高等数学入门三十讲

翟连林　张宁生
丁家泰　王文涛　编著

机械工业出版社

本书包括命题、反证法、存在性与唯一性、数学符号、函数的周期与延拓、双曲函数与反双曲函数等新入学的大学生碰到问题较多的内容。这些内容在中学讲得不透彻，有的则根本没讲，而大学讲课时对此往往一带而过，给大学新生学习高等数学带来一定困难。本书把上述“两不管区”的基础知识总结成三十个专题，旨在解决高等数学学习的入门难问题。

本书可供理工科大学一年级学生阅读，亦可作为高中数学竞赛课外辅导教材。

高等数学入门三十讲

翟连林 张宁生 丁家泰 王文涛 编著

*

责任编辑：蓝火金 版式设计：张伟行

封面设计：肖 晴 责任校对：熊天荣

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32 · 印张 10 · 字数 220 千字

1989 年 10 月北京第一版 · 1989 年 10 月北京第一次印刷

印数 0,001—[illegible],840 · 定价：7.20 元

*

ISBN 7-111-01298-4/G·97

前　言

我们都是在教学第一线的教师，新入学的大学生，无论是普通高校的新生，还是各类成人高校的新生，开始学习高等数学，都感到困难，不习惯，很长时间入不了门. 究其原因，一方面是高等数学的思想方法与中学学习的初等数学思想方法有质的区别，另一方面是学习高等数学的有些必备知识在中学讲得不深不透，在高等数学讲课时又一带而过. 本书就是为解决这一问题而编写的.

本书包括命题、反证法、数学归纳法、存在性与唯一性、充分条件与必要条件、数学符号以及多值函数与隐函数、双曲函数与反双曲函数等内容. 这些内容不仅为学好高等数学铺平了道路，也为学习高等代数等其他课程扫清了障碍.

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正.

翟连林　张宁生等

1987.8 于北京

目　录

第一讲　命　　题

1．命题

请看下面三个句子：

（1）等腰三角形两底角相等.

（2）末位数字是0、2、4、6、8的整数被2整除.

（3）猫是动物.

上面的句子都是命题，什么是命题呢？

具有某种性质或者不具有某种性质的句子叫命题.

命题是句子，但这个句子必须“具有某种性质或者不具有某种性质”．例如，上面的三个命题：

命题（1）指出了三角形中“具有等边对等角”的性质.

命题（2）指出整数中末位数字为0、2、4、6、8的整数“具有被2整除”的性质.

命题（3）指出猫“是动物”这一属性.

命题（1）～（3）都是正确的.

也有错误的命题，这样的命题是一个不具有某种性质的句子．例如：

（4）
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$

就是一个错误的命题．因为

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

它“不具有等于$\frac{2}{5}$”的属性．但错误的命题仍叫命题．

总之，能判断是正确还是错误的句子就是命题．

如果命题是正确的，记作T；

如果命题是错误的，记作F．

2．命题的结构

观察下表中的命题（1）～（4），不难发现，它是由条件、结论两个部分组成的．

结构 / 命题序号	条件　A	结论　B
（1）	如果一个三角形是等腰三角形	那么这个三角形的两底角相等
（2）	如果末位数字是0、2、4、6、8的整数	那么该整数被2整除
（3）	如果是猫	那么它是动物
（4）	如果有$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	那么结果等于$\frac{2}{5}$

小结：命题由条件、结论两部分组成．命题P的一般形式为

若A则B，记作$A \rightarrow B$

3．性质与猜想

命题的正确性是经过人们亿万次的重复实践检验而得到证实的．

在数学中，命题的正确性只有经过逻辑推理、证明之后才被承认．

数学家哥德巴赫在1742年6月7日写信给数学家欧拉

提出："每一个不小于 6 的偶数都可以表示为两个质数㊀的和"，即

$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

人们到现在已经知道，对 33×10^6 以下的每一个偶数都可以表示成为两个质数的和．尽管如此，仍是在局部范围内是正确的，并没有得到证明．这样的命题叫猜想．

哥德巴赫猜想就是一个有名的猜想．有许多猜想到现在还没有解决，即还没有证明它正确与否．

费尔马猜想：方程 $x^n + y^n = z^n$，当 n 是大于 2 的整数时，无正整数解．这也是一个没有得到解决的猜想．

也有一些猜想用反例给否定了．例如

费尔马数"猜想"：$F_n = 2^{2^n} + 1$ 形式的数，当 n 是正整数时，F_n 是质数．

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$
$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

