唐旭晖 牛培平 胡成栋 编著
李迈岸 审

高等数学

GAO DENG SHU XUE

（考研提高版）

中国社会出版社

考研提高版

高等数学

唐旭晖 牛培平 胡成栋 编 李冱岸 审

中国社会出版社

本书作为高等数学提高课程的教学用书，涵盖了考研数学大纲中对高等数学所要求的全部内容。全书由引论及十章组成，按通常的教学顺序编排，其中包括内容提要、例题解析、习题、习题的答案与提示。

本书内容全面，易于教学与自学，可作为考研数学辅导班、数学竞赛辅导班的教材或参考用书，也可作为参加考研或数学竞赛学生的自学辅导书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(考研提高版)/唐旭晖等编著.—北京：中国社会出版社，2006.1

ISBN 7-5087-0910-1

Ⅰ.高… Ⅱ.唐… Ⅲ.高等数学—研究生—入学—考试—自学参考资料

Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第153899号

书　　名：高等数学(考研提高版)

编 著 者：唐旭晖　牛培平　胡成栋

责任编辑：尤永弘

出版发行：中国社会出版社　　邮政编码:100032

通联方法：北京市西城区二龙路甲33号新龙大厦

电话:66051698　　电传:66051713　　邮购电话:66060275

经　　销：各地新华书店

印刷装订：北京京海印刷厂

开　　本：787mm×1092mm　　1/16

印　　张：17

字　　数：375千字

版　　次：2006年1月第1版

印　　次：2006年1月第1次印刷

书　　号：ISBN 7-5087-0910-1/O·15

定　　价：28.00元

序

我国的高等教育已逐步从精英教育进入大众化教育，因此近年来很多高校对《高等数学》教学的深度和广度都相应降低了要求。然而，各高校中都有不少学生希望加深对《高等数学》的理解和掌握，打算在本科毕业之后攻读研究生，本书就是为适应这种教学要求而编写的。

本书的编者都是在北方工业大学任教多年的教授，学术造诣较深，教学经验丰富，并且是该校的数学竞赛与考研数学的指导教师。多年来，北方工业大学的学生在研究生入学数学考试和北京市数学竞赛中都取得了优异的成绩。本书是编者在讲授《高等数学提高》课程的教学实践基础上逐步形成的。

本书的内容提要和例题、习题涵盖了考研数学大纲中对《高等数学》所要求的主要内容，例题、习题颇具典型性，因此本书可以作为考研辅导班或数学竞赛辅导班的教学用书。

李 心 灿

2005 年 9 月

前　言

近年来，大学随着教育改革的深入和经济的发展，学生个人发展意向多元化的特点更为显著。为了适应这种变化，我们对高等数学这门基础课程的教学内容在深度与广度方面进行了适当的调整，同时，为了满足相当多的学生参加考研和数学竞赛等对数学更高的需求，开设了高等数学提高这门课程，以便与考研数学大纲的要求紧密衔接。

本课程可在学完高等数学上册后，与高等数学下册同学期的第三周开设。为了与大学一年级的《高等数学》下册的教学进度相协调，本书在结构设计、解法选择上注重避开学生还没有学到的知识，而力求将新学过的知识融会贯通。本书涵盖了考研数学大纲中对高等数学所要求的全部内容，并对超纲的部分以*号方式予以标记。本书由引论及十章组成，按高等数学的通常教学顺序编排，其中包括内容提要、例题解析、习题、习题的答案与提示，并将主要章节中的例题与习题划分为A、B两档，其中A档主要包括较为基础的计算题、填空题、选择题，B档主要包括证明题、综合题和应用题。

本书内容全面，易于教学与自学，可作为考研数学辅导班、数学竞赛辅导班的教材或参考用书，也可作为参加考研或数学竞赛学生的自学辅导书。

本书的引论、第一章、第二章、第三章和第六章由牛培平编写；第四章、第七章、第八章由唐旭晖编写；第五章、第九章、第十章由胡成栋编写。由唐旭晖负责全书的统稿和修订，李沍岸作最后的审稿。

原国家教委高等学校数学与力学教学指导委员会成员、北京航空航天大学李心灿教授审阅了书稿并提出了宝贵的意见，为此我们对李心灿教授表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中的不妥和疏漏之处，恳请识者批评指正。

