代数题解

（上册）

龚宝和　王令九　编

山西人民出版社

代数题解

（上册）

[illegible]宝和　王今九　编

山西人民出版社

代数题解（上册）

龚宝和　王令九

·

山西人民出版社出版　（太原并州路七号）

山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

·

开本：787×1092　1/32　印张：$9\frac{1}{8}$　字数：188千字

1979年2月第1版　1979年8月太原第1次印刷

印数：1—300,000册

·

书号：7088·803　定价：0.63元

目　　录

第一章　整数的性质及复数

1．试证明：若把某数所有的约数，按着从小到大的顺序排列起来（由1开始，最后的数就是这个数），则在这列约数中，与两端等远的两个约数的积是和这个数相等的一个常数．

解：数 N 永远有两个约数：1和 N．它们的积等于 N，并且1是最小的约数，而 N 是最大的约数．

设数 $a<\sqrt{N}$，并且 a 是 N 的约数，即 $\frac{N}{a}=K$ ……（1）．

因为 $a<\sqrt{N}$，有 $\frac{\sqrt{N}}{a}>1$，但 $aK=N$，$K=\frac{N}{a}=\frac{\sqrt{N}}{a}\sqrt{N}$，所以 $K>\sqrt{N}$，数 K 也是 N 的约数．当把数 N 所有的约数按着由小到大的顺序排列着的时候，N 的约数 a 及 K 距数1与数 N 是等远的，即距最小的约数与距最大的约数是等远的．

2．试证明：数 N 所有的约数的连乘积等于 $N^{\frac{1}{2}n}$，此处 n 是 N 的所有约数的个数．

解：设 N 有 n 个约数，包括1和 N 在内，并且设 a 是其中的一个．此时，对于 a 来说，就有一个约数 b，能使 N

$=ab$（b 是 N 除以 a 的商），所以 n 总是个偶数。因此，约数的乘积等于 $N^{\frac{n}{2}}$。

注：若 N 为完全平方数，则约数的个数是奇数，但结论仍是正确的。如 $N=49=7^2$ 时，49 的约数的乘积 $1\times7\times49=7\times7\times7=7^3=49^{\frac{3}{2}}$。

3．试证明：若某数是完全平方数，则这数所有的约数的个数是个奇数。

解：设数 $N=a^{2K}\cdot b^{2p}\cdot c^{2t}$，则 N 的一切约数的个数等于 $(2K+1)(2p+1)(2t+1)$，即是一个奇数。

4．试证明：若 $n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots$，此处 $a\ b\ c\cdots\cdots$ 是质数并且不等于 n，则数 n 所有的约数的个数等于 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots$。

解：写出数 n 的约数。若是 $n=a^{\alpha}$，则所有约数为：

$1,\ a,\ a^2,\ a^3\cdots\cdots a^{\alpha}$。　　（1）

仿此，若是 $n=b^{\beta}$，则所有约数为：

$1,\ b,\ b^2,\ b^3\cdots\cdots b^{\beta}$。　　（2）

等等。如果 $N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}$，则它的一切约数为：

$1,\ a,\ a^2,\ \cdots\cdots a^{\alpha};\ b,\ ab,\ a^2b,\ \cdots\cdots a^{\alpha}b;\ ab^2,\ a^2b^2,\ \cdots\cdots a^{\alpha}b^2,\ \cdots\cdots;\ b^{\beta},\ ab^{\beta},\ a^2b^{\beta},\ \cdots\cdots,\ a^{\alpha}b^{\beta}$。

显然，所有这些约数可以由（1）列中各数顺次乘以（2）列中各数而得到。但在（1）列中约数的个数是 $(\alpha+1)$ 个，在（2）列中是 $(\beta+1)$ 个。由此可知，对于（2）列中的一个约数来说，乘以（1）列中的各个约数后可以得到 $(\alpha+1)$ 个约数，对于（2）列中另一个约数来说，乘以（1）列中的各个约数后也可以得到 $(\alpha+1)$ 个约数，等等。一般说

来，约数的个数等于 $(\alpha+1)(\beta+1)$。若考虑到数 n 中还有因数 c^{γ} 等，则得它的约数的个数为 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ 等。

5. 试证明：若某数不是完全平方数,则这数所有的约数的个数是个偶数。

解：设数 $N=a^{2K}b^{2P}c^{(2t+1)}$，则 N 的一切约数的个数等于 $(2k+1)(2p+1)(2t+2)=(2k+1)(2p+1)2(t+1)$ 即是一个偶数。