费尔马看到 5，17，257，65537 都是质数，由经验归纳认为一般结论也成立．数学家欧拉否定了这个猜想．他指出：

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

㊀ 一个大于 1 的整数，如果除了它本身和 1 以外，不能被其他正整数所整除，那么这样的数称为质数（也叫素数）．如 2，3，5，7，11，13，17 等都是质数．质数有无穷多个．

$$=641\times 6700417$$

就不是质数.

如果命题是错误的，只要举出反例驳倒它即可，称为反驳.

4. 命题的四种形式

先举一个例子：

原命题：如果一个三角形的两边相等(A)，那么它所对的角也相等(B)；

逆命题：如果一个三角形的两角相等(B)，那么它所对的边也相等(A)；

否命题：如果一个三角形的两边不等(非A)，那么它所对的角也不等(非B)；

逆否命题：如果一个三角形的两角不等(非B)，那么它所对的边也不等(非A).

从上面这个例子看到命题的四种形式是

原命题：若A则B；

逆命题：若B则A；

否命题：若非A则非B；

逆否命题：若非B则非A.

上例中四种形式的命题都真，但这并不是一般的规律.例如：

原命题：猫是哺乳动物；

逆命题：哺乳动物是猫；

否命题：不是猫就不是哺乳动物；

逆否命题：不是哺乳动物就不是猫.

从此例看到原命题、逆否命题真；逆命题、否命题假.

一般地，有：原命题、逆否命题等价（即一个真，另一

个也真；一个假，另一个也假）；逆命题、否命题等价.

为了不影响我们研究的主要课题，在此不想深入地、过细地去讨论它，只要求读者有一般性的了解就够了.

习题一 A 组

1. 试举5个正确的命题，5个错误的命题。

2. 证明下列性质：

（1）若 x_1，x_2 是 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根，则

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

（2）三角形的中位线平行底边且等于底边之半.

3. 举例反驳命题："实数的平方是正数"不正确。

4. 请你提出两个不易被证实或否定的猜想.

5. 试将下列命题作原命题，写出它的逆命题、否命题、逆否命题.

（1）垂直平分线上的点到线段两端等距离.

（2）平行四边形对角线互相平分。

（3）对顶角相等.

（4）数字之和被3整除的整数一定被3整除。

习题一 B 组

1. 将下列命题作原命题，写出它的逆命题、否命题、逆否命题.

（1）若 A 则 B；

（2）若 B 则 A；

（3）若非 A 则非 B；

（4）若非 B 则非 A。

试将它们的内在联系整理总结出来。

2. 将自然数 $n>11$ 表示为两个合数[1]之和。

---

[1] 在正整数中，除了能被1和本身整除以外，还能被其他正整数整除的数叫做合数（也叫复合数或合成数）. 例如，6除了能被1和6整除以外，还能被2和3整除，所以它是合数.

观察：

$$
\begin{aligned}
12 &= 4+8=6+6\\
13 &= 9+4\\
14 &= 4+10=6+8\\
15 &= 9+6\\
16 &= 4+12=6+10=8+8\\
17 &= 9+8
\end{aligned}
$$

