# 平面几何解题思路

## ——通用的方法

北京四中　赵惠民

海 洋 出 版 社

# 平面几何解题思路

## ——通用的方法

北京四中　赵惠民

海洋出版社

1986年·北京

## 内 容 简 介

这本书是由全国闻名的重点中学北京四中的老教师赵惠民编著的。他治学严谨，经验丰富，此书则是他辛勤劳动和教学经验的结晶。在这册书中，作者主要介绍了培养学生掌握平面几何解题思路的通用方法，是一本讲训练的书。学习这本书之后，不仅能使学生学会想平面几何问题的方法，而且由于作者将有关内容进行了科学的归类，训练配套成龙，所以能使学生全面而有重点地掌握必备的平面几何知识。此书的确是初中学生、教师和其他有关读者的良师益友。

责任编辑：齐庆芝
责任校对：刘兴昌

**平面几何解题思路**
——通用的方法
北京四中　赵惠民

海 洋 出 版 社 出 版　(北京市复兴门外大街1号)
新华书店北京发行所发行　八九九二〇部队印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32　印张：8　字数：170千字
1986年5月第一版　1986年5月第一次印刷
印数：1-15000

统一书号：7193·0750　定价：1.20元

# 告 读 者

这本书介绍的是平面几何解题思路的通用方法，是一本讲训练的书。

思路训练，分三个阶段：初学阶段的训练；继续学习新课阶段的训练；总复习阶段的训练。

这样写的目的，是想给下面两部分读者作参考。

一是写给初学平面几何的读者，比如初中二年级的学生。本书先安排了3项训练，以解决学几何入门难的问题；随着课本进度，又安排了6个方面的训练，希望配合课堂学习，对学生能有所启发，有所遵循，以便逐渐形成思路，学会想问题的方法。这部分写得比较具体，比较详细。

二是写给学过平面几何、正在进行总复习的读者，比如初中三年级即将毕业的学生。为此，我提出了9项训练要求，将有关知识归类，使训练配套，便于读者掌握。希望读者通过总复习，有较大幅度的提高。

虽然我是这样想的，但限于水平，可能力不从心。愿青年读者提出意见，更希望我的同行和前辈予以指导和帮助。

赵惠民

1985年1月

# 目　录


**第一章　初学阶段的训练**……（1）

一、学概念，用概念指导推理，用概念指导运算，用概念指导画图……（2）

二、按照题意画图，按照已知条件看图……（11）

三、从"已知"向后推（理），并且善于从"求证"提希望……（20）

四、练习……（30）

**第二章　继续学习新课阶段的训练**……（34）

一、三角形的内角和与外角……（35）

1．三角形的内角和……（35）

2．三角形外角……（39）

3．练习……（42）

二、全等三角形……（43）

1．判定两个三角形全等的公理和定理……（43）

2．准确地运用全等三角形判定公理和定理……（51）

3．挑选全等三角形与制造全等三角形……（57）

4．练习……（79）

三、同一个三角形的边角关系……（86）

1．边角关系的四个定理与不等问题的四个定理……（86）

2．练习……（95）

四、四边形……（100）

1．四边形的十项训练……（100）

2．练习……（110）

五、比例线段……………………………………………………(112)
1. 比例线段的判定和求证 ……………………………(112)
2. 练习 ……………………………………………………(122)
六、关于弧和圆的切线 ……………………………………(125)
1. 弧和圆的训练要求 …………………………………(125)
2. 练习 ……………………………………………………(131)
**第三章 总复习阶段的训练** ………………………………(134)
一、对所学知识要心中有数…………………………………(136)
二、训练归类 配套成龙 ……………………………………(141)
1. 有关180°角的训练 …………………………………(142)
2. 有关三角形与四边形外角的训练 …………………(146)
3. 有关平行线的训练 …………………………………(152)
4. 有关圆定理的综合训练 ……………………………(160)
5. 有关相似三角形的训练 ……………………………(168)
6. 用公式说话的训练 …………………………………(182)
7. 解三角形的训练 ……………………………………(192)
8. 关于直角的训练 ……………………………………(210)
9. 有关面积问题的训练 ………………………………(218)
三、训练的落实 ……………………………………………(236)
1. 训练落实的方法 ……………………………………(236)
2. 练习 ……………………………………………………(237)

