风险理论

The Theory of Risk

■ 熊福生 著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

风险理论

The Theory of Risk

■ 熊福生 著

本书的出版得到新华人寿保险股份有限公司的资助

武汉大学出版社

全国优秀出版社

图书在版编目(CIP)数据

风险理论/熊福生著.—武汉：武汉大学出版社，2005.6
ISBN 7-307-04592-3

Ⅰ.风…　Ⅱ.熊…　Ⅲ.风险论　Ⅳ.O211.67

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 044186 号

责任编辑：柴　艺　　责任校对：程小宜　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：湖北省通山县九宫印务有限公司
开本：787×980　1/16　　印张：13.5　　字数：225 千字
版次：2005 年 6 月第 1 版　　2005 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-04592-3/O·326　　定价：18.00 元

前　言

风险理论是对保险业所面临的各种风险进行数理分析的理论。它是保险公司进行保险产品的合理定价、责任准备金的正确计提、再保险的适当安排、偿付能力的有效管理和保险公司破产的准确预警等工作的理论基础。

风险理论是保险精算学的重要组成部分,它既涉及寿险精算,也涉及非寿险精算,它是保险精算人员对保险业务进行风险管理的重要理论工具,也是保险公司发展业务,进行有效稳健营运的理论保证。此外,风险理论的思想方法、数学模型等不仅在保险业有直接应用,而且在金融业、投资业和风险管理业等方面都有广泛应用。

风险理论的任务是针对保险实务建立起一系列风险模型,并以随机数学(包括概率论、数理统计和随机过程等)作为工具,对其进行数理分析,取得一些重要结论,解决保险实际问题。风险理论的显著特征是:能够把数学理论知识和分析方法成功地应用到保险的实践中去,能够解决一系列的保险实际问题。

风险理论引入我国虽然只有十几年历史,但在国外它已有近百年的发展历程。尽管该理论比以往更丰富了,内容更深刻了,应用更广泛了,但是它的发展还远远没有达到完善的地步,还存在着许多有待解决的问题。正因为如此,该理论成为一个令人非常感兴趣的、有广泛研究前景的领域,并且不断涌现出一些新研究成果,充实和发展该理论。在本书中也将体现出作者在某些方面的研究成果。

本人从事了多年的精算学(包括风险理论)教学和研究工作,还曾经负责过一段时间的"北美精算师"(SOA)的考试工作,获得了一些经验和体会,积累了一些知识和研究成果,在大量参阅国内外相关文献和广泛吸收、提炼已有成果的基础上,结合自己的体会和研究成果,用了近五年时间的酝酿和准备撰写成这部著作的。

本书的主要内容有:损失分布理论及损失分布的修正理论、封闭式风险模型与开放式风险模型、盈余模型和风险模型的应用以及效用理论等。

本书主要在以下几个方面具有创新性：

(1)给出了负对数伽玛分布、幂分布、广义超几何分布等一批新的理论损失分布，并对损失分布采用了新的分类方法。

(2)补充和充实了损失分布的修正理论，总结、归纳和推导出一些新的先验分布与后验分布的结果、条件分布与边缘分布的结果，以及 Esscher 变换的结果。

(3)充实和丰富了封闭式集合风险模型的理论，总结、归纳和推导出一些随机和的再生性结果和随机积的再生性结果。

(4)充实和丰富了开放式集合风险模型的理论，总结、归纳和推导出一些典型复合分布的结果。

(5)推导出复合二项分布和复合负二项分布同复合泊松分布一样也具有可分解性的性质。这些结果是对复合泊松分布理论的重大推广。

(6)证明了用指数效用原理给保险产品定价，完全满足所有的保费计算原理应该具有的性质，并得到指数效用原理定价是最佳的保费计算方法和停止损失(再)保险是最优的保险方式两个重要结论。

本书具有体系完整、结构严谨、层次清晰、内容丰富和理论联系实际的特征，同时还具有深入浅出的分析和通俗流畅的表述等特点。这些特征与特点既能增强数理背景的读者对风险理论的保险学理解，又能增进保险、金融、投资、风险管理背景的读者对风险理论的精算学理解。

本书可用作高等院校保险精算、金融、投资及风险管理等专业高年级本科生和研究生相关课程的教材和教学参考书，也可供保险、银行、证券、风险管理等从业人员或对此有兴趣的读者阅读与学习参考。