编　者

2005年9月于

北方工业大学

目　录

引 论 变量与函数

内容提要

基本概念 元素，集合，变量，映射，函数。
函数性质 有界性，单调性，奇偶性，周期性。
主要讨论对象 基本初等函数，初等函数。
常用代换 变量变换，函数变换，辅助变量，辅助函数。

例 题

变量、函数、极限是高等数学最基本、最重要的概念。本节主要练习引入变量、函数的方法。

例 1 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$。

分析 根据数列极限与函数极限的关系，将变量连续化，这样就可以用微积分的方法（例如，罗必达法则）计算极限了。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln' x}{x'}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

例 2 计算 $\max\left\{n^{\frac{1}{n}},n\in N\right\}$。

分析 为了利用导数讨论 $\max\left\{n^{\frac{1}{n}},n\in N\right\}$，必须将变量连续化，将离散变量问题转化为连续变量问题，化为求函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 的最大值问题。

解 令 $f'(x)=(e^{\frac{\ln x}{x}})'=x^{\frac{1}{x}}(\dfrac{1-\ln x}{x^2})=0$，$x>0$，得 $x=e$。

注意$f'(x)=\begin{cases}>0, & x\in(0,e); \\ <0, & x>e,\end{cases}$ 知$x=e$是$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$在区间$(0,+\infty)$上的最大值点。比较$2^{\frac{1}{2}}$与$3^{\frac{1}{3}}$，有$(2^{\frac{1}{2}})^6=8<9=(3^{\frac{1}{3}})^6$，得 $\max\left\{n^{\frac{1}{n}}, n\in N\right\}=3^{\frac{1}{3}}$。

例 3 设$f(x)$、$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续（简记为$f(x)$、$g(x)\in C(R)$或$\in C_R$），且$f(x)+f(-x)=k$，$g(x)=g(-x)$。试证：

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=k\int_0^a g(x)dx$$

证 将a看作辅助变量，引入辅助函数

$$F(a)=\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx-k\int_0^a g(x)dx$$

化为函数恒等式$F(a)=0$的证明问题。

由$F'(a)=f(a)g(a)+f(-a)g(-a)-kg(a)$及题设条件可知$F'(a)=0$，所以$F(a)$为常数。再注意注意到，当$a=0$时，有$F(a)=0$，所以$F(a)=0$，故原恒等式成立。证毕。

例 4 设$f(x)\in C(R)$，$f(x+T)=f(x)$。试证：$\int_x^{x+T}f(x)dx=$常数。

证 由$\frac{d}{dx}\int_x^{x+T}f(x)dx=f(x+T)-f(x)=0$，得$\int_x^{x+T}f(x)dx=$常数。证毕。

例 5 设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导（指有连续的导函数，简记为$f(x)\in C^1[0,1]$或$f(x)\in C^1{}_{[0,1]}$），且$f(0)=0$，$0<f'(x)\leqslant 1$。试证：$(\int_0^1 f(x)dx)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)dx$，并求出使等号成立的$f(x)$。

解 引入辅助变量，将积分上限 1 换为变量t。

$t=0$时，不等式成立。

$1 \geqslant t > 0$ 时，研究函数 $F(t) = (\int_0^t f(x)dx)^2 - \int_0^t f^3(x)dx$，

有 $F'(t) = 2f(t)\int_0^t f(x)dx - f^3(t) = f(t)(2\int_0^t f(x)dx - f^2(t))$。

记 $g(t) = 2\int_0^t f(x)dx - f^2(t)$，有

$$g'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t))$$

由 $f(0) = 0$ 及 $0 < f'(t) \leqslant 1$ 知，当 $1 \geqslant t > 0$ 时有 $f(t) > 0$，从而得 $g'(t) \geqslant 0, 1 \geqslant t > 0$。从而，利用 $g'(t) \geqslant 0, g(0)=0$ 知，当 $1 \geqslant t > 0$，有 $g(t) \geqslant 0$，即得 $F'(t) \geqslant 0$。注意 $F(0) = 0$，故当 $1 \geqslant t > 0$ 时，有 $F(t) \geqslant 0$。特别当 $t = 1$ 时，有 $F(1) \geqslant 0$，即证得所要的不等式。