# 第一章　初学阶段的训练

初学平面几何，一般地说会遇到三个问题。

第一，和以前学的功课不一样。一个学生在小学学了6年算术，从整数、小数到分数、百分数，一律是运算。弄清运算种类（加、减、乘、除），排好运算顺序（先乘除后加减），按照运算法则，结合运算性质，进行运算就行了。学习内容主要是恒等变形。上初中学代数，仍是数和式的运算，增加了乘方、开方，另外学了同解变形，可以解方程。而学几何与此不同，要推理论证，一下子很难适应。

第二，为什么要证明。有的学生在小学学过几何初步知识，他们认为许多问题早已清楚，何必再多此一举？比如三角形三内角和等于180°，为什么还要证明呢？而且哪个定理在前，哪个定理在后，用哪个去证明哪个？还要讲个顺序；两条线段明明是相等的，两条直线明明是平行的，不许说，非要证明不可，很不理解。因此他们对平面几何就没有学习积极性了。

第三，新概念太多。初学这一门课需要明确的名称、术语太多。据统计，1984年用的几何课本第一章有38个名称、术语，第二章有24个名称、术语。这两章大约要学习两个月，需要记的东西这么多，而且枯燥无味。但若不记，回答问题难免词不达意，作业、练习也说不清楚。所以掌握许许多多的概念是学几何的第一关。

那么，学习几何从哪里入手呢？使学生形成解题思路，

又从哪里培养呢？

## 一、学概念，用概念指导推理，用概念指导运算，用概念指导画图

如前所述，开始学几何首先会遇到很多名称、术语，而这些名称、术语又都是几何概念。概念这么多，一时记不住怎么办呢？可以把概念分主次，排先后，一批一批地记。有的知道就行了，以后还有机会学习，例如体、面、线、点等；有的会用就行了，例如线段的延长、截取、角的内部和外部等。但一些重要的概念，如角、互余、互补、垂线、距离、证明、确定、平角、对顶角、同位角、内错角等就必须熟练掌握。对这些必须熟练掌握的概念，必须由浅入深，从具体到抽象地理解，一字不差地认真记牢，然后，将它们反复应用到其具体问题中去，即在证明题中用概念指导推理，在计算题中用概念指导运算，在作图题中用概念指导作图。只有这样，才能真正理解概念，学了概念才有用处。

为了说清上面的想法，下面举一些例题。

**例1** 如图 1—1，在一条直线上取 $A$、$O$、$B$ 三点，问图中共有几条射线，而且射线$AB$和射线$BA$是否同一条射线？

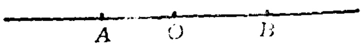


图 1—1

**分析：** 如果你看见有一条射线$OA$，又看见一条射线$OB$，好象还有一条射线$AB$，那么射线$AO$算不算呢？这样既不明确，又不条理，可能重复，也可能说不全。所以，我们还得从概念说起。

课本上说："在直线上某一点一旁的部分叫做射线。"并且规定了表示方法。这就是概念。怎样用这个概念指导推理呢？既然射线是以直线上一点为标准来划分的，那么在图1—1中，以$A$为标准就可以分成两条射线：在$A$点右侧已有$O$、$B$两点，这条射线叫做$AO$或$AB$都是可以的；在$A$点左侧可以任意取一点$C$或$D$，这条射线叫做$AC$或$AD$。同样，以$O$为标准，又是一旁有一条射线，可得到两条射线；以$B$为标准，也可得到两条射线。因为直线上有三个点，所以$2\times3=6$，应该有6条射线。同样的道理，若直线$AB$上有6个点，那一定能得到$2\times6=12$条射线。当然，射线$AB$与射线$BA$不是一条射线。这是因为，按照规定的表示方法，射线$AB$的端点是$A$，$B$只是射线$AB$上的一点；而射线$BA$的端点是$B$，点$A$是射线$BA$上的一点。

