) 重要的概念、性质与计算 …………………… (138)
二、教学要求 …………………… (146)
三、解题方法概论及错误辨析 …………………… (147)
(一) 解题方法概论 …………………… (147)
(二) 错误辨析 …………………… (148)
四、典型例题分析 …………………… (149)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

五、练习题 ······ (185)
第十章　曲线积分与曲面积分 ······ (188)
一、内容提要 ······ (188)
（一）本章框架 ······ (188)
（二）重要的概念、性质与计算 ······ (190)
二、教学要求 ······ (202)
三、解题方法概论及错误辨析 ······ (202)
（一）解题方法概论 ······ (202)
（二）错误辨析 ······ (207)
四、典型例题分析 ······ (207)
五、练习题 ······ (229)
第十一章　无穷级数 ······ (235)
一、内容提要 ······ (235)
（一）本章框架 ······ (235)
（二）重要的概念、性质与计算 ······ (237)
二、教学要求 ······ (249)
三、解题方法概论及错误辨析 ······ (250)
（一）解题方法概论 ······ (250)
（二）错误辨析 ······ (251)
四、典型例题分析 ······ (251)
五、练习题 ······ (296)
第十二章　微分方程 ······ (298)
一、内容提要 ······ (298)
（一）本章框架 ······ (298)
（二）重要的概念、性质与计算 ······ (299)
二、教学要求 ······ (306)
三、解题方法概论及错误辨析 ······ (307)
（一）解题方法概论 ······ (307)
（二）错误辨析 ······ (307)
四、典型例题分析 ······ (308)
五、练习题 ······ (342)
附录 1　常用曲面方程及图形 ······ (345)
附录 2　常用曲面所围立体图形 ······ (347)
附录 3　练习题答案、提示与解答 ······ (352)

第七章　空间解析几何与向量代数

一、内 容 提 要

（一）本章框架

<table>
<tr><td rowspan="2">向量代数</td><td>向量的概念</td><td>(1) 向量的定义、向量与数量
(2) 向量的表示法：
① 文字符号表示
② 几何表示
③ 坐标及分向量表示
(3) 向量的模(长度)与方向
(4) 向量的方向角、方向余弦与方向数
(5) 特殊向量
① 零向量 $\mathbf{0}$
② 单位向量：$|\boldsymbol{a}|=1$ 的向量
③ 基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$
④ 负向量 $-\boldsymbol{a}$
⑤ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$
⑥ 矢径
(6) 两向量相等
(7) 两向量平行与垂直
(8) 两向量的夹角</td></tr>
<tr><td>向量的运算</td><td>(1) 向量的线性运算(加法与数乘)、方向角、方向余弦及定比分点公式
(2) 投影定理
(3) 向量与向量的乘法
① 数量积(亦称内积、点积)，两向量垂直条件
② 向量积(亦称外积、叉积)，两向量平行条件
③ 混合积*</td></tr>
</table>

（续表）

空间解析几何	空间坐标系	(1) 直角坐标系：空间点的直角坐标 (2) 柱面坐标系 (3) 球面坐标系
	平面及其方程	(1) 空间平面方程的各种形式 ① 点法式 ② 一般式 ③ 二点式 ④ 截距式 (2) 两平面的夹角 (3) 两平面垂直、平行的条件 (4) 点到平面的距离 (5) 平面束
	空间直线及其方程	(1) 空间直线方程的各种形式 ① 点向式(对称式或标准式) ② 参数式 ③ 一般式 ④ 两点式 (2) 两直线的夹角 (3) 两直线垂直、平行、共面的条件 (4) 直线与平面的夹角 (5) 异面直线间的距离 (6) 点到直线的距离
	空间曲面与曲线	(1) 空间曲面及其方程 (2) 空间曲线及其方程 (3) 旋转曲面 (4) 柱面 (5) 常见二次曲面

（二）重要的概念、性质与计算

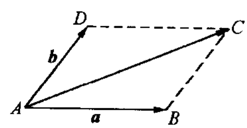
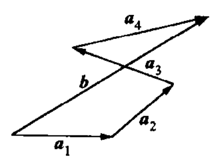
1. 向量的概念