6. 把前20个自然数的连乘积 20! 分解成质因数。

解：20以内的质因数为2,3,5,7,11,13,17,19。

1. $\left[\frac{20}{2}\right]+\left[\frac{20}{2^2}\right]+\left[\frac{20}{2^3}\right]+\left[\frac{20}{2^4}\right]=10+5+2+1$

$=18$。

2. $\left[\frac{20}{3}\right]+\left[\frac{20}{9}\right]=6+2=8$。

3. $\left[\frac{20}{5}\right]=4$。

4. $\left[\frac{20}{7}\right]=2$。

而11,13,17,19的指数显然均为1。故得：

$20!=2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11\times13\times17\times19$。

7. 前 30 个自然数的连乘积的尾数有多少个零？

解：乘积 $N=1\times2\times3\cdots\cdots30$能被 2^{26} 整除，因为

$$\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{2^2}\right]+\left[\frac{30}{2^3}\right]+\left[\frac{30}{2^4}\right]=15+7+3+1=26;$$

且也能被 5^7 整除，因为

$$\left[\frac{30}{5}\right]+\left[\frac{30}{5^2}\right]=6+1=7.$$

由此可知它可以被$2^{26}\cdot5^7=2^7\cdot5^7\cdot2^{19}=(10^7)(2^{19})$整除，当然可被$10^7$整除，即它的末尾有7个零。

8. 试将 100!分解为质因子的乘积($100!=1\times2\times3\times\cdots\times100$)．

解：已知下列定理：$n!$ 中含质因子 p 的方次是：

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

小于100的质数是2,3,5,7,11,…,79,83,89,97，我们可依以上定理求出100中各质因子的方次如下：（例如求2的方次）

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]$$
$$=50+25+12+6+3+1=97.$$

依同样方法可得其它各因子之方次，结果是：

$100!=2^{97}\cdot3^{48}\cdot5^{24}\cdot7^{16}\cdot11^9\cdot13^7\cdot17^5\cdot19^5\cdot23^4\cdot29^3\cdot$
$31^3\cdot37^2\cdot41^2\cdot47^2\cdot53\cdot59\cdot61\cdot67\cdot71\cdot73\cdot79\cdot83\cdot89\cdot97.$

9. 试证明：若 $N=a^\alpha\cdot b^\beta\cdot c^\gamma\cdots\cdots l^\lambda$($a,b,c\cdots\cdots l$ 是质数)，则数 N 的所有约数的和等于：

$$S(N)=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$$

$$\cdots\cdots\frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}$$

解：$N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdots\cdots l^{\lambda}$ 的所有的约数都可以写成 $a^{\alpha_1}\cdot b^{\beta_1}\cdot c^{\gamma_1}\cdots\cdots l^{\lambda_1}$ 的形式，此处 $0\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha, 0\leqslant\beta_1\leqslant\beta$，$0\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma$，……，$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda$。因为

$(1+a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^{\alpha})(1+b+b^2+b^3+\cdots\cdots+b^{\beta})(1+c+c^2+c^3+\cdots\cdots+c^{\gamma})\cdots\cdots(1+l+l^2+l^3+\cdots\cdots+l^{\lambda})$的展开式就是所有这种形式的数的和，并且没有两项是相同的，所以 N 所有约数的和等于：

$$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{\alpha})(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^{\beta})(1+c+c^2+\cdots\cdots+c^{\gamma})\cdots\cdots(1+l+l^2+\cdots\cdots+l^{\lambda})=\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\cdots\cdots\frac{l^{\lambda+1}-1}{l-1}.$$

例如：$720=2^4\cdot3^2\cdot5$ 的所有约数有形式 2^{α_1}，3^{β_1}，5^{γ_1}。让 $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ 互相独立地通过 $\alpha_1=0,1,2,3,4$；$\beta_1=0,1,2$；$\gamma_1=0,1$；便得出所有约数是 1,2,4,8,16；3,6,12,24，48；9,18,36,72,144；5,10,20,40,80；15,30,60;120,240；45,90,180,360,720，而

$$\begin{aligned}S(720)&=S(2^4\cdot3^2\cdot5)\\&=\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\\&=2418.\end{aligned}$$

