新编高考复习资料

数学

SHUXUE

湖南省教育科学研究所主编

湖南人民出版社

新编高考复习资料

数学

SHUXUE

湖南省教育科学研究所　主编

湖南人民出版社

新编高考复习资料

数　学

湖南省教育科学研究所主编

·

湖南人民出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　　湖南省新华印刷一厂印刷

·

1981年2月第1版第1次印刷

字数：324,000　印张：15.75　印数：1—336,700

统一书号：7109·1281　　定价：1.12元

目　　录

代　　数

平　面　几　何

三　　角

立　体　几　何

解　析　几　何

代　　数

第一章　数

数是数学的基本概念之一，在中学数学的范围内，所学各种数的范围可归纳为如下数系表：

$$\underset{(a+bi)}{\text{复数}}\begin{cases}\underset{(b=0)}{\text{实　数}}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{自然数（正整数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数（正，负）}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数（正，负）——无限不循环小数}\end{cases}\\ \underset{(b\neq 0)}{\text{虚　数}}\end{cases}$$

第一节　实　　数

一、实数

有理数和无理数统称为实数．实数可以用有限小数或无限小数表示．任意两个实数可以比较大小；在实数范围内，可以进

行加、减、乘、除、乘方运算，在方根存在时，可以进行开方运算。

1．正整数（即自然数） 就是1，2，3，…，n，…。其中大于1的，且正因数只有1和它本身的正整数，称为质数（或称素数）．如2，3，5，7，…。其余大于1的数，则称合数。如4，6，8，9，…。

1既不是质数，也不是合数。

2．整数 正整数、零、负整数统称为整数．其中能被2整除的数称为偶数，其余的数称为奇数。

3．有理数 整数和分数（包括正分数和负分数）统称为有理数。

任何一个有理数都可表示为$\frac{q}{p}$的形式（$q\in J$，$p\in N$）都可化为有限小数或无限循环小数。

4．无理数 无限不循环小数叫做无理数．在实际运用时，经常需要用四舍五入法取精确到某位小数的近似数。

二、整数的整除性

证题中经常用到有关整数的整除的性质，下面介绍几个常用的结论。

1．若一个整数的个位数字为0，2，4，6或8，则这个整数能被2整除；若一个整数的个位数字为0或5，则这个整数能被5整除。

2．若一个整数的各个数位上的数字的和能被3整除，则这个整数能被3整除；若其各数位上数字的和能被9整除，则这

个整数也能被 9 整除。

3．两个连续的整数中，必有一个能被 2 整除；三个连续的整数中，必有一个能被 3 整除；四个连续的整数中，必有一个能被 4 整除。一般地m个连续的整数中，必有一个能被m整除。两个相邻偶数的积，能被 8 整除。

4．若干个整数都能被某一个数整除，则其和、差、积也能被这个数整除。

5．若一个整数能被若干个互质的整数整除，则它也能被这些互质的整数的乘积整除。

三、几个有关的概念

1．数轴　规定了方向、原点和单位长度的直线称为数轴。任何一个有理数都对应着数轴上的一个点。但是，数轴上任意一点却不一定都表示有理数．而实数与数轴上的点成一一对应。

2．相反数　在数轴上，在原点两旁且与原点距离相等的两个点所表示的两个数，叫做互为相反数，或称互反数。

3．倒数　如果两个数的积为 1，这两个数叫做互为倒数。

4．绝对值　在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离，叫做这个数的绝对值。

正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数。

$$|a|=\begin{cases}a\,(a>0),\\0\,(a=0),\\-a\,(a<0).\end{cases}$$

5．算术根　正数的正的方根称为算术根。

$$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0),\end{cases}$$

例 1 已知$n\in N$，求证n^5-5n^3+4n能被120整除。

证明 因为 $n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)$

$$=n(n^2-1)(n^2-4)$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

所以 n^5-5n^3+4n 为五个连续的整数 $n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$ 的乘积．于是它能被 5 整除，也能被 3 整除．

又这五个连续整数中的四个连续整数必有两个是相邻的偶数，而相邻的偶数的乘积能被 8 整除，故这五个连续整数又能被 8 整除。

所以 n^5-5n^3+4n 能被 $3\times5\times8$ 即 120 整除。

例 2 x 为何值时代数式$\frac{x+3}{x^2-4}$与$\frac{x^3-8}{x^2-9}$的值互为倒数。

解 依题意 $\frac{x+3}{x^2-4}\times\frac{x^3-8}{x^2-9}=1$，

化简，得 $\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-3)}=1$，

即 $x^2+2x+4=x^2-x-6$，

$\therefore$ $3x=-10$，

$x=-3\frac{1}{3}$。

故 当$x=-3\frac{1}{3}$时，两代数式的值互为倒数。

例3 解方程 $|x-4|=5$。

解 (1) 当 $x-4>0$时，$|x-4|=x-4$，原方程转化为 $x-4=5$，$\therefore\ x=9$。

(2) 当 $x-4<0$时，$|x-4|=-(x-4)$，原方程转化为 $-(x-4)=5$，$\therefore\ x=-1$。

(3) 当$x-4=0$时，$|x-4|=0$，与原方程矛盾，无解。

故 原方程的解为 9 和 -1。

注 根据算术根的定义$\sqrt{a^2}=|a|$，两边平方后得 $a^2=|a|^2$，所以本例也可根据$|a|^2=a^2$解除绝对值符号而求解；另外，也可根据绝对值的几何意义而求本例的解。