向量的定义	既有大小又有方向的量
向量的表示法	(1) 文字符号表示法：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{AB}$ 等 (2) 几何表示法：一条带有箭头的有向线段 (3) 在直角坐标系中的坐标表示法及分向量表示法： 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$， $\boldsymbol{a}$ 在三坐标轴上的投影分别为 a_x,a_y,a_z，则 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$（坐标表示法） $=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$ （分向量表示法）
$\boldsymbol{a}$ 的模(长度)	$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$
$\boldsymbol{a}$ 的方向角	$\alpha=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})$，$\beta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})$，$\gamma=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})$，其中 α,β,γ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标轴 x,y,z 正向的夹角，规定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$
$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦	$\cos\alpha=\frac{a_x}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$， $\cos\beta=\frac{a_y}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，　$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ $\cos\gamma=\frac{a_z}{\|\boldsymbol{a}\|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$，
$\boldsymbol{a}$ 的方向数	$k\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，$k$ 为非零常数
两向量相等	大小相等，方向相同的两个向量称为相等的向量，即： 若 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件是： (1) 向量形式：$\|\boldsymbol{a}\|=\|\boldsymbol{b}\|$ 且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向 (2) 坐标形式：$a_x=b_x,a_y=b_y$，且 $a_z=b_z$
两向量平行	方向相同或相反的两个非零向量称为平行．$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$
两向量的夹角	两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定 $\angle AOB$ $(0\leqslant\angle AOB\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$ 规定：$\boldsymbol{0}$ 与其他向量的夹角在 0 与 π 中间任意取值

2. 几个特殊向量

零向量	模等于零的向量,记为 $\mathbf{0}$. 规定：零向量方向任意,零向量与一切向量平行、垂直
单位向量	模等于 1 的向量,记作 $\|\boldsymbol{a}\|=1$,也称幺模
基本单位向量	与坐标轴同方向的单位向量,如 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$, $\boldsymbol{j}=\{0,1,0\}$, $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$
与 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 同向的单位向量	$\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}=\dfrac{a_x}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{i}+\dfrac{a_y}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{j}+\dfrac{a_z}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{k}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$
负向量	与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等,方向相反的向量,记作 $-\boldsymbol{a}$
矢径(向径)	起点在原点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 对原点 O 的矢径(向径)

3. 向量的加法与减法

向量加法的平行四边形法则	如图所示,当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为边作平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 
向量加法的多边形法则	如图所示,首尾相接的若干个向量的和等于以第一个向量的起点为起点,以最后一个向量的终点为终点的向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$ 
向量的减法	规定：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$
向量加减法的坐标表示	设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\}$
运算规律	交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

4. 向量与数的乘法(简称为数乘)

定义	向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,其模为 $\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$,其方向由 λ 的符号按下述原则确定: (1) 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同 (2) 当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量 (3) 当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反
运算规律	设 λ,μ 为数量,则有 (1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu\boldsymbol{a})$ (2) 分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
定比分点公式	设点 $P(x,y,z)$是连接点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$的线段 P_1P_2 的分点,且$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ ($\lambda>0$ 为内分;$\lambda<0$ 且 $\lambda\neq-1$ 为外分),则分点 P 的坐标为 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

5. 向量的投影的性质

性质 1(投影定理)	向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦:$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cos\varphi$
性质 2	两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影的和,即 $\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_2$
性质 3	向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与数的乘积,$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$

6. 向量与向量的乘法

两向量的数量积(也称为点积或内积)	(1) 定义:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\theta$, 其中 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,$0\leqslant\theta\leqslant\pi$
	(2) 坐标表示: 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
	(3) 运算规律与性质: ① $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{a}^2$ ③ 交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ ④ 分配律:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ ⑤ 结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