现求解使等式成立的函数 $f(x)$：

令 $g'(t) = 2f(t) - 2f(t)f'(t) = 2f(t)(1 - f'(t)) = 0$，注意到 $f(t) \neq 0$（$0 < t \leqslant 1$）得 $1 - f'(t) = 0$，利用条件 $f(0) = 0$，得使等式成立的函数为 $f(x) = x$。证毕。

例 6 试证：$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

证 代换 $\frac{1}{n}$ 为连续变量 x，记 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} - e$，则有

$$f(0+) = 0, \quad f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{1+x} - \ln(1+x))\frac{1}{x^2}$$

又记 $g(x) = 1 - \frac{1}{1+x} - \ln(1+x)$。则由 $g(0) = 0$，$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$ 知，当 $x > 0$ 时，有 $g(x) < 0$，从而有 $f(x) < 0$，即得 $(1 + \frac{1}{n})^n < e$。

用类似的方法可证明不等式 $e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$。证毕。

例 7 芝诺（Zeno of Elea，公元前五世纪）的第一个悖论：阿基里斯（Achilles，希腊神话中的善跑者）永远追不上乌龟。阿基里斯的速度是乌龟速度的 10 倍，但是他让乌龟先走了 100 米。当阿基里斯追了这 100 米时，龟快又向前先走了 10 米，当阿基里斯追了这 10 米时，龟快又向前先走了 1 米，如此进行下去直至无穷，阿基里斯永远追不上乌龟。阿基里斯真的永远追不上乌龟吗？

解 设阿基里斯的速度是 v。当阿基里斯追到乌龟的出发点时，他用了时间 $\dfrac{100}{v}=T$，而在这段时间里，乌龟向前走了 $\dfrac{vT}{10}$ 米。依此类推，经过时间

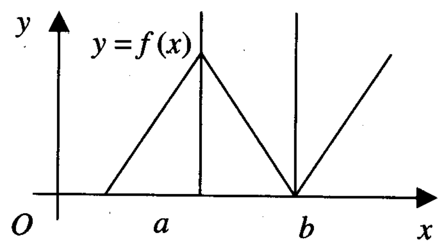
$$T+\frac{T}{10}+\frac{T}{10^2}+\cdots=\lim_{k\to\infty}T\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{10^n}=T\lim_{k\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{10})^{k+1}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}T$$

时，阿基里斯追上了乌龟，这时阿基里斯和乌龟都处在距离出发点 1000/9 米的地方。

那么为什么会有这个悖论呢？这是因为在常量数学的框架下，无限个时间段 $T,\dfrac{T}{10},\dfrac{T}{10^2},\Lambda$ 相加是多少是说不清楚的，而只有在引进变量，有了明确的极限概念后，才能明确的说明 $T+\dfrac{T}{10}+\dfrac{T}{10^2}+\Lambda$ 是个有限的数 $\dfrac{10}{9}T$。由此悖论的问题也就自然的解决了。

例 8 设 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于直线 $x=a$、$x=b\,(a\neq b)$ 均对称。试证：$f(x)$ 是周期函数。

分析 通过对图形进行分析可知，周期为 $2(b-a)$。



证 $f(x+2(b-a))=f(b+x+b-2a)$

利用 $f(x)$ 关于 $x=b$ 的对称性，得

$$f(b+x+b-2a)=f(b-x-b+2a)=f(a-x+a)$$

利用 $f(x)$ 关于 $x=a$ 的对称性，得

$$f(a-x+a)=f(a+x-a)=f(x)$$

故有 $f(x+2(b-a))=f(x)$。所以 $f(x)$ 是 $2(b-a)$ 周期函数。证毕。

例 9 设 $f(0)=0$，且 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，这里 a、b、c 为常数，$|a|\neq|b|$。试证：$f(x)$ 为奇函数。

证 作变量替换，x 换为 $\frac{1}{x}$，增加一个方程

$$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx$$

与原方程联立，解得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-b^2}(\dfrac{ac}{x}-bcx), & x\neq 0;\\ 0, & x=0。\end{cases}$