例4 化简 $|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$.$(a<-5)$

解 $\because\ a<-5$，$\therefore\ a+5<0$，$6-a>0$，$2a+1<0$。

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=6-a-[-(2a+1)]+[-(a+5)]\\
&=6-a+2a+1-a-5\\
&=2.
\end{aligned}
$$

例5 若x、y为实数，且$(x-y)^2+(2y+1)^2=0$，试求x、y的值。

解 $\because\ (x-y)^2\geqslant 0$，$(2y+1)^2\geqslant 0$，而两个非负数的和为零，则它们都为零。

$$\therefore\ \begin{cases}x-y=0,\\2y+1=0.\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2},\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

注 这里提供了数学论证中经常运用的一种性质，即几个

非负数的和为零，则每个都是零。若本题变为求方程 $x^2-2xy+5y^2+4y+1=0$ 的实数解，读者也要善于变形成本题的形式而求解。

例 6 证明$\sqrt{2}$是无理数。

证明 反设$\sqrt{2}$是有理数。

(1) $\because\ 1<\sqrt{2}<2$, $\therefore\ \sqrt{2}\notin J$.

(2) 假设$\sqrt{2}$等于某既约分数$\frac{q}{p}$（p，q 为互质的两个自然数），

则有 $\frac{q^2}{p^2}=2$， 即 $q^2=2p^2$.

故 q^2能被 2 整除，从而 q 也能被 2 整除。

又设 $q=2q_1(q_1\in N)$，

则有 $4q_1^2=2p^2$， 即$2q_1^2=p^2$，

于是p^2也能被 2 整除，从而 p 也能被 2 整除。

由此可得，p、q都能被 2 整除，则$\frac{q}{p}$就不是一个既约分数，这与$\frac{q}{p}$是既约分数的假设相矛盾，故$\sqrt{2}$不是分数。

综上所述，$\sqrt{2}$不是有理数，而是无理数。

习 题 1—1

1. 指出下列各数，哪些是正整数、整数、正数、负数、有理数、无理数？

7, 3.1416, π, -8, 0, $\frac{5}{8}$, $-\sqrt{16}$,

4.3232, $-\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2. 在数3427 $\boxed{}$ 里的 $\boxed{}$ 位置上应填上哪些数字，就能使这数成为（1）2 的倍数；（2）3 的倍数；（3）4 的倍数；（4）5 的倍数；（5）8 的倍数；（6）9 的倍数；（7）10的倍数；（8）25的倍数。

3. 有学生3496人，分成人数相等的小组参加劳动．每组人数限定在10人以上，20人以下，求每组人数及可分组数。　（184组，19人/组）

4. 求用32、36、48去除时，都余15的最小数。　(303)

5. 下面的结论是否正确：

（1）两个数中，绝对值较大的数就是较大的数。

（2）任何一个有理数的平方都是正数。

6. 回答下列问题：

（1）有没有一个实数的平方是负数？

（2）有没有一个数的平方反而比这个数小？什么时候？

（3）什么时候 a 的相反数比 a 大？什么时候 a 的相反数比 a 小？什么时候 a 的相反数与 a 相等？

（4）什么时候 a 的倒数比 a 大？什么时候 a 的倒数比 a 小？什么时候 a 的倒数与 a 相等？

7. 求出绝对值不小于 2 又不大于 4 的所有整数的积。　(-576)

8. 解方程

$$|x-4|+|x+1|=5.\qquad (-1\leqslant x\leqslant 4)$$

9. 化简下列各式

(1) $\sqrt{(lg3)^2-2lg3+1}$;　$(1-lg3)$

(2) $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$.　$\left(\text{原式}=\begin{cases}1-2x\,(x<-1)\\3\,(-1\leqslant x\leqslant 2)\\2x-1\,(x>2)\end{cases}\right)$

10. （1）试证明每个奇数的平方，被8除必定余1；

(2) 试证明三个连续整数的积能被6整除。

第二节　复　数

一、复　数

1．几个基本概念

(1) 复数的定义　形如$a+bi$的数叫做复数，其中a、b为实数，a叫做复数的实部，b叫做复数的虚部，i叫做虚数单位，$i^2=-1$。

当$b=0$时，$a+bi$是实数；当$b\neq0$时，$a+bi$是虚数；当$a=0$，$b\neq0$时，$a+bi$是纯虚数。

(2) 复数相等的定义　在复数$a+bi$与$c+di$中，当且仅当实数$a=c$，$b=d$时，规定这两个复数相等．即$a+bi=c+di$。

(3) 共轭复数的定义　两个复数的实部相等，虚部是相反的数时，我们把这两个复数称为共轭复数，即$a+bi$和$a-bi$是共轭复数。

(4) 复数绝对值的定义　$\sqrt{a^2+b^2}$称为复数$a+bi$的绝对值（或者模）。记作$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$。