**例2** 如图1—2，$O$是直线$AB$上的一点，问共有几个角，$\angle 1$和$\angle 2$是什么关系？

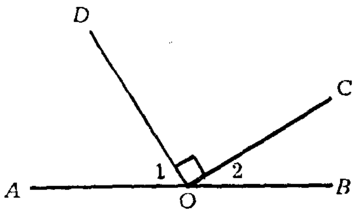

图 1—2

**分析：** 根据"有公共端点的两条射线所组成的图形叫角"的概念，以$O$为公共端点，两条射线算一组，可以组成几组呢？首先，$OA$、$OD$组成$\angle AOD$，$OD$、$OC$组成$\angle DOC$，$OC$、$OB$组成$\angle COB$。然后，$OA$、$OC$组成$\angle AOC$，$OD$、$OB$组成$\angle DOB$。最后，还有$OA$、$OB$组成平角$\angle AOB$。总共6个角。为什么能组成这6个角呢？这是由角的概念决定的。如果不从角的概念出发，仅凭观察，只答$\angle 1$、$\angle 2$，还有中间的直角$\angle DOC$，答得就不全了。

根据平角概念，$\angle AOB$的始边$OB$与终边$OA$成一直线，于是$\angle AOB=180°$，减去$\angle DOC$，即减去$90°$，所以$\angle 1+\angle 2=90°$，亦即$\angle 1$与$\angle 2$互为余角。

**例3** 求证对顶角的平分线互为反方向延长线。

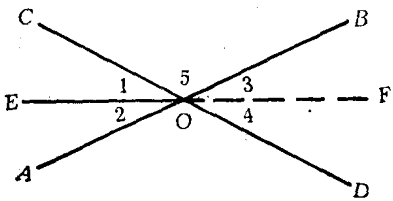

图 1—3

**分析**：在图1—3中有意将$OE$画成实线，将$OF$画成虚线。提请读者注意：在这里还不能说$E$、$O$、$F$三点在一条直线上，还不能把$EOF$看成是直线。这样的题该怎么想呢？

从“求证”的具体要求看，既然$OE$、$OF$互为反方向延长线，那么延长$EO$就应该是$OF$，延长$FO$就应该是$OE$。也就是说，从$E$经$O$到$F$应为一条直线。明确了这一点以后，才可以谈这个题目的具体要求：要证$\angle EOF=180°$，就要运用平角概念。

再从“已知”看，这里所说的对顶角是指$\angle AOC$与$\angle BOD$。根据对顶角的定义，可知$OB$是$OA$的反向延长线，$OD$是$OC$的反向延长线，亦即确知$AOB$、$COD$都是直线。于是有$\angle 5+\angle 3+\angle 4=180°$。根据“已知”，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$；根据“对顶角相等”，$\angle AOC=\angle BOD$；因为“等量的同分量相等”，所以$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$。既然$\angle 1=\angle 4$，那就可将上面的$\angle 5+\angle 3+\angle 4=180°$换成$\angle 5+\angle 3+\angle 1=180°$，亦即$\angle EOF=180°$。

在这个证明过程中，一是根据平角概念提出180°的要求，

二是根据平角概念得出$\angle 5+\angle 3+\angle 4=180°$，三是根据对顶角的概念得出$AOB$、$COD$都是直线的结论，四是由于对顶角概念清楚而没有把$\angle 1=\angle 4$的根据错写成“对顶角相等”(因为在证出$EOF$是直线以前，不能说$\angle 1$与$\angle 4$是对顶角)，五是经等量代换判断出$EOF$共线，共计五次用概念指导推理。

**例4** 在图1—4中哪两个角是内错角，哪两个角是同旁内角？

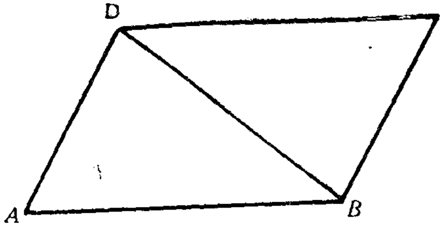


图 1—4

**分析**：同位角、内错角、同旁内角的概念是画出三线八角之后，用描述的方法表达的。所以要谈内错角，还得回到三线八角的图形中来，看清楚哪是两条直线，哪是“第三条直线”，哪是内错角。

如图1—5，直线$AB$、$DC$，被直线$DB$所截，这时$\angle 1$和$\angle 2$是内错角。如图1—6，直线$AD$、$BC$被直线$DB$所截，这时$\angle 3$和$\angle 4$是内错角。