由于作者水平所限，书中定有不足或不当之处，也难免存在缺点和错误，敬请读者和同行们批评指正。

此书的出版得到了新华人寿保险股份有限公司的资助，在此作者表示衷心的感谢。同时还要感谢中南财经政法大学新华金融保险学院及保险系对撰写此书给予的支持，感谢武汉大学出版社及责任编辑对出版本书给予的支持。

作者谨识

2005 年 4 月 8 日

目　录

第一章 风险理论基础

本章首先阐述风险及风险理论的相关概念，然后介绍风险理论中要用到的有关数学基础知识，为讨论风险理论作准备。

第一节　风险与风险理论概述

一、风险的含义

“风险”这一词语在人们的日常生活中经常使用，我们对它并不陌生。但是，究竟何为风险，它的确切含义是什么，却说法不一。在相关的学科中，对于风险主要有如下几种说法：

(1)风险是一种损失机会或损失的可能性。

这意味着有损失机会存在就有风险存在。它表明风险是一种面临损失的可能性状况，是在这个状况下损失发生的概率。当这个概率是 0 或 1 时，就没有风险；当这个概率介于 0 与 1 之间，则存在风险。

(2)风险是一种损失的不确定性。

这种不确定性又可分为客观的不确定性和主观的不确定性。客观的不确定性是实际结果与预期结果的相对差异，它可以用统计学中的方差或标准差来衡量。主观的不确定性是人为的对客观风险的评估，它同个人的知识、经验、精神和心理状态有关，不同的人面临相同的客观风险时，可能会有不同的主观的不确定性。

(3)风险是一种可能发生的损害。

这种损害的幅度与发生损害的可能性的大小共同衡量了风险的大小。当损害的幅度大，发生损害的可能性也大时，风险就大，反之风险就小。

(4)风险是一种不能预期的结果。

这种未知结果可能是有利的好结果，也可能是不利的坏结果。

此外，保险业内人士常把风险这个术语用来指所承保的损失原因，如火灾是大多数财产所面临的风险，或者指作为保险标的的人或财产，如把年轻的驾驶人员看做汽车保险中的高风险，等等。

对于风险之所以有各种不同的说法，是因为人们所面临的具体问题不尽相同，每个人对风险这个概念的理解和描述也各不相同，同一个词汇可能被用来表达不同的意思。例如，一个社会心理学家可能用"追求风险刺激"来解释某种少年违法行为，这时他对风险的理解与证券分析人员在讨论股票投资时用到的风险概念是有很大差异的。从风险的属性来说，有人主张风险应该是客观存在的，因而应该被客观地度量，也有人强调风险是一个因人而异的主观概念。此外，还可以对风险附加各种特殊含义以适应其在不同领域中的应用，如社会风险、政治风险和自然风险，等等。因此，要对风险给出一个明确的、能够在不同领域里通用的定义几乎是不可能的。引用一位著名学者的话说，"人们对怎么定义风险的争议比对怎么度量风险的争议还要大得多"。

在保险学中，风险被分为两大类，一类是纯粹风险，另一类是投机风险。纯粹风险是一种只有损失机会的风险，而投机风险则是一种既有损失机会也有盈利机会的风险。在投资分析中，由于损失与盈利总是相互关联的，所以在投资领域主要涉及的是投机风险。在保险领域所涉及的均是只有损失可能性的纯粹风险，因此在保险学中，风险通常被认为是"潜在的损失及其发生损失的概率"。

虽然对"风险"一词的解释众说纷纭，尚无统一定义，但通过观察发现，人们只要提到"风险"这个词就自然与可能会发生损失或灾害等不利事件联系起来。人们对风险的这种理解，基本上与保险学中纯粹风险的意思相近。

由于本书所讨论的风险主要是保险领域的风险，即纯粹风险，所以我们把风险定义为：可能发生的损失及其发生损失的概率。我们用损失的程度和发生损失的概率来共同度量风险的大小。损失程度大而且发生的概率也大，则属高风险，反之则属低风险。