显然 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。证毕。

例 10 设 $f(x)\in C(R)$，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$。试证：

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也为偶函数；

（2）若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减。

证（1）若 $f(x)$ 为偶函数，则

$$F(-x)=\int_0^{-x}-(x+2t)f(t)dt$$

$$\overset{t=-u}{=}\int_0^x(x-2u)f(-u)du\overset{f(-u)=f(u)}{=}\int_0^x(x-2t)f(t)dt=F(x)$$

$\therefore F(x)$ 也为偶函数。

（2） $F'(x)=\dfrac{d}{dx}(x\int_0^x f(t)dt-2\int_0^x tf(t)dt)$

$$=-xf(x)+\int_0^x f(t)dt=-xf(x)+xf(\xi)\text{，其中}\xi\in[0,x]$$

由 $f(x)$单调不增，得$-xf(x)+xf(\xi)\geqslant 0$，$\xi\in[0,x]$。$\therefore F'(x)\geqslant 0$，故有 $F(x)$单调不减。证毕。

例 11　柯西（Cauchy）**不等式**　若 $f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$，则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant(\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

柯西不等式的离散形式：$(\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2\leqslant(\sum_{i=1}^n x_i^{\ 2})(\sum_{i=1}^n y_i^{\ 2})$。

证法 1　把不等式看作关于参数 b 的不等式。

记　$h(b)=(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2-\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$，

则有 $h(a)=0$，

$$h'(b)=2f(b)g(b)\int_a^b f(x)g(x)dx-f^2(b)\int_a^b g^2(x)dx-g^2(b)\int_a^b f^2(x)dx$$

$$=-\int_a^b (f(b)g(x)-g(b)f(x))^2dx\leqslant 0$$

得 $h(b)\leqslant 0$。证毕。

证法 2　引入参数 t。

$\Theta\ (f(x)+tg(x))^2=f^2(x)+2tf(x)g(x)+t^2g^2(x)\geqslant 0$

$\therefore \int_a^b f^2(x)dx+2t\int_a^b f(x)g(x)dx+t^2\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0$

$\therefore$这个关于 t 的二次多项式的判别式$\leqslant 0$，由此即得

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\text{。证毕。}$$

离散形式可用方法 2 证明：由

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+t^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2\geqslant 0$$

知其判别式≤0，即得$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2\leqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2})(\sum_{i=1}^{n}y_i)^2$。

习 题

1．设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1。\end{cases}$ 计算$f(f(f(x)))$。

2．设$f(x)$和$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，$f(x)$为连续函数且$f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$有间断点，则（ ）。

（A）$\varphi(f(x))$必有间断点；（B）$(\varphi(x))^2$必有间断点；

（C）$f(\varphi(x))$必有间断点；（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点。

3．设$f(x)$是连续的函数，$F(x)$是$f(x)$原函数，则（ ）。

（A）当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数；

（B）当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数；

（C）当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数；

（D）当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数。

4．设$f(x)$是连续的周期函数，$F(x)$是$f(x)$的原函数。试证：存在常数k，使得

$F(x)-kx$ 是周期函数。

5．设 $g(x)=\int_0^x f(u)du$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{2}, 0\leqslant x\leqslant 1; \\ \dfrac{x-1}{3}, 1<x\leqslant 2。\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内（　）。

（A）无界；　（B）递减；　（C）不连续；　（D）连续。

6．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$。

7．设 $0\leqslant p(x)\in C[a,b]$，$f(x)$、$g(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)$、$g(x)$ 具相同单调性。试证：

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx\leqslant\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)g(x)f(x)dx$$

8．设 $0<a<b$。试证：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$。

答案与提示

1．1。　**2**．（D）。　**3**．（A）。其他情况反例：（B）$f(x)=1$，$F(x)=x+1$；（C）$f(x)=1$，$F(x)=x$；（D）$f(x)=x$，$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$。　**4**．提示：应用例题 4，得 $k=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$。　**5**．D。　**6**．1。　**7**．将 b 看作参变量。　**8**．把 b 看作辅助变量是方便的。但若将不等式乘以 a，用 $t=\dfrac{b}{a}$ 作为辅助变量更为方便。