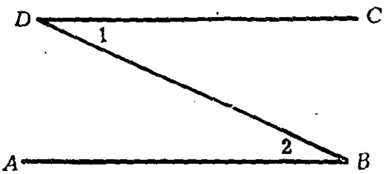


图 1—5

同旁内角也是这样，要看是哪两条直线被哪条直线所截产生的同旁内角。在图1—4中$AD$、$BC$被$AB$所截，则$\angle A$与$\angle ABC$是同旁内角；若$AD$、$BC$被$DC$所截，则$\angle ADC$与$\angle C$是同旁内角；若$DA$、$BA$被$DB$所截，则

$\angle ADB$ 与 $\angle ABD$ 是同旁内角。其他直线的关系也是如此，如 $AB$、$DC$ 被 $AD$ 所截，$AB$、$DC$ 被 $BC$ 所截，$DC$、$BC$ 被 $DB$ 所截等。

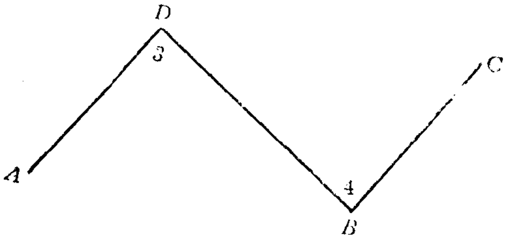


图 1—6

同位角有的相等，有的不相等；内错角也是有的相等，有的不相等；同旁内角有的互补，有的不互补。这三种角的名称只是根据角的位置为研究图形方便而规定的，与角的大小无关。

如果进一步将题目改变一下，如图1—4，将已知条件改为 $AB /\!/ DC$，那么可以推出 $\angle CDB = \angle ABD$（即图1—5，若 $AB /\!/ DC$ 则 $\angle 1 = \angle 2$）。这是根据“两条平行线（$AB$、$CD$）被第三条直线 $DB$ 所截，内错角相等”的平行线性质定理确定的。

如果再进一步将题目改为“已知：图 1—4中 $AB /\!/ CD$，并且 $\angle ADC = \angle ABC$”，那么在推出 $\angle CDB = \angle ABD$ 之后，根据等式性质，可以继续推理：$\angle ADC - \angle CDB = \angle ABC - \angle ABD$，即 $\angle ADB = \angle CBD$。前面已经从位置上说 $\angle ADB$ 与 $\angle DBC$ 是内错角，现在又从大小上说 $\angle ADB = \angle DBC$，这就满足了“内错角相等”这个条件。于是又可以推出 $AD /\!/ BC$ 这个结论。这个结论是根据“两条直线 $AD$、$BC$ 被第三条直线 $DB$ 所截，如果内错角相等那么这两条直

线平行”这条平行线的判定定理得出的。

通过这个例题，可以清楚地看到在研究几何图形时是怎样从概念出发展开推理过程的。万事开头难，抓住概念，并从运用概念开始，根据定理推导，就不至于无从下手了。

**例5** 求邻补角的平分线所夹的角是多少度？

**分析：** 看到这个题目，第一步就应该十分顺利地说出邻补角的概念，即“将一个角的一边反向延长，这条反向延长线与这个角的另一边构成一个角，这时说它和原来的角互为邻补角”。第二步，按照题意画出图形如图1—7的$\angle AOC$与$\angle COB$。到这里，“邻补角”就算研究过了。第三步，根据角平分线的概念，想出并画出射线$OD$、$OE$，条件是$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，所求的角是$\angle EOD$. 根据平角概念有$\angle COB+\angle AOC=180°$。而$\angle 1=\frac{1}{2}\angle COB$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle AOC$，于是$\angle EOD=\angle 1+\angle 4=\frac{1}{2}\angle COB+\frac{1}{2}\angle AOC$

