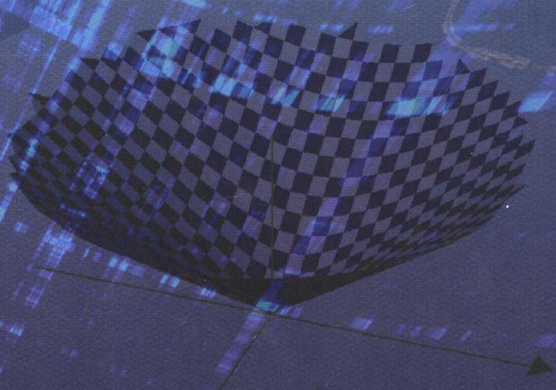
普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学实验

刘琼荪　龚　劬　何中市　傅　鹂　任善强　编著



高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学实验

刘琼荪　龚劬　何中市　傅鹂　任善强　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，书中通过"问题→数学模型→数学方法→软件求解→思考分析→实际操练"这种有效的教学模式，让读者充分体验数学实验的奥妙。全书共十三章，涵盖数值计算、数理统计、优化方法和图论网络等具有极大实用价值的数学模型类别。本书的特点是通俗易懂，趣味性强，遍布书中的"想"、"做"、"注意"和"提示"四种图标，令人耳目一新，兴致勃勃。本书在内容和编排上的精心设计，极大地帮助读者培养观察问题、分析问题、解决问题的实际能力，引导读者达到一种全新的境界。

本书可作为高等院校理工科各专业本科生、研究生、教师以及各行业工程技术人员的教材或参考书，也适合于作为上述各类人士的自学读本。

图书在版编目(CIP)数据

数学实验/刘琼荪等编著. —北京：高等教育出版社，2004.7

普通高等教育"十五"国家级规划教材

ISBN 7-04-014409-3

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 046662 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京星月印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2004 年 7 月第 1 版
印　　张	16	印　　次	2004 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	定　　价	18.70 元

前　言

这本书名为“数学实验”，但是书中并不讨论“数学实验”的定义，不回答“数学实验”是什么的问题。

那有什么要紧的吗？你做过物理实验、化学实验吗？做过！好！那请你现在回答物理实验或者化学实验的定义……请别想了，说不准定义，并没有妨碍你物理实验全优，化学实验及格。

“数学实验”你知道吗，听说过吗？知道！很好，那么这“前言”的下面部分你就更可以立即闭上眼睛跳过了！

既然根本没有听说过“数学实验”，那么建议你就像对待物理实验、化学实验一样，不管它是什么，做了再说！

做物理实验的时候，你可能会用到滑轮、弹簧、电池组电路什么的，根据实验课题的不同需要一大堆东西；做化学实验的时候，你可能会用到试管、烧杯、各种原料等等又是一大堆东西。做“数学实验”呢？你只需要计算机！简洁多了吧！

这是当代信息技术、计算技术的蓬勃发展所带来的新境界！

因此，当今越来越趋向于尽可能用“数学实验”这种虚拟的实验代替常规的真实的实验，如物理实验、化学实验、生物实验、医学实验，甚至有可能渗透到心理学、社会学实验等等。现实中的核爆模拟实验以及幻想中的《黑客帝国》就是这种趋势的登峰造极。

“数学实验”应该是不同学科领域新的共同手段。

“数学实验”的一个首要环节是“数学建模”，然后是数学方法/算法。正因为如此，读完本书后，如果你觉得这书更像一本“数学建模”，也不足为奇。其实，“数学实验”的内涵人们还没有统一的认识，这也是此书不给出“数学实验”定义的另一个原因。

还是留给你自己去探索、体验，去认识一个新天地吧！

本书第1、6、7、8章由刘琼荪编写，第11、12、13章及附录A由龚劬编写，第2、3、4、5章由何中市编写，第9、10章由傅鹂编写，任善强对全书进行了全面的审阅和修改，并提出了许多合理化的建议。