10. 已知 $2n+1$ 个相邻整数的和等于$(n+1)^4-n^4$，求这些数。

解：设最小的数为 x，则最后的数为 $x+2n$；而和等于：

$$S=x+(x+1)+\cdots\cdots+(x+2n)$$

$$=\frac{(2x+2n)(2n+1)}{2}$$
$$=(x+n)(2n+1).$$

由此可得方程：

$$\begin{aligned}(x+n)(2n+1)&=(n+1)^4-n^4\\&=[(n+1)^2+n^2][(n+1)^2-n^2]\\&=(2n^2+2n+1)(2n+1).\end{aligned}$$

$x+n=2n^2+2n+1$，得　$x=2n^2+n+1$。

11．求 $N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdots\cdots l^{\lambda}$ 的所有约数中的质因数的指数和，此处 $a,b,c,\cdots\cdots,l$ 是质数。

解：设 P 是 $N=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdots\cdots l^{\lambda}$（其中 $a,b,c\cdots\cdots l$ 为 N 的质因数）的所有的约数的乘积．而 N 的所有约数中的质因数的指数和等于 P 的质因数的指数和．因为 $P=N^{\frac{n}{2}}$，其中 n 是 N 的所有约数的个数，所以 $P=a^{\frac{\alpha n}{2}}\cdot b^{\frac{\beta n}{2}}\cdot c^{\frac{\gamma n}{2}}\cdots\cdots l^{\frac{\lambda n}{2}}$。$N$ 所有的约数中的质因数的指数和等于 $(\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda)\frac{n}{2}$，而因为 $n=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots(\lambda+1)$，于是可得正确的答案为：

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots+\lambda)(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\cdots\cdots(\lambda+1).$$

12．当 n 为何数时，等式 $2^n=3K+1$ 是正确的（K 为自然数）？

解：由于 2^n 为偶数，$\therefore$ $3K+1$ 应该是偶数，从而 K 为奇数．于是可组成下列的表：

K	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$3K+1$	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64
n	2	—	4	—	—	—	—	—	—	—	6

即n是偶数：$n=2p$

注：$2^n=(3-1)^n=3^n-n\cdot 3^{n-1}+\cdots+(-1)^n$

$$=3K+(-1)^n,$$

所以当n是偶数时$2^n=3K+1$是正确的。

13．什么数等于不包括它自己的所有约数的连乘积？

解：设数m有x个约数，则所有这些约数的乘积等于$m^{\frac{x}{2}}$。此时约数中包括m本身在内。根据问题的条件有：

$m=\dfrac{m^{\frac{x}{2}}}{m}$，$m=m^{\frac{x}{2}-1}$，根据底相同，幂相等，指数应相等，

得$1=\dfrac{x}{2}-1$而$x=4$。由此可知这数有4个约数，它们的形式为a^3或a、b，此a、b为质数。

如 $2^3=8=2\times 4$，$3^3=27=3\times 9$，$6=2\times 3$。

14．某数只含有因数2和3，并且它的立方的所有约数的个数7倍于原数所有约数的个数；求这个数。

解：设$N=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$和$N^3=2^{3\alpha}\cdot 3^{3\beta}$。它们的约数的个数分别等于$(\alpha+1)(\beta+1)$和$(3\alpha+1)(3\beta+1)$。根据问题的条件，$(3\alpha+1)(3\beta+1)=7(\alpha+1)(\beta+1)$，即

$9\alpha\beta+3\alpha+3\beta+1=7\alpha\beta+7\alpha+7\beta+7$，$\alpha\beta=2\alpha+2\beta+3$或$\alpha\beta=2(\alpha+\beta+1)+1\cdots\cdots$（1）这表示$\alpha\beta$是奇数。因此

两个因数 α 和 β 都是奇数。

设 $\alpha=2K+1$。则由等式（1）得：

$\beta(2K+1)=2(2K+1+\beta+1)+1$ 化简得：

$2(2K+\beta+2)+1=2K\beta+\beta$ 或 $2K(\beta-2)=5+\beta$ 即 $\beta\geqslant3$。若 $\beta=3$ 则 $K=4,\alpha=9$，所以数 $N=2^9\times3^3=13824$。

15．分别求末尾数字为 1192，并且约数的个数为：①16；②40；各数中的最小的数。

解：数 $N=10000n+1192=10000n+8\times149=a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdots l^{\lambda}$，此时，$N_1=1250n+149=b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\cdots l^{\lambda}$。设 $n=1$，则 $N_1=1399$ 是一个质数。

