

大學用書

微 積 分 學

李 洪 江 編 著

世 界 書 局 印 行

大學用書

微積分學

李洪江編著

世界書局印行

序 言

關於微積分學之教科書，用英、德、法等國文字編著者，爲數頗多，但學習此科目者，每因外國語文關係，查考字典，推敲文句，曠時費日，而仍不得其要領，且與教者之進度亦無法一致，作者有鑑及此，不揣謬陋，謹將此中文本獻給研習此科之讀者，以節推敲之勞，而收事半功倍之效。

本書旨在對微積分之基本原理與運算以及實際之運用，作一完整而有系統之介紹，對於學理之闡述，圖形之繪製，章節之順序，以及例題，習題之選取等等，均經適當之編排，其目的在於能引起讀者之興趣，進而對該科有深切之了解和純熟之運用。

研習微積分時。讀者可由已熟悉之科目，諸如代數，三角及幾何學中引伸得之，此外，吾人並引用極限法爲其新概念，讀者應深思熟練，而教師亦應首先着重指導學生對極限之基本定義與定理能有充分之了解由此而明瞭微積分在結構上之邏輯協調，俾使讀者對此新概念能作有效而合理之運用，讀者更須明白導數之定義實爲極限之一例，而微分法之運算技巧全賴於極限之和，積，商等定理之運用，定積分之概念，亦爲有別於導數之另一極限觀念，藉一連串普遍性之定理之維繫，吾人方得利用微分法之逆運算以求其值。

本書所用數學名詞，均以最通用者爲準，爲使讀者便於參攷他書起見，書末附有中英名詞對照及索引。

微積分所涉獵之範圍頗廣，對於某些定理一則因爲篇幅有限，再則超越本書程度，自難予以一一證明，編者非才，謬誤之處，在所難免，尚祈通人學者，不吝指教，俾能隨時改善，不勝企禱！

民國五十一年七月 編著人 謹 識

目次

第一章 函數與極限

1. 緒論.....	1
2. 數軸.....	1
3. 不等式，絕對值.....	2
習題 1.....	2
4. 變數與常數.....	3
5. 函數.....	4
6. 函數(續).....	5
習題 2.....	6
7. 極限之概念.....	7
8. 函數之極限.....	9
習題 3.....	11
9. 連續.....	13
習題 4.....	14
10. 無窮小.....	15
11. 極限定理之證明.....	16

第二章 導數之基本運算及其應用

12. 導數.....	17
習題 5.....	20
13. 常數之導數.....	21
14. x^n 之導數.....	21
15. 常數因式.....	22
16. 函數和之導數.....	23
習題 6.....	25

2 微 積 分 學

17. 導數之幾何意義	25
習題 7	27
18. 連續性與可微分性	28
19. 遞增函數與遞減函數	29
習題 8	32
20. 導數之物理意義	33
習題 9	35
21. 已知導數求原函數	35
習題10	37
22. 直線運動	38
習題11	40

第 三 章 微分法之一般公式：代數函數

23. 二函數之積之微分法	42
24. 二函數之商之微分法	44
習題12	45
25. 合成函數之導數	46
習題13	50
26. 降函數之微分法	51
習題14	52
27. 逆函數之微分法	53
習題15	55
28. 高階導數	56
習題16	58
29. 公式總集	59

第 四 章 導 數 之 應 用

30. 極大值與極小值	60
-------------	----

31. 二階導數之意義,反曲點,.....	62
32. 例外情形.....	64
習題17.....	65
33. 漸近線.....	67
34. 代數函數之作圖法.....	68
習題18.....	72
35. 包含極大值與極小值之問題.....	72
習題19.....	77
36. 相對速率.....	79
習題20.....	82
第 五 章 三角函數及反三角函數之微分法及其應用	
37. 角之度量法.....	84
38. 三角函數.....	84
39. 一個重要極限.....	86
40. 正弦函數之微分法.....	87
習題21.....	89
41. 其他三角函數之微分法.....	90
習題22.....	92
42. 反(逆)三角函數.....	94
43. 反三角函數之微分法.....	97
習題23.....	99
44. 三角函數之作圖法.....	100
習題24.....	102
45. 極大與極小,相對速率.....	103
習題25.....	105
46. 簡諧運動.....	107
習題26.....	109

第 六 章 指數與對數函數之微分法及其應用

47.	指數與對數函數.....	111
48.	數值 e	112
	習題27.....	115
49.	對數函數之微分法.....	115
	習題28.....	117
50.	指數函數之微分法.....	118
51.	取對數的微分法.....	119
	習題29.....	121
52.	雙曲線函數.....	123
	習題30.....	126
53.	反(逆)雙曲線函數.....	127
	習題31.....	129
54.	應用.....	129
	習題32.....	133

第 七 章 微 分

55.	函數之微分.....	135
56.	微分之幾何意義.....	138
	習題33.....	139
57.	用微分求近似值.....	140
58.	誤差.....	141
	習題34.....	143
59.	參數表示法.....	144
	習題35.....	147