（续表）

<table>
<tr><td rowspan="4">两向量的向量积（也称为叉积或外积）</td><td>(1) 定义：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$ 由下列方式给出：
① $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，$0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$
② $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定</td></tr>
<tr><td>(2) 坐标表示：
设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>(3) 运算规律与性质：
① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
② $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$
③ $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{b}\iff\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
④ 反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$
⑤ 分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$
⑥ 结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$　（λ 为数）</td></tr>
<tr><td>(4) 几何意义
$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积</td></tr>
<tr><td rowspan="3">三向量的混合积</td><td>(1) 定义及其坐标表示：
设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$，则
$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$</td></tr>
<tr><td>(2) 运算规律与性质：
① $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\iff[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=0$
② A,B,C,D 四点共面 $\iff\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面 $\iff[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=0$
③ 轮换性：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$
④ 点叉交换性：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$</td></tr>
<tr><td>(3) 几何意义：
$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$ 是这样一个数，它的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系，那么混合积的符号是正的；如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成左手系，那么混合积的符号是负.
以点 A,B,C,D 为顶点的四面体体积为
$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]\right|$$</td></tr>
</table>

7. 向量的线性关系

两向量共线	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ，使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 成立
三向量共面	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的数 λ,μ,γ，使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 成立

8. 空间坐标系

<table>
<tr><td>直角坐标</td><td>空间一点 $P \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 有序实数组 (x,y,z)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">柱面坐标</td><td>空间一点 $M(x,y,z)$ 在 Oxy 面上的投影 P 的极坐标为 r,θ，则这样的三个数 r,θ,z 叫做点 M 的柱面坐标，其中
$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad -\infty<z<+\infty$$</td></tr>
<tr><td>点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为
$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=z \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">球面坐标</td><td>空间一点 $M(x,y,z)$ 也可用三个有次序的数 r,φ,θ 来确定：
r：原点 O 与点 M 间的距离
φ：有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角
θ：从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角（P 为点 M 在 Oxy 面上的投影）.
r,φ,θ 的变化范围是
$$0\leqslant r<+\infty,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$</td></tr>
<tr><td>点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为
$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$</td></tr>
<tr><td>说明</td><td>（1）本章讨论只涉及空间直角坐标系
（2）柱面坐标及球面坐标将在第九章中使用</td></tr>
</table>

9. 空间平面及其方程

（1）平面方程的各种形式

点法式	过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且法向量为 $\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$ 的平面方程为 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

（续表）

一般式	法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 的平面方程的一般形式为三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C 不全为零） 特殊情形： （1）$D=0$：平面 π 过原点，仅改变 D 的值，可得到一组平行平面 （2）A,B,C 中有两个为零：平面 π 平行于坐标平面 （3）A,B,C 中只有一个为零：平面 π 平行于某一坐标轴
三点式	过不共线三点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$（$i=0,1,2$）的平面方程为 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$ 或 $[\overrightarrow{P_0P}\ \ \overrightarrow{P_0P_1}\ \ \overrightarrow{P_0P_2}]=0$　（$P(x,y,z)$ 为平面上任一点）
截距式	在 x,y,z 轴上的截距分别为 p,q,r（$pqr\neq0$）的平面方程为 $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}+\dfrac{z}{r}=1$
法线式	与原点距离为 d（$d\neq0$），从原点向着平面方向的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向角为 α,β,γ 的平面方程为 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-d=0$
点线式	过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 且过以 $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$ 为方向向量的直线 L 的平面方程为 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0$ 或 $[\overrightarrow{P_0P}\ \ \overrightarrow{P_0P_1}\ \ \boldsymbol{a}]=0$　（$P(x,y,z)$ 为平面上任一点）

（2）平面与平面间的关系

设平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{a_1,b_1,c_1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{a_2,b_2,c_2\}$.

两平面的夹角	设 π_1 与 π_2 的夹角为 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{\lvert\boldsymbol{n}_1\rvert\lvert\boldsymbol{n}_2\rvert}=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$
两平面相互平行	$\pi_1/\!/\pi_2\Longleftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$　（$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$）
两平面相互垂直	$\pi_1\perp\pi_2\Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$　（$\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$）

平面束	通过两平面交线（轴） $L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ 的平面束方程为 $\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0,$ 其中 λ,μ 为不同时为零的任意常数

10. 空间直线及其方程

(1) 空间直线方程的各种形式

点向式 （或称对称式、标准式）	过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 且与向量 $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$ 平行的直线方程为 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$
参数式	直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt\end{cases}$ （t 为参数）
两点式	过两不同点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2)$ 的直线方程为 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$
一般式 （或称交面式）	两平面的交线的方程 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$