但这仅仅是验证，在局部范围内总结出来的，如何抽象完整地给出证明。

习题一A组解答

3．反驳：当 $x=0$ 时，$x^2=0$．此时 x^2 并非正数。

5．（1）逆命题：与线段两端等距离的点在线段的垂直平分线上；

否命题：不在垂直平分线上的点到线段两端距离不等；

逆否命题：与线段两端距离不等的点不在线段的垂直平分线上．

（2）逆命题：对角线互相平分的四边形是平行四边形；

否命题：非平行四边形其对角线不互相平分；

逆否命题：对角线不互相平分的四边形非平行四边形。

（3）逆命题：若两个角相等，则此二角是对顶角；

否命题：若两个角非对顶角，则此二角不等；

逆否命题：若两角不等，则此二角非对顶角．

（4）逆命题：被3整除的整数，其数字之和也被3整除；

否命题：数字之和不被3整除的整数一定不被3整除；

逆否命题：不被3整除的整数，其数字之和也不被3整除。

习题一B组解答

1．如图1-1。

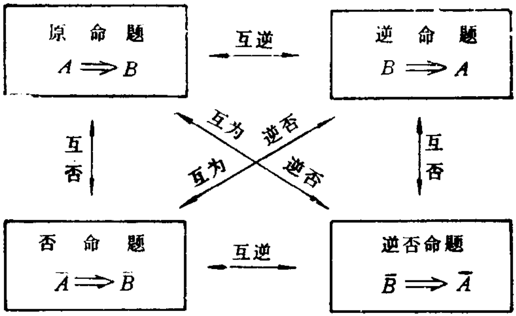

图 1-1

2. 当 n 是偶数时，则 $n \geqslant 12$。

$$n = 4 + 2m$$

其中自然数 $m \geqslant 4$；

当 n 是奇数时，则 $n \geqslant 13$。

$$n = 9 + 2m$$

其中自然数 $m \geqslant 2$。

第二讲　反　证　法

1. 从猜想的可能性谈起

猜想是经验归纳的结果．猜想可能正确，也可能是错误的．

如果猜想正确，这就需要证明，使之从感性认识上升到理性认识．反证法就是一种有力的证明方法．

如果猜想错误，这就需要举出反例驳倒它，例如，我们观察到

$$\frac{3+5}{2}>\sqrt{3\times 5},\quad \frac{3+11}{2}>\sqrt{3\times 11},$$

$$\frac{8+7}{2}>\sqrt{8\times 7},\quad \cdots\cdots$$

由经验归纳总结出

当 $a>0$， $b>0$ 时，有 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$．

但当我们发现 $\frac{3+3}{2}=\sqrt{3\times 3}$ 时，就推翻了上述猜想，此时的猜想或者丢弃它，或者修正它．此例可修正使之成为性质：

当 $a>0$， $b>0$ 时，有 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$．

这就是一个认识、提高、再认识、再提高的过程．事实上，

假定　$\frac{a+b}{2}\ngeqslant\sqrt{ab}$，

则 $\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}\Longrightarrow a+b<2\sqrt{ab}$

$\Longrightarrow(a+b)^2<4ab\Longrightarrow a^2+2ab+b^2-4ab<0$

$\Longrightarrow(a-b)^2<0$，与$(a-b)^2\geqslant 0$矛盾.

故 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

2. 什么是反证法

让我们先来看两个例子：

例 1 证明：若 $a^2=0$，则 $a=0$.

证明：假如 $a\neq 0$，则 $a^2>0$ 与已知 $a^2=0$ 矛盾.

故 $a=0$.

例 2 证明：若 n^2是偶数，则 n 也是偶数.

证明：假如 n 不是偶数，则 n 是奇数，可设 $n=2m+1$，其中 m 是整数.

则 $n^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1=2(2m^2+2m)+1$ 是奇数，与已知 n^2是偶数矛盾.

故 n 是偶数.

从例 1、例 2 看出，利用反证法证题的要点如下：

先否定结论正确，经过一系列逻辑推理导出矛盾，从而肯定结论正确.

3. 利用反证法可能导出的矛盾

利用反证法论证时，将会导出什么样的矛盾呢？先看几个例子：

例 3 证明：两个奇数的平方和不可能是一个整数的平方.

证明：（利用反证法）

由于一个奇数的平方仍为奇数，所以两个奇数的平方和

为偶数.

假如两个奇数的平方和是一个整数的平方，则必为一个偶数的平方.