第 八 章 均值定理及不定型

60.	洛耳氏定理.....	149
-----	------------	-----

61. 均值定理.....	149
習題36.....	152
62. 不定型 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$	153
63. 不定型 $0 \cdot \infty$ 及 $\infty - \infty$	155
64. 不定型 $0^\circ, \infty^\circ$ 及 1^∞	156
習題37.....	157
65. 方程式之數值解.....	158
習題38.....	161

第 九 章 積 分，標準公式

66. 積分.....	163
67. 標準積分公式.....	165
習題39.....	167
68. 代換積分法.....	168
習題40.....	170
69. 曲線下之面積.....	172
習題41.....	174

第 十 章 定 積 分

70. 定積分之概念.....	175
習題42.....	179
71. 定積分之性質.....	179
72. 定積分之變數極限.....	182
73. 定積分之計算法.....	184
習題43.....	185
74. 定積分之代換法.....	187
習題44.....	189
75. 廣義積分.....	191

習題45	195
------	-----

第十一章 極 坐 標

76. 極坐標	197
習題46	199
77. 切線與向徑間之夾角	200
78. 二曲線之交角	203
習題47	206

第十二章 曲率與曲線運動

79. 弧長	208
80. 弧長之微分	208
習題48	212
81. 曲率與曲率半徑	213
習題49	217
82. 曲率中心，漸屈線	220
習題50	223
83. 向量	224
84. 曲線運動中之速度	225
習題51	229
85. 曲線運動中之加速度	231
習題52	235

第十三章 各 種 積 分 法

86. 部分積分法	238
習題53	241
87. 簡化式	242
習題54	245
88. 三角函數之積分法	246

習題55	250
89. 配平方法	252
習題56	253
90. 代數代換法	254
習題57	256
91. 三角代換法	258
習題58	260
92. 有理函數之積分法	261
習題59	266
93. $\sin x$ 與 $\cos x$ 的有理函數之積分	267
習題60	268
94. 微分方程式	269
習題61	273
95. 餘論	275
第十四章 定積分之幾何應用	
96. 平面面積(直角坐標)	276
習題62	280
97. 平面面積(極坐標)	281
習題63	283
98. 平面面積(參數表示法)	284
習題64	285
99. 旋轉體之體積(圓片法)	286
習題65	288
100. 旋轉體之體積(殼層法)	289
習題66	291
101. 用切片法求體積	292
習題67	293

102. 弧長.....	294
習題68.....	299
103. 旋轉曲面之面積.....	300
習題69.....	304
104. 近似積分法.....	305
習題70.....	309
105. 杜漢莫氏原理.....	310

第十五章 定積分之物理應用

106. 重心.....	313
107. 平面面積之形心.....	315
習題71.....	317
108. 旋轉實體之形心.....	318
習題72.....	320
109. 弧之形心與旋轉曲面之形心.....	321
習題73.....	323
110. 流體壓力.....	324
習題74.....	326
111. 功.....	327
習題75.....	330
112. 轉動慣量.....	331
習題76.....	335
113. 萬有引力.....	337
習題77.....	339

第十六章 無 窮 級 數

114. 單調數列及柯雪之收斂原理.....	341
115. 無窮級數.....	342

習題78	343
116. 幾何級數	345
117. 比較檢驗法	346
習題79	349
118. 積分檢驗法	350
119. 比檢法	352
習題80	354
120. 交項級數	356
121. 絕對收斂與條件收斂	359
習題81	360
第十七章 冪級數及其應用	
122. 冪級數	363
習題82	365
123. 對數級數	366
124. 反正切級數	369
習題83	371
125. 帶積分剩餘之泰勒公式	371
126. 帶導數剩餘之泰勒公式	375
習題84	376
127. 二項級數	378
128. 冪級數之運算法	381
習題85	383
129. 冪級數之其他應用	384
習題86	386
第十八章 立體解析幾何學	
130. 直角空間坐標	389

131. 兩點間之距離，球面	390
習題87	391
132. 方向餘弦與方向分量	392
133. 二直線之交角	394
習題88	397
134. 平面及其方程式	398
135. 平面至一點之距離	400
136. 二平面之交角	402
習題89	
137. 直線及其方程式	403
習題90	407
138. 曲面方程式之討論	408
139. 柱面	410
習題91	413
140. 旋轉曲面	413
習題92	415
141. 二次曲面	415
習題93	418
142. 柱面坐標與球面坐標	419
習題94	420
第十九章 偏 微 分 法	
143. 多變數之函數	421
144. 偏導數	422
習題95	425
145. 全微分	426
習題96	429
146. 合成函數	430

習題97	434
147. 隱函數	436
習題98	439
148. 方向導數	441
習題99	445
149. 極大與極小	447
習題 100	450

第二十章 空間曲線及曲面，包線

150. 空間曲線之切線及法平面	452
習題 101	455
151. 曲面之法線及切平面	456
習題 102	460
152. 空間曲線之弧長	460
習題 103	461
153. 密切平面	462
習題 104	465
154. 包線	466
習題 105	469