风险的这个定义虽然包含了潜在损失和发生损失的概率两个方面，但在保险实务中，往往可能仅强调这两个方面中的某一方面。当对潜在后果或对其影响程度不清楚时，可能强调前者，就好比说要做某件事很"冒险"，但又不知会有什么样的后果发生；而当对潜在损失有更明确的认识时，则强调的是后者，如乘坐飞机时，风险就是指飞机失事的概率，这时就把风险概念与概率概念等同起

来了。

二、风险理论的含义

根据风险的上述定义,风险是体现在潜在损失和发生各种不同程度损失的概率分布之上的,或者说风险是由潜在的损失分布体现出来的。弄清楚了某个风险的损失分布状况,才有可能正确度量该风险的大小。保险公司承保了某个保险标的,也就承保了这个标的所具有的风险,因而弄清楚保险标的的损失分布,对于保险人来说是非常重要的,它是保险产品定价和提取责任准备金以及再保险的分保安排的重要依据。不仅如此,由于保险公司承保了众多的保险标的,仅仅知道每一个保险标的的损失分布还不够,还必须弄清众多保险标的组合之后的总损失分布,因为它是保险公司进行偿付能力管理、资产负债管理和预防公司破产倒闭的重要理论依据。

一般来说,保险公司的总损失分布或者说总理赔分布(损失分布与理赔分布在概念上还是有差别的,这将在下一章详细讨论)是建立在总索赔次数分布和单次索赔额分布的基础之上的。保险实务表明,对于每一个保险标的,在它的保险责任期内的某一个单位时间里,是否会发生保险责任事故,即是否会发生损失以及损失程度多大,这些都是事先不能确定的(这正说明了,每一个保险标的就是一个风险个体)。因此,在一般情况下,总索赔次数是一个随机变量(取非负整数值的),单次索赔额也是(另)一个随机变量。那么,总索赔次数的概率分布如何?单次索赔额的概率分布又如何?怎样通过总索赔次数的分布和单次索赔额的分布得到总索赔额的概率分布?即怎样从每一个保单的个体风险求得保险公司所面临的总体风险?为此,我们把解决上述问题及其相关问题的一整套理论和方法称为风险理论。

根据风险理论的上述含义,风险理论的主要内容有:损失分布理论及损失分布的修正理论;总体风险模型(也称为集合风险模型)理论,其中包括封闭式风险模型和开放式风险模型;破产理论和效用理论及其应用等。

三、风险理论与保险精算

保险产品的定价、责任准备金的计提、再保险的安排、偿付能力管理、保险公司财务分析及破产预警等都是保险精算师们的主要工作,而由前所述,保险标的的损失分布理论、保险公司的总体风险模型理论、破产理论和效用理论等是进行

保险产品的合理定价、责任准备金的正确计提、再保险的适当安排、偿付能力的有效管理和保险公司破产的准确预警等工作的理论基础。因此,风险理论是保险精算学的重要组成部分,它既涉及寿险精算,也涉及非寿险精算,它是保险精算人员对保险业务进行风险管理的重要理论工具,也是保险公司发展业务、进行有效稳健营运的理论保证。

风险理论自提出到现在已有近百年的历史。早在 1909 年,Bohlman 就提出了"古典风险理论",这个理论主要讨论了寿险数学和个人保单中由随机波动引起的偏差等。该理论的内容不够丰富,仅有的理论也不够完善,还有一个重要缺陷就是没有涉及非寿险精算,因而,它对保险业务的实际应用不够广泛,没有受到人们的重视。

Filip Lundberg 在 1909～1919 年对风险理论进行了更深入的研究,提出了现在得到普遍应用的"集合风险理论",该理论首次应用概率论的方法来研究保险业务计划。在这个方面,该理论对于寿险和非寿险都有其应用。实践证明,这种描述问题的新途径是成功的。近几年,"集合风险理论"的基本假设和应用范围都极大地扩展了。一般随机过程理论和它的许多分支及其应用的前景也已经反映在风险理论的发展中了。

现在,风险理论已成为一个令人非常感兴趣的、有广泛研究前景的领域,并且已经涌现出一些新的研究成果,充实和发展了该理论。在本书的后续章节中,也将会体现作者在某些方面的研究成果。