设 $n=2$，则 $N_1=2649=3\times883$，若 $b=3$，$c=883$，则 $N=2^3\times3\times883=21192$，并且它的约数的个数为 $(3+1)(1+1)(1+1)=16$。若 $b=3$，则这个数的数字和应该是 3 的倍数。但 $1+1+9+2=13$，在这里指出 n 除了等于 2 以外，还可以等于 5，数 $N=51192=2^3\times3^4\times79$，它的约数的个数为 $(3+1)(4+1)(1+1)=40$。

16．已知某数有 63 个约数，而这些约数的和等于51181，求这数。

解：$\because$ $63=3\times3\times7=7\times9=3\times21$，

故可令所求之数 $N=P_1^{\alpha}P_2^{\beta}P_3^{\gamma}$ 或 $N=P_1^{\alpha}P_2^{\beta}$，

此处 P_1，P_2，P_3 均为质数。

1.若令 $N=P_1^{\alpha}P_2^{\beta}P_3^{\gamma}$

则 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=63$，

即 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=3\times3\times7$。

当 $\alpha+1=3$，$\beta+1=3$，$\gamma+1=7$ 时，

则 N 有三个质因数 P_1，P_2，P_3，且

$N=P_1^2P_2^2P_3^6$。N 的约数的和为：

$$S(N)=(1+P_1+P_1^2)(1+P_2+P_2^2)(1+P_3+P_3^2+P_3^3+P_3^4+P_3^5+P_3^6)$$

$$=\frac{P_1^3-1}{P_1-1}\cdot\frac{P_2^3-1}{P_2-1}\cdot\frac{P_3^7-1}{P_3-1}$$

$$=51181=13\times31\times127。$$

由于等式两边均为三个数的乘积，故可认为其依次分别相等。

故有：

$$\begin{cases}P_1^2+P_1+1=13,\\P_2^2+P_2+1=31,\\P_3^6+P_3^5+P_3^4+P_3^3+P_3^2+P_3+1=127.\end{cases}$$

分别解之得：

$$\begin{cases}P_1=3,\\P_2=5,\\P_3=2.\end{cases}$$

故得：$N=2^6\cdot3^2\cdot5^2=14400$。

2.若令　$N=P_1^{\alpha}P_2^{\beta}$，

则　$(\alpha+1)(\beta+1)=63$，$(\alpha+1)(\beta+1)=7\times9$.

当　$\alpha+1=7$，$\beta+1=9$，

则　N 有两个质数 P_1，P_2。

且　$N=P_1^6P_2^8$，

$$S(N)=\frac{P_1^7-1}{P_1-1}\cdot\frac{P_2^9-1}{P_2-1}=51181。$$

若取 $P_1=2$，$P_2=3$

则 $\dfrac{P_1^7-1}{P_1-1}\cdot\dfrac{P_2^9-1}{P_2-1}$ 就大于 51181，

因为 $$\left[\frac{P_1^7-1}{P_1-1}\right]_{P_1=2}=2^6+2^5+\cdots+1=127$$

$$\left[\frac{P_2^9-1}{P_2-1}\right]_{P_2=3}=3^8+3^7+\cdots+1=9841$$

若取 $P_1=3$，$P_2=2$，则

$$\left[\frac{P_1^7-1}{P_1-1}\right]_{P_1=3}=1093$$

$$\left[\frac{P_2^9-1}{P_2-1}\right]_{P_2=2}=511$$

$\dfrac{P_1^7-1}{P_1-1}\cdot\dfrac{P_2^9-1}{P_2-1}$ 亦将大于 51181。

其它情形均大于 51181。故得 $N=14400$。

17．一千以内的自然数 1，2，3，……，1000 的连乘积 1000!可以被 7 的若干次方整除，它的最大的指数是什么？

这个连乘积也可以被 3 的若干次方整除，求 3 的最大指数。

解：因为 $1000=7\times142+6$，所以 $N=1\times2\times3\cdots999\times1000$ 能被下列的数整除：

$$7(7\times2)(7\times3)(7\times4)\cdots(7\times142)$$
$$=7^{142}\times(1\times2\times3\cdots\cdots142)。$$

仿此，$142=7\times20+2$，即 $1\times2\times3\cdots\cdots142$ 能被下列的数整

除：

$$7(2\times7)(3\times7)\cdots\cdots(20\times7)$$
$$=7^{20}\times(1\times2\times3\cdots\cdots20).$$

最后 $20=7\times2+6$ 即 $1\times2\times3\cdots\cdots20$ 能被数 $7\times7\times2=7^2\times2$ 整除。

