高等数学基础

附：高等数学基础自学考试大纲

组编/全国高等教育自学考试指导委员会
主编/王德谋

全国高等教育自学考试指定教材 小学教育专业（本科）

版社

全国高等教育自学考试指定教材　小学教育专业（专科）

○马克思主义哲学原理
○邓小平理论概论
○法律基础与思想道德修养
○大学英语自学教程（上册）
○美育基础
（二选一）
○科学·技术·社会
○教育原理
○小学教育科学研究
○小学教育心理学
○小学科学教育
○小学语文教学论
○小学数学教学论
○小学班主任
○中外文学作品导读
○汉语基础
（文科组）
●高等数学基础
○数论初步
（理科组）
○微型计算机应用基础
○现代教育技术
（二选一）

封面设计/曹　铀

ISBN 7-303-04940-1

9 787303 049400 >

ISBN 7-303-04940-1/O·212　定价：23.00元

全国高等教育自学考试指定教材
小学教育专业（专科）

高等数学基础

（附：高等数学基础自学考试大纲）

全国高等教育自学考试指导委员会　组编
主　编　王德谋

北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础/王德谋主编．—北京：北京师范大学出版社，1999.1
ISBN 7-303-04940-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等数学-高等教育-自学考试-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 39743 号

北京师范大学出版社出版
（北京新街口外大街19号　邮政编码：100875）
出 版 人：常汝吉
责任编辑：吕建生
北京市鑫鑫印刷厂印刷
开本：880mm×1 230mm　1/32　印张：16.375　字数：462千字
1999年11月第2版　2000年9月第1次印刷
印数：001～30100　定价：23.00元

组编前言

当您开始阅读本书时，人类已经迈入了21世纪。

这是一个变幻难测的世纪，这是一个催人奋进的时代，科学技术飞速发展，知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战，随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇，寻求发展，迎接挑战，适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终身学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试，其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学，为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问，这种教材应当适合自学，应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息，有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力，也有利于学习者学以致用，解决实际工作中所遇到的问题，具有如此特点的书，我们虽然沿用了“教材”这个概念，但它与那种仅供教师讲、学生听，教师不讲、学生不懂，以“教”为中心的教科书相比，已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解，以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念，不断探索适合自己的学习方法，充分利用已有的知识基础和实际工作经验，最大限度地发挥自己的潜能达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999年10月

编者的话

《高等数学基础》是全国高等教育自学考试小学教育专业的试用教材，内容包括空间解析几何、一元函数微积分和线性代数的基础知识，重点讲授基本概念、基本方法和简单应用．开设本课程的目的在于使学员对高等数学的基本思想和一般方法有初步的了解，在数学思维和计算技能方面受到一次较为系统严格的训练，提高对初等数学的认识和处理能力，为今后的教学工作打下较为坚实的基础．

本书选材依据的是自学考试大纲，突出重点，注重基础．少量打“*”号的内容，仅供有兴趣的读者参考，不属于考试范围之内．编写教材时，充分考虑到自学的特点，力争叙述简明，深入浅出，通俗易懂；对于难点部分，不仅注意掌握尺度，同时遵照循序渐进原则，逐步加深，既配有较多例题，又充分利用几何直观，以减轻难度；引入重要概念时注意讲清背景；证明定理，努力做到思路清晰．每章都有小结，帮助学员整理教材内容，抓住重点．大部分习题都有答案，可供解题后参考．

编　者

1999 年10月

目　录

第一篇　空间解析几何

第二篇 微积分

第三篇　线性代数

《高等数学基础》自学考试大纲

第　一　篇

空间解析几何

原书空白页

第一章　平面解析几何复习

本章系统地复习了平面解析几何的有关知识，为学习空间解析几何做好准备，包括直线方程的几种形式、直线间的位置关系与夹角、点到直线的距离；圆锥曲线（圆、椭圆、双曲线、抛物线）的定义、方程、几何性质等；曲线的参数方程以及与普通方程间的互化.

1.1　直　线

1.1.1　直线方程的几种形式

1. 平面直角坐标系中的两个基本公式

(1)两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1.1}$$

(2)线段的定比分点公式

已知 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$分线段 P_1P_2 所成的比 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，则点 P 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.2}$$

特别地，线段 P_1P_2 的中点 M 的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

2. 直角坐标系中直线方程的不同形式

(1)点斜式

经过点 $P_1(x_1,y_1)$，斜率是 k 的直线 l 的方程为

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{1.3}$$

方程(1.3)称为直线方程的**点斜式**.

(2)斜截式

斜率为 k，与 y 轴的交点为$(0,b)$的直线 l 的方程为

$$y=kx+b, \tag{1.4}$$

此处 b 称为直线 l 在 y 轴上的**截距**.

方程(1.4)称为直线方程的**斜截式**.

(3)两点式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$及 $P_2(x_2,y_2)$($x_1\neq x_2$ 且 $y_1\neq y_2$)的直线 l 的方程为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{1.5}$$

方程(1.5)称为直线方程的**两点式**.

(4)截距式

在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b($a\neq 0,b\neq 0$)的直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1.6}$$

方程(1.6)称为直线方程的**截距式**.