设此偶数为 $2k$，原来的两个奇数分别为 $2m-1$，$2n-1$. 因此

$$(2m-1)^2+(2n-1)^2=(2k)^2$$

$$4m^2-4m+1+4n^2-4n+1=4k^2$$

$$2(m^2+n^2-m-n)+1=2k^2$$

$$奇数=偶数$$

矛盾.

故两奇数的平方和不可能是一个整数的平方.

例 4 证明：$\sqrt{2}$ 为非有理数.

证明：（利用反证法）

假如 $\sqrt{2}$ 是有理数，可设 $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$，且 m、n 无大于 1 的公因数.

于是 $n=\sqrt{2}m \Longrightarrow n^2=2m^2$，即 n^2 是偶数.

$\therefore$ n 是偶数（前面例 2 已证）. 设 $n=2n_1$，

则 $n^2=(2n_1)^2=4n_1^2$，即 $2m^2=4n_1^2 \Longrightarrow m^2=2n_1^2$ 是偶数，

$\therefore$ m 是偶数，设 $m=2m_1$.

于是 m、n 有公因数 2，与临时假定"m、n 无大于 1 的公因数"矛盾.

故 $\sqrt{2}$ 为非有理数.

例 5 证明：如果在整数 n（$n>1$）里没有不超过 $\sqrt{n}$ 的因数，那么 n 一定是质数.

证明：（利用反证法）

假如 n 是合数，则 n 除了 1 和它本身外，还有其它的正

因数，即 $n=ab$. 其中整数 a、b 非 1、非 n. 由已知条件知 $a>\sqrt{n}$，$b>\sqrt{n}$.

$\therefore\quad n=ab>\sqrt{n}\sqrt{n}=n$，即 $n>n$. 这就出现了矛盾，故 n 是质数.

从上面 5 个例子看到，利用反证法论证时，可能导出下面的矛盾：

（1）与已知矛盾．如例 1、例 2；

（2）与公理、已知性质矛盾．如例 3；

（3）与临时假定矛盾．如例 4；

（4）自相矛盾．如例 5.

4. 反证法与逆否命题

欲论证原命题正确，也可以论证逆否命题正确；反之，欲论证逆否命题正确，也可以论证原命题正确．两者是等价的．即

（1）如果原命题(若 A，则 B) T，则逆否命题(若非 B，则非 A) T；

（2）如果逆否命题 T，则原命题 T.

证明：（利用反证法）

（1）若逆否命题 F，即 A，则由原命题 T 知"若 A，则 B"，与已知非 B 矛盾.

故逆否命题 T.

（2）若原命题 F，即非 B，则由逆否命题 T 知"若非 B，则非 A"，与已知 A 矛盾.

故原命题 T.

习 题 二 A 组

1. 求证：若 $(a-b)^2=0$，则 $a=b$.

2. 求证：若 $a^2+b^2=0$，则 $a=b=0$。

3. 求证：若 $|a|+|b|=0$，则 $a=b=0$。

4. 求证：若 $a_1a_2\cdots a_n=0$，则至少存在一个 $a_i=0$（$i=1$，2，…，n）。

5. 求证：（1）若 a^n 是奇数，则 a 也是奇数；

（2）若 a^n 是偶数，则 a 也是偶数。

6. （1）若 a^2 是3的倍数，求证：a 也是3的倍数；

（2）求证：$\sqrt{3}$ 为非有理数。

7. 已知$\triangle ABC$中，$a^2+b^2=c^2$，则$\angle C=90°$。

8. 求证：$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}$为非整数。

9. 已知$\triangle ABC$中，$\angle B<\angle C$，求证：$AC<AB$。

习 题 二 B 组

1. （1）$n+1$个球放进n个抽屉，那么一定存在一个抽屉，里面至少有两个球。

（2）17封信投入3个信箱中，那么一定有一个信箱，里面至少有6封信。

2. 若 a_1，a_2，…，a_n 是自然数1，2，…，n 的一个排列，n 是奇数，则

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数。

3. 求证：质数的个数无限。

4. 求证：$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$为非整数。

习题二A组解答

1. 假如 $a\neq b$，则 $a-b\neq 0$，于是$(a-b)^2>0$与已知$(a-b)^2=0$矛盾。

故 $a=b$。