2．几个基本性质

(1) 无顺序性　任意两个复数之间，没有大小的规定，因而不能比较大小。

(2) 复数能和复平面上的点建立一一对应关系。

(3) 在复数范围内，永远可以施行加、减、乘、除（除数不能为零）、乘方、开方六种运算。

（4）在复数范围内，加法和乘法的交换律，结合律，以及乘法对加法的分配律都能成立。

（5）虚数单位i的乘方具有周期性：

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.\quad (n\in J)$$

二、复数的表示法

1．用复平面上的点Z表示复数$a+bi$　在直角坐标系内，以横轴ox表示实轴，纵轴oy表示虚轴，建立复平面，在复平面内的点$Z(a,b)$与复数$a+bi$一一对应。可以用点$Z(a,b)$表示复数$a+bi$（见图1.1）。

2．用平面向量$\vec{oz}$表示复数$a+bi$　在复平面内，以原点O为起点，$Z(a,b)$为终点的向量$\vec{oz}$与复数$a+bi$可作成一一对应，所以可以用平面向量$\vec{oz}$表示复数$a+bi$（见图1.2）。

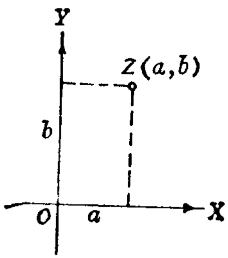

图1.1

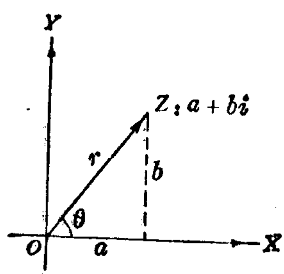

图1.2

3．复数的三角形式和指数形式　x轴的正方向ox和向量$\vec{oz}$所夹的角θ，叫做复数$Z=a+bi$的幅角，记作$Arg\ z$，不等于零

的复数$a+bi$有无数个幅角，它们相差 2π的整数倍．其中比2π小的正角叫做幅角的主值，记作$\arg z$，$a+bi$的幅角θ用公式

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$；$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$来确定（见图1.2）．利用复数的模、幅角可把复数$a+bi$表示成：

$$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta),\quad \text{其中 } r=\sqrt{a^2+b^2}\ \theta,=\arg z.$$

$a+bi$叫做复数的代数形式，$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数的三角形式．它的共轭复数可写成：

$$r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)] \quad \text{或} \quad r(\cos\theta-i\sin\theta).$$

但后者不是三角形式．

为简便起见，我们用$e^{i\theta}$表示$\cos\theta+i\sin\theta$．

即 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，于是就有 $z=re^{i\theta}$．如$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$，$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$等等．$z=re^{i\theta}$称为复数的指数形式．

三、复数的运算

1．加法和减法 用复数的代数形式来进行加、减运算较为方便．

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

2．乘法

代数形式 $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

三角形式 $r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

一般地

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

3．除法

代数形式　c、d不同时为零，

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

三角形式

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

4．乘方

代数形式　$(a+bi)^n=a^n+c_n^1a^{n-1}bi+c_n^2a^{n-2}(bi)^2+\cdots$
$$+c_n^ka^{n-k}(bi)^k+\cdots+(bi)^n.\quad(n\in N)$$

三角形式

$$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

这个公式叫做棣莫佛定理。复数乘方时用此公式较方便。

5．开方

代数形式

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}i\right),$$

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}i\right).$$

三角形式

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

其中$\sqrt[n]{r}$表示模数r的n次算术根。$k=0$，1，2，…，$(n-1)$，$n\in N$。复数的n次方根有n个值，它们所对应的复数分布在复平面内以O为圆心以$\sqrt[n]{r}$为半径的圆上，并将圆周n等分。

例1 计算：

(1) $\frac{1}{i}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^5+\left(\frac{1}{1+i}\right)^4+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7$；

(2) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{11}$；

(3) $\sqrt[3]{1-i}$。

解 (1) 原式$=\frac{i}{i\cdot i}\left(\sqrt{2}\right)^5\left(1+i\right)^5$

$$+\frac{1}{(1+i)^4}+\left(\frac{2i}{2}\right)^7$$

$$=-4\sqrt{2}\left(1+i\right)i\left(1+i\right)^4$$

$$+\frac{1}{(1+i)^4}+i^7$$

$$=16\sqrt{2}\left(1+i\right)i-\frac{1}{4}-i$$

$$=-\left(16\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(16\sqrt{2}-1\right)i.$$

注 掌握并牢记下列结果，在进行复数运算时较为方便。

$\frac{1}{i}=-i$； $(1\pm i)^2=\pm 2i$； $\frac{1}{1\pm i}=\frac{1}{2}\left(1\mp i\right)$；