(5)直线方程的一般式

直线的上述各种形式的方程都是二元一次方程，反之，关于 x 和 y 的一次方程

$$Ax+By+C=0, \tag{1.7}$$

其中 A，B 不全为零，皆表示直线.

二元一次方程(1.7)称为直线方程的**一般式**. 当 $B\neq 0$ 时，直线(1.7)的斜率为$-\dfrac{A}{B}$.

同一条直线的各种形式的方程，可以通过同解变形互相转化，在这个意义下，我们把它们看成是同一个方程. 因此我们可以说直线与二元一次方程一一对应.

例 1 已知$\triangle ABC$ 的顶点 $A(0,5)$，$B(2,-2)$，$C(-6,4)$，求 BC 边上的中线所在的直线方程.

解 设 BC 的中点为 $D(d_1,d_2)$，由中点公式得

$$d_1=\frac{2+(-6)}{2}=-2,\quad d_2=\frac{-2+4}{2}=1,$$

于是有 $D(-2,1)$. 过两点 $A(0,5)$ 与 $D(-2,1)$ 的直线方程(两点式)为

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-5}{1-5},$$

整理得

$$2x-y+5=0.$$

1.1.2 两条直线的位置关系

1. 两条直线平行和垂直的条件

设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别为 k_1 和 k_2，则

$$l_1 \parallel l_2(\text{包括重合}) \Longleftrightarrow k_1=k_2;$$

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}(\text{或 } k_1\cdot k_2=-1).$$

若直线 l_1 和 l_2 的方程分别为

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0,$$
$$l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0,$$

则

$$l_1 \parallel l_2(\text{不重合}) \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2};$$

$$l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

$$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

2. 两条直线所成的角

我们把直线 l_1 依逆时针方向旋转到与 l_2 重合时所转的角，叫做 **l_1 到 l_2 的角**. 在图 1.1 中，直线 l_1 到 l_2 的角是 θ_1，l_2 到 l_1 的角是 θ_2($\theta_1+\theta_2=180°$). θ_1 和 θ_2 中不大于直角者，称为**直线 l_1 和 l_2 所成的角**，简称**夹角**.

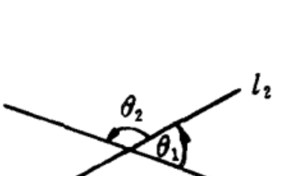

图 1.1

设直线 l_1 的斜率为 k_1，l_2 的斜率为 k_2，

直线 l_1 到 l_2 的角为 θ. 若 $1+k_1k_2=0$，则 $\theta=90°$；若 $1+k_1k_2\neq0$，则 $\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. 计算 l_1 与 l_2 的夹角 φ 用公式

$$\tan\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

3. 两条直线的交点

求两条直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 与 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点，只需将这两个方程联立求解.

已知方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0.\end{cases}$$

当 $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ 时，方程组有唯一解：

$$\begin{cases}x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1},\\y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}.\end{cases}$$

它就是二直线的唯一交点的坐标.

当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ 时，方程组无解，即二直线无交点（二直线平行）.

当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ 时，方程组有无穷多组解，即二直线有无穷多交点（二直线重合）.

4. 点到直线的距离

设点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离为 d，则

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

例 2 当 a 为何值时，直线 $ax-5y+9=0$ 与 $2x+3y-15=0$ (1)互相平行；(2)互相垂直.

解 (1)依二直线平行的充要条件 $\frac{a}{2}=\frac{-5}{3}\neq\frac{9}{-15}$，得 $a=-\frac{10}{3}$；

(2)依二直线垂直的充要条件 $a\times2+(-5)\times3=0$，得 $a=\frac{15}{2}$.

例 3 求二平行直线 $2x-7y+8=0$ 与 $2x-7y-6=0$ 间的距离.

解 二平行直线间的距离处处相等，且都等于其中一条直线上的任一点到另一条直线的距离. 为计算简单，我们取一条直线与某个坐标轴的交点，例如取 $2x-7y-6=0$ 与 x 轴的交点 $P(3,0)$，计算 $P(3,0)$到直线 $2x-7y+8=0$ 的距离

$$d=\frac{|2\times3-7\times0+8|}{\sqrt{2^2+(-7)^2}}=\frac{14}{\sqrt{53}}=\frac{14}{53}\sqrt{53}.$$

这就是所求二已知平行直线间的距离.

1.2 圆锥曲线

1.2.1 曲线和方程

在直角坐标系中，如果某条曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解之间满足如下关系：

凡是曲线 C 上的点，其坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解；反过来，凡是以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点，都在曲线 C 上.

那么，方程 $f(x,y)=0$ 就叫做**曲线 C 的方程**，曲线 C 就叫做**方程 $f(x,y)=0$ 的曲线**(或图形).

求曲线的方程，一般有以下几个步骤：

(1)建立适当的直角坐标系，用(x,y)表示曲线上任一点 M 的坐标；

(2)写出点 M 适合的几何条件 $P(M)$；

(3)用坐标表示条件 $P(M)$，列出方程 $f(x,y)=0$；

(4)化方程 $f(x,y)=0$ 为最简形式；

(5)证明以化简后的方程的解为坐标的点都在曲线上(由于方程的化简一般都是同解变形，因此本步骤一般可以省略).

1.2.2 圆

圆心在点 $C(a,b)$，半径为 r 的圆的方程为