第廿一章 多 重 積 分

155. 用疊積分求體積	471
習題 106	476
156. 用疊積分求體積（柱面坐標）	478
習題 107	481
157. 二重積分	482
158. 薄片之質量及重心	484
習題 108	486

12 微 積 分 學

159. 轉動慣量.....	487
習題 109.....	488
160. 曲面之面積.....	489
習題 110.....	493
161. 三重積分.....	494
162. 三重積分在物理學上之應用.....	494
163. 直角坐標中之疊積分.....	496
習題 111.....	501
164. 柱面坐標.....	503
習題 112.....	505
165. 球面坐標.....	507
習題 113.....	510
附錄 I 積分表.....	513
附錄 II 中英名詞對照及索引.....	520

第一章

函數與極限

1. 緒論

何謂微積分？一開始便討論此問題，目難有滿意之答覆，須俟讀至相當章節，方能有所領略，茲就其歷史內容及應用，作一簡略的介紹。

“Calculus”一詞原出於拉丁文，古時用以表示計算用之石子，近代則將此詞表示數學之一支，古代希臘人研究連續運動之性質，耗費相當之心血，爲了了解運動之性質，曾有許多觀念性之供獻；另一爲古希臘人所感興趣者，爲曲線圖形之度量，如圓之面積，球之體積等，唯彼等在數學上之發展，未曾以代數爲基礎，故其進度緩慢而結果也少，直至十七世紀法人笛卡爾（1596—1650），首創解析幾何學，在方法與思想上，才躍進了一大步，其後英人牛頓（1642—1727），德人萊勃尼茲（1646—1716）輩出，於是乃有微積分之形成，由此，運動以及其他各種連續變化問題之研究，才有突飛猛進之發展。

微積分包含二個基本概念：其一爲導數，可用運動質點之速度解釋之；其二爲積分，可用部份由曲線圍成之幾何圖形之面積說明之。

至於其主要用途在物理與幾何方面，它能使吾人對許多物理現象作有效之研究，例如速度、加速度、功、引力等等。在另一方面它能使吾人計算或度量若干重要事物，例如面積、體積、質量、重心、轉動慣量等；此外電磁學之定律，以及原子物理之有所發展，均賴於微積分之幫助而能有百尺竿頭更進一步。除此之外，化學、生物學及其他自然科學，亦每多應用及之，在經濟學之探討中，微積分之重要性亦與日俱增。

2. 數軸

於一直線上，任取一點 O 名爲原點，次在 O 點之右側取一點 U 點，使 $\overline{OU}$ 爲一單位之長（參看圖1）於是線上任意一點 P 至 O 之距離 $\overline{OP}$ 之長，若 P 在 O 之右側時，記爲 $\overline{OP} = r \cdot \overline{OU}$ ；若 P 在 O 之左側時，即

2 微 積 分 學

記爲 $\overline{OP} = -r\overline{OU}$; 惟當 P 與 O 相合時, 規定 $r=0$, 此 r 稱爲 P 點之坐標, 例如 $r=2$, 表示 P 在 O 之右側, 距離 O 點爲二單位長度處; $r=-3\frac{1}{2}$, 表示 P 在 O 之左側, 距離 O 點爲三個半單位長度處。

經如此規定, 則直線上任一點 P 必有代表其坐標之唯一實數 r 與之對應; 反之, 對於任一實數 r , 在直線上必有以之爲坐標之唯一點 P 與之對應, 是以直線上之點與實數之全體組成一對一的對應。

本書所論之數, 均在實數範圍之內, 虛數不在討論之列, 以後不再聲明。

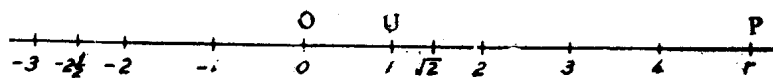


圖 1

3. 不等式, 絕對值

爲方便計, 若一點之坐標爲 a 者, 稱之爲點 a , 若點 a 在點 b 之左側, 吾人記之爲 $a < b$, 讀作 a 小於 b 。此 $a < b$ 之關係, 稱爲不等式, 關係 $b > a$, 讀作 b 大於 a , 即表示 b 點在 a 點之右側, 亦即 a 點在 b 點之左側, 故 $a < b$ 與 $b > a$ 表同一意義, 其簡單性質有:

若 $b > a, a > c$ 則 $b > c$; 若 $b > a$, 則 $b + c > a + c$; 若 $b > a$, 而 $c > 0$ 則 $bc > ac$; 然當 $c < 0$ 時, 則 $bc < ac$

設 a 爲一數, 符號 $|a|$ 稱爲 a 之絕對值, 其定義爲:

若 $a \geq 0$ 則 $|a| = a$

若 $a \leq 0$ 則 $|a| = -a$

設 a, b 爲二數值, 則有 $|a+b| \leq |a| + |b|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 之關係。

習 題 1

1. 試作相當於 $\sqrt{3}$ 之線段。
2. 設 $a < b$. 試證 $a + c < b + c$ 。
3. 設 $a < b$ 若 $c > 0$ 則 $ac < bc$; 若 $c < 0$, 則 $ac > bc$ 。