风险理论的发展还远远没有达到完善的地步。尽管该理论的知识比以往更丰富了,内容更深刻了,应用更广泛了,但仍然存在着许多难题:例如对于品种繁多的财产保险,如何用准确恰当的损失分布描述保险标的的风险;对于众多不同质的保险标的,如何正确拟合出它的总损失分布;对于指数分布以外的损失分布,如何精确计算出它的亏空概率等问题都还没有得到很好解决。此外,在许多方面(如公司的偿付能力问题、分保需求问题、保费的附加安全系数问题等)不是风险理论能够单独提供解决方法的。这是因为实际工作常常需要考虑很多方面,而风险理论是不可能面面俱到的。因此,综上所述,目前的风险理论在某些实际问题的应用上还存在一定的局限性。尽管如此,风险理论的思想方法、数学模型等除了在保险业有直接应用外,在金融、投资和风险管理等方面也都有广泛应用。

第二节 随机变量

在第一节已经指出，每一个保险标的所具有的潜在损失是一个随机变量，保险公司在每一个单位时间内所面临的总索赔次数是一个随机变量，而每一个单次索赔额也是一个随机变量，因而总索赔额是一个随机变量，因此讨论随机变量的概率分布和有关数字特征(标志值)是讨论风险理论的基础。

一、随机变量的概率分布

我们通常用大写字母 X,Y,Z 等表示某个随机变量或随机过程。如果 X 是一个随机过程，则它在时刻 t 的状态又可用 $X(t)$ 或 X_t 表示。

随机变量 X 的概率分布函数(或简称为分布函数)用 $F_X(x)$ 或 $F(x)$表示，它等于 X 落在小于或等于 x 的范围内的概率，即：

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad -\infty<x<+\infty \tag{1.1}$$

一般来说，$F(x)$与 $F_X(x)$都可表示随机变量 X 的分布函数，但是，如果讨论的问题牵涉到多个随机变量时，为了与其他随机变量的分布函数加以区别，那么 X 的分布函数则需用 $F_X(x)$表示。

随机变量的类型常见的有两种：离散型和连续型。离散型随机变量 X 只取有限个或可数多个值$\{x_j\}(j=1,2,\cdots)$。X 取 x_j 的概率记为 p_j 或 $p(x_j)$，即：

$$p(x_j)=P\{X=x_j\} \tag{1.2}$$

并称 $p(x_j)$为 X 的概率分布律或分布列。连续型随机变量 X 可取任何实数值，通常它的取值充满某个或几个区间。它的分布函数是连续的，且 $F(x)$的导数 $F'(x)$通常也是存在的(可能在个别点处不存在)。我们把这个导函数称为 X 的(概率)密度函数，并用 $f(x)$或 $f_X(x)$来表示，即：

$$f(x)=F'(x) \tag{1.3}$$

在风险理论中，除了有常见的离散型和连续型随机变量以外，还有一种称之为混合型的随机变量。它是由离散型分布与连续型分布混合而成的。它的概率分布状况是：在某些区间上呈连续分布，又在某些孤立点处呈离散分布，即在某些个别点的地方有大于零的概率集中值。关于混合型分布的实例将在后面的章节中出现。

无论是离散型、连续型,还是混合型随机变量,它们都有一个共同之处,那就是都存在着分布函数,不同之处则在于离散型有概率分布列,连续型有概率分布密度函数,而混合型则在某些地方有概率密度,又在个别点处有大于零的概率集中值。

二、随机变量的数字特征

设 $H(x)$是定义在实数域上的实值函数。当自变量 x 是随机变量 X 时,$H(X)$也是随机变量(一般情况下是与 X 不同的随机变量)。如果下列勒贝格-斯蒂吉斯积分存在,并用 $E[H(X)]$表示,即:

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\mathrm{d}F(x) \tag{1.4}$$

其中 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数,则(1.4)式为随机变量 $H(X)$ 的数学期望。

当 $F(x)$ 为可导函数时,上述的勒贝格 - 斯蒂吉斯积分就是普通(黎曼)积分了。

当 X 是离散型随机变量时,则:

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\mathrm{d}F(x) = \sum_j H(x_j)p(x_j) \tag{1.5}$$

当 X 是连续型随机变量时,则:

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

当 $H(x) = x^k$(k 为非负整数)时,则称 $E[H(X)] = E(X^k)$ 为随机变量 X 的 k 阶原点矩,用 μ_k 表示,即:

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\mathrm{d}F(x) \tag{1.7}$$

当 X 为离散型随机变量时,则:

$$\mu_k = E(X^k) = \sum_j x_j^k\cdot p(x_j) \tag{1.8}$$

当 X 为连续型随机变量时,则:

$$\mu_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k\cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

当 $H(x) = [x - E(X)]^k$ (k 为非负整数)时,则称 $E[H(X)] =$

$E[X-E(X)]^k$为随机变量X的k阶中心矩,用ν_k表示,即:

$$\nu_k = E[X-E(X)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^k \mathrm{d}F(x) \tag{1.10}$$

当X为离散型随机变量时,则:

$$\nu_k = E[X-E(X)]^k = \sum_j [x_j - E(X)]^k \cdot p(x_j) \tag{1.11}$$

当X为连续型随机变量时,则:

$$\nu_k = E[X-E(X)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(x)]^k \cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{1.12}$$

在概率论的教科书中,通常把随机变量的各阶原点矩和中心矩又称为随机变量的数字特征。其中最重要的两个数字特征是:一阶原点矩和二阶中心矩,并把一阶原点矩称为随机变量X的数学期望或简称期望(有时又称为均值),把二阶中心矩称为随机变量X的方差,并可用$\mathrm{Var}(X)$表示,即:

期望: $$E(X) = \mu_1 \tag{1.13}$$

方差: $$\mathrm{Var}(X) = E[X-E(X)]^2 = \nu_2 \tag{1.14}$$

通过简单地推算,方差另有一种表达式:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \tag{1.15}$$

等于随机变量平方的数学期望减去随机变量数学期望的平方。

由(1.14)式和(1.15)式可以得到二阶中心矩与一阶、二阶原点矩之间的关系式:

$$\mu_2 = \nu_2 + \mu_1^2 \tag{1.16}$$

根据方差的定义,任何随机变量的方差总是一个非负的实数,因此,可以考虑方差开方,并把方差的平方根称为随机变量的标准差或根方差,即:

标准差: $$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{E[X-E(X)]^2} \tag{1.17}$$

在讨论随机变量的分布时,有时需要对随机变量标准化,也就是让随机变量X减去自己的期望$E(X)$,再除以它的标准差$\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$,得到新的随机变量Y为随机变量X标准化后的结果,即:

$$Y = \frac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} \tag{1.18}$$

这时,无论X的期望与方差等于何值(方差不等于零),Y的期望总是0,方差总

是 1。

此外,还有两个较重要的数字特征在风险理论中也会用到,那就是随机变量的三阶中心矩和四阶中心矩,并分别称其为随机变量的偏度与峰度,即:

偏度: $$E[X - E(X)]^3 = \nu_3 \tag{1.19}$$

峰度: $$E[X - E(X)]^4 = \nu_4 \tag{1.20}$$

三、分布函数的卷积

设函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别为某两个随机变量的分布函数,它们的卷积定义为:

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - y) \mathrm{d}G(y) \tag{1.21}$$

并且卷积的结果也是一个分布函数,是另外某个随机变量的分布函数。容易验证,如果 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量,它们对应的分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(x)$,则它们的和$(X + Y)$ 的分布函数为它们的卷积 $F * G(x)$。由此可以推断,卷积具有交换律,即:

$$F * G(x) = G * F(x) \tag{1.22}$$

如果 $G(x)$ 是连续型分布函数,且 $G'(x) = g(x)$,则:

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x - y) \cdot g(y) \mathrm{d}y \tag{1.23}$$

是 x 的连续函数。所以,如果两个独立的随机变量中至少有一个是连续型的,则它们的和具有连续的分布函数。但要注意的是:分布函数是连续的,所对应的随机变量未必一定是连续型随机变量,而连续型随机变量的分布函数则一定是连续的。

同样可以验证,对于多个相互独立的随机变量 $X_i(i = 1,2,\cdots,n)$,它们的和$(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ 的分布函数 $G(x)$ 也等于各个分布函数依次卷积的结果,即:

$$G(x) = F_1 * F_2 * \cdots * F_n(x) \tag{1.24}$$

其中 $F_i(x)$ 为 X_i 的分布函数,并且卷积也满足交换律。

关于分布函数卷积的实例,将在第四章、第五章中出现。