(2) 直线与直线间的位置关系

设两直线 L_1,L_2 的方向向量分别为

$$\boldsymbol{a}_1=\{l_1,m_1,n_1\},\quad \boldsymbol{a}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$$

两直线的夹角	L_1,L_2 的夹角 $\theta\left(\text{规定 } 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 由下式确定 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2}{\lvert\boldsymbol{a}_1\rvert\lvert\boldsymbol{a}_2\rvert}=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$
两直线平行	$L_1/\!/L_2\Longleftrightarrow\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ $(\boldsymbol{a}_1/\!/\boldsymbol{a}_2)$
两直线垂直	$L_1\perp L_2\Longleftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ $(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0)$
两直线共面	L_1 与 L_2 共面 $\Longleftrightarrow[\overrightarrow{P_1P_2}\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]=0$，其中 P_1,P_2 分别为直线 L_1,L_2 上的点

(3) 直线与平面间的各种关系

设有直线 L：$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，其方向向量 $\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$；平面 π：$ax+by+cz+d=0$，其法向量 $\boldsymbol{n}=\{a,b,c\}$.

直线与平面的交点	直线 L 与平面 π 的交点可由 L 的参数式方程 $\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt\end{cases}$ （t 为参数） 代入平面 π 的方程求得
直线与平面的夹角	直线 L 与平面 π 的夹角 θ $\left(规定\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 由下式确定 $\sin\theta=\frac{\lvert\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{n}\rvert}=\frac{\lvert al+bm+cn\rvert}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
直线与平面平行	$L/\!/\pi \Longleftrightarrow al+bm+cn=0 \quad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0)$
直线与平面垂直	$L\perp\pi \Longleftrightarrow \frac{l}{a}=\frac{m}{b}=\frac{n}{c} \quad (\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{n})$
直线在平面上的投影方程	L 在 π 上的投影方程为 由 $\begin{cases}\pi\ 平面方程,\\ 过直线\ L\ 而垂直于\ \pi\ 的平面方程\end{cases}$ 联立解得，即 $\begin{cases}ax+by+cz+d=0,\\ [\overrightarrow{P_0P}\ \ \boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{n}]=0,\end{cases}$ 其中 P_0 为 L 上的点，P 为投影线上任一点

11. **有关距离**

空间两点间距离	点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离为 $d=\lvert M_1M_2\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
点到平面的距离	点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离为 $d=\frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
两平行平面间的距离	两平行平面 π_i：$ax+by+cz+d_i=0$ $(i=1,2)$ 间的距离为 $d=\frac{\lvert d_1-d_2\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

（续表）

两异面直线间的最短距离	两异面直线 L_1,L_2 间的最短距离为 $$d=\frac{\lvert[\overrightarrow{P_1P_2}\ \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]\rvert}{\lvert\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2\rvert},$$ 其中 P_1,P_2 分别为 L_1,L_2 上的点
点到直线的距离	点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 L：$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 的距离为 $$d=\frac{\lvert\overrightarrow{P_1P_0}\times\boldsymbol{a}\rvert}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert},$$ 其中 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上任一确定的点，$\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$ 为 L 的方向向量

12. 空间曲面与曲线

（1）曲面方程

一般式	Σ：$F(x,y,z)=0$
参数式	Σ：$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v)\end{cases}$ （u,v 为参数）

（2）曲线方程

一般式	Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ （视为两空间曲面的交线）
参数式	Γ：$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{cases}$ （t 为参数）

（3）旋转曲面

旋转曲面方程	Oyz 坐标面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 $\genfrac{}{}{0pt}{}{z}{y}$ 轴旋转一周所成曲面方程为 $\begin{matrix}f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,\\ f(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0,\end{matrix}$ 其余的类推
符号的确定	绕 z 轴转：z 不动，y 换为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，$y\geqslant0$ 处，取"+" $y<0$ 处，取"－"
	绕 y 轴转：y 不动，z 换为 $\pm\sqrt{z^2+x^2}$，$z\geqslant0$ 处，取"+" $z<0$ 处，取"－"

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com