由此可知，N 能被 $7^{142}\times7^{20}\times7^2=7^{164}$ 所整除。同理可求得 N 能被 3^{498} 整除。

18. 证明：若 r 是 a 除以 d 的余数，则 a^m 除以 d 的余数等于 r^m 除以 d 的余数。

解：设 $a=qd+r$，

且 $a^m=(qd+r)^m=q^md^m+c_m^1q^{m-1}d^{m-1}r+\cdots\cdots c_m^{m-1}qdr^{m-1}+r^m$，在右端共有 $(m+1)$ 项，前 m 项的每一项都含有 d，最后一项是 r^m，当 a^m 除以 d 时，这一项就决定它的余数。

19. 证明：二数 a 和 $b(a>b)$ 分别除以 $a-b$ 得一样的余数时，则 a^m-b^m 能被 $a-b$ 整除。

解：设 $a=b+d$，并且设 $b=dk+r$，此处 r 为 b 除以 d 的余数。此时，

$a=dk+r+d=(k+1)d+r$，即当 a 除以 d 时得同一的余数 r。若 $a^m=N_1d+r^m$，$b^m=Nd+r^m$

$$a^m-b^m=(N_1d+r^m)-(Nd+r^m)$$
$$=N_1d-Nd=(N_1-N)d$$

显然有 a^m-b^m 被 d 整除，而 $d=a-b$。

20. 证明：整系数多项式 $f(x)=ax^m+bx^{m-1}+\cdots+c$ 不可能当 x 取所有的值时都是质数。

解：设 $x=\alpha$，而 $f(\alpha)=a\alpha^m+b\alpha^{m-1}+\cdots\cdots+c=p$ 是

一个质数．计算 $f(\alpha+p)$．

$$
\begin{aligned}
f(\alpha+p) &= a(\alpha+p)^m + b(\alpha+p)^{m-1} + \cdots\cdots + c \\
&= a\alpha^m + b\alpha^{m-1} + \cdots + c + a\alpha^{m-1}pc_m^1 \\
&\quad + \cdots + b\alpha^{m-2}pc_{m-1}^1 + \cdots \\
&= p + \varphi(p).
\end{aligned}
$$

此处$\varphi(p)$是一个每一项都可以被p整除的多项式．由此可知 $f(a+p)=pk$，是一个合数．特别是，当 $x=c$ 时，$f(c)$ 能被 c 整除， 因为 $f(c)=ac^m+bc^{m-1}+\cdots\cdots+c=c(ac^{m-1}+bc^{m-2}+\cdots\cdots+1)$．

$\therefore$ $f(c)$是一个合数．

21．若数 N 除以 p 而余$(p-1)$，则数 N 的任意偶次方是有$(pm+1)$形式的数，而数 N 的任意奇次方是有$(pm-1)$形式的数．

解：设 $N=pK+(p-1)$，

则
$$
\begin{aligned}
N^2 &= [pK+(p-1)]^2 \\
&= [p^2K^2+2pK(p-1)+p^2-2p+1] \\
&= pm+1.
\end{aligned}
$$

仿次可得其 4 次方，6 次方等等（逐次乘以 N^2）．

又
$$
\begin{aligned}
N^3 &= [pK+(p-1)]^3 = [p(K+1)-1]^3 \\
&= p^3(K+1)^3 - 3p^2(K+1)^2 + 3p(K+1) - 1 \\
&= pm-1 \text{ 等等}.
\end{aligned}
$$

22．证明对任何正整数 n

$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 都是整数，并且用 3 除时余 2．

证明1 $n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$

$$=\frac{n}{2}(2n^2+3n+1)-1$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)-1$$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{8}-1$$

$$=\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-3+2$$

对任何整数 n 来说 $\frac{n(n+1)}{2}$ 是整数，所以原式为整数。

在相邻的三个整数 $2n$，$2n+1$，$2n+2$ 中，必有一个是 3 的倍数，因为 3 与 8 互质，8 除得尽分子，分子提出 3 后，仍能被 8 除尽，所以

$$\frac{2n(2n+1)(2n+2)}{8}-3$$

是 3 的倍数，故原式用 3 除时余 2。

证明2 用 $f(n)$ 代表原式，用数学归纳法来证明。

当 $n=1$ 时，$f(1)=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1=2$。用 3 除 $f(1)$ 得余数 2。

假定在 $n=K$ 时，用 3 除 $f(K)$，得余数 2，

即 $f(K)=3m+2$ （m 是整数）

现在看

$$f(K+1)-f(K)$$