$=\frac{1}{2}(\angle COB+\angle AOC)=\frac{1}{2}\times 180°=90°$

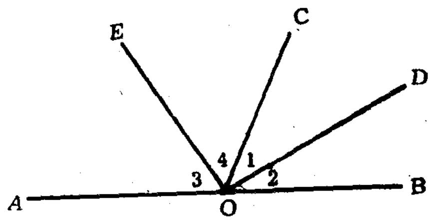

图 1—7

**例6** 从$A$点引四条射线$AB$、$AC$、$AD$、$AE$，若$\angle BAC:\angle CAD:\angle DAE:\angle EAB=3:4:5:6$，求$\angle BAD$的度数。

**分析：** 从已知条件知道这四个角的比，但每个角是多少

度还不知道。画出图来以后，应立即想到“周角”概念，于是这四个角的和就知道了。若设一份为$x$度，则这四个角顺序为$3x$度、$4x$度、$5x$度、$6x$度，列出方程：

$3x+4x+5x+6x=360$，求得$x=20$，则$\angle BAD=140°$。

几何计算与代数不同之处就在于几何计算要结合图形性质。上述例5中提到“邻补角”，于是有$\angle COB+\angle AOC=180°$。在例6中并没给“周角”这个条件，但是画出图形符合周角概念，于是有$\angle BAC+\angle CAD+\angle DAE+\angle EAB=360°$可用。

**例7** 已知：图1—8中$AB$、$CD$都是直线，它们相交于O点，作$OE\perp CD$，$\angle AOC=12°$，求$\angle BOD$、$\angle AOE$、$\angle COB$的度数。

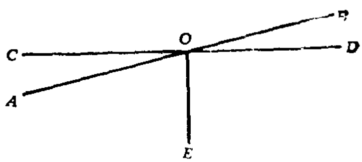

图 1—8

**分析**：这里就需要用$AB$、$CD$直线判断“对顶角”，“用垂线”概念得两角互余关系，用“平角”概念得两角互补关系，算出$\angle BOD=21°$，$\angle AOE=69°$，$\angle COB=159°$。

**例8** 一个角的补角比它的余角的二倍还多36°，求这个角的度数。

**分析**：根据互余、互补的概念，知道两角之和为90°叫互为余角，两角之和为180°叫互为补角。设这个角为$x$度，则它的余角为$(90-x)$度，它的补角为$(180-x)$度，这就是用概念指导计算。列出方程，$180-x=2(90-x)+36$，求得$x=36$。代入原方程及原题检验，解题过程无误，符合题意，题目就解出来了。

**例9** 如图 1—9，$E$ 是$AB$上一点，$F$是$CD$ 上一点，过$E$作$CD$的垂线，过$F$作$AB$的垂线。

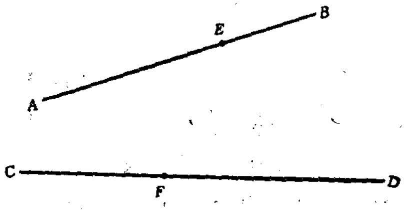


图 1—9

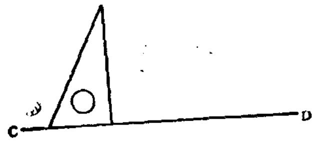


图 1—10

**分析**：作 $EM\perp CD$，交 $CD$ 于 $M$。这一般不会出错，“一靠二找三画线”，第一步将三角板的一条直角边“靠”在$CD$直线上(如图1—10)，第二步沿 $CD$ 直线向$E$点靠近，直到三角板的另一条直角边“找”到$E$点为止，也就是这条直角边经过$E$ 点时(如图1—11)，立即沿这条直角边画一直线，交$CD$于$M$，$EM$即所求。

过$F$作$AB$的垂线，由于$AB$不是水平位置，$F$点又不在$AB$的上方，看到图 1—12，初学者难免踌躇，不知往哪儿画。这时，不妨将作业本转动一下，使 $AB$ 成水平位置，而$F$点转到$AB$的上方，就与上面的题目完全一样了。

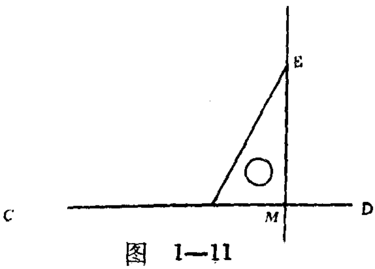


图 1—11

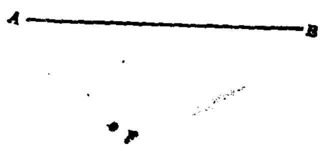


图 1—12

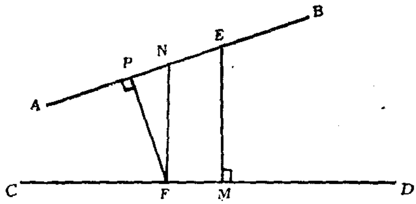

图 1—13

这个题目的另一个困难，就是图形中的直线不止有$AB$，而且有$CD$。$F$还不是孤立的一个点，$F$在$CD$直线上。如图1—13，学生往往错画成"垂线"$FN$。

问题在于$FN$是$CD$的垂线而不是$AB$的垂线。产生错误的原因在于垂线概念不清楚。解决的办法是从明确概念入手，用概念指导画图。

什么叫垂线？课本上讲的是："两条直线相交成四个角，其中有一个角是直角，这两条直线就叫互相垂直，其中一条直线叫另一条直线的垂线，交点叫垂足"。

你可曾认真想过"两条直线"这四个字？具体到这个题目，$AB$是一条直线，那么另一条呢？正是要你画的直线。这条直线画出来以后，与$AB$相交成$90°$角，用这个标准去衡量图1—13的$\angle ANF$并不是$90°$角，所以说图画错了。

原因是什么呢？这当然属于"概念不清"，但是第一问没出问题，而第二问出了问题，这还与图中的直线不止一条有关。这种情况在以后较复杂的图形中几乎题题如此，怎样才能保证不出类似错误呢？首先结合题意看准图形。为了排除干扰，初学者可采用描图的方法，即用不同颜色的笔（例如红铅笔）将$AB$描一下，再将$F$点描一下，使重点突出，只看红色的图，其余的当作看不见。既然不看$CD$，当然更不考虑$FN$与$CD$所成的角$\angle NFD$，这就不会误将$FN$当作所求的垂线了。

**例10** 已知钝角△$ABC$，画出它的三条高。

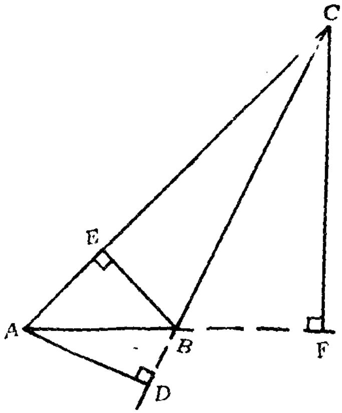


图 1—14

**分析：** 用概念指导画图。先说清什么叫三角形的高，三角形的高是“从三角形一个顶点到它的对边所在直线所作的垂线段”。在图1—14中，可以将$AB$线段向右方延长，用红笔将$C$点和$AB$直线描出来，按照例9所说的方法画垂线$CF$，换个颜色，再将$A$点和直线$BC$描出来，画垂线$AD$，最后再画$BE$。

开始画垂线不要嫌麻烦，从不熟到熟有一个过程，更不要因小看了它而导致错误。这样学并不慢。

## 二、按照题意画图，按照已知条件看图

几何既然是研究图形性质的学科，那么几乎做每一道题都要涉及图形问题。原题没有图，就要按照题意画出图形；题目若有图，必须按照给定的“已知条件”去看图。

下面还是通过具体例题来说明画图和看图的要求。

**例1** 画线段$AB=3\text{cm}$，延长$AB$到$C$，使$AC=2AB$，