全体作者

2004年1月

策划编辑　李艳馥
责任编辑　蒋　青
封面设计　李卫青
责任绘图　尹　莉
版式设计　马静如
责任校对　王　雨
责任印制　孔　源

目　　录

第1章

如何用数学解决实际问题

> 数学是一种很美的语言.伽利略曾说:“自然界的伟大的书是用数学语言写成的”.希望你能从一些数学的探索和数学的应用中获得乐趣.
>
> ——作者

数学是与人类文明并存共同发展的,它是一种语言,是一种交流和认识世界的方法,是一种将自然、社会运动现象法则化、简约化的工具.数学作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展的历史长河中,一直是和人们生活的实际需要密切相关的.随着计算机的发展,数学渗入各行各业,得到了广泛的应用,直接为社会创造价值,已经成为一种关键的、普遍的、适用的技术.历史已经证明,国家的繁荣昌盛,关键在于高新技术的发达和经济管理的高效率.高新技术的基础是应用科学,而应用科学的基础是数学.数学给予人们的不只是知识,更重要的是能力,这种能力包括直观思维、逻辑思维、精确计算和准确判断等.因此数学在提高民族的科学文化素质中处于极为重要的地位,掌握数学的概念、计算和解决问题的能力对一个真正有文化的人来说是至关重要的.

§1.1 什么是数学模型

模型是人们十分熟悉的概念,如玩具电动模型、机械运动模型等是人们熟悉的实物模型.而数学模型(Mathematical Model)还没有一个人们公认的确切的定义,如相关信息资源2所述:对于一个特定对象,为了一个特定的目标,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具,得到的一个数学结构.这里的“特定对象”是为了解决某个实际问题而提出的;“特定的目的”是指当研究一个特定对象时要达到的目的,如分析、预测、控制、决策等;“数学结构”可以是数学关系式,也可以是程序、图、表等.数学建模(Mathematical Modeling)则是指建立数学模型的全过程,包括问题分析、模型建立、求解、结果检验和

应用等.

为了更好地理解数学模型和数学建模的概念,我们列举一个实际建模例子.

例 1.1 新产品的销售量变化规律.

一种新产品进入市场以后,产品的销售量一般会经过"先增后逐渐平稳略有下降"的一个过程,这称为产品的生命周期.怎样使用数学模型来描述新产品的销售量的变化过程呢?

1. 问题分析

当一个新产品进入市场时,其有关信息的传播有两个途径:一是经营者或厂家进行广泛的广告宣传,消费者亲眼看到广告或亲耳听到消息,这是来自消费者以外的信息;二是当一部分消费者购买了该产品之后,经过使用对该产品有了认识,向其周围的人们进行宣传,这称之为来自消费者内部的信息.正是这两方面的信息促使消费者去购买该商品.

2. 合理假设

- 设 N 为潜在的消费者人数,$x(t)$ 为 t 时刻购买了该产品的人数,并且认为变量 $x(t)$ 随时间变化是连续的;
- 购买者增量 Δx 由两部分组成,一是由外部信息导致消费者增加,其增量记为 Δx_1.二是由内部信息导致消费者增加,记为 Δx_2;
- 由外部信息导致消费者增量与未购买者人数成正比,即

$$\Delta x_1 = k_1(N - x(t))\Delta t \qquad (k_1 > 0 \text{ 为比例系数}); \tag{1.1}$$

- 由内部信息导致购买者增量与已购买者人数和未购买者人数之积成正比,即

$$\Delta x_2 = k_2 x(t) \cdot (N - x(t))\Delta t \quad (k_2 > 0 \text{ 为比例系数}). \tag{1.2}$$

3. 建立数学模型

由上述(1.1)(1.2)式,再由假设知,Δx 由 Δx_1 和 Δx_2 两部分组成,得到:

$$\Delta x = k_1(N - x(t))\Delta t + k_2 x(t)(N - x(t))\Delta t. \tag{1.3}$$

(1.3)式两端同除以 Δt,并令 $\Delta t \to 0$,得到微分方程模型如下:

$$\frac{dx}{dt} = (N - x(t))(k_1 + k_2 x(t)),\text{并且},x(0) = 0. \tag{1.4}$$

4. 模型求解

为分析产品销售量 $x(t)$ 随时间 t 的变化情况,对微分方程(1.4)求解,得:

$$x(t) = N \cdot \frac{1 - e^{-(k_1 + k_2 N)t}}{1 + \frac{k_2 N}{k_1} e^{-(k_1 + k_2 N)t}}. \tag{1.5}$$

该问题解含有未知参数 k_1, k_2, N,如何确定它们呢?其方法是采样,收集某产品从推向市场以来其销售情况的统计数据,根据数据分析,用最小二乘法将模型中

的未知参数辨识出来. 例如,使用某产品一段时期的销售统计数据,对模型(1.4)中的参数进行参数辨识,得到 $k_1=0.02$, $k_2=0.035$, $N=10^4$,通过计算,具体分析出某产品的销售量与时间的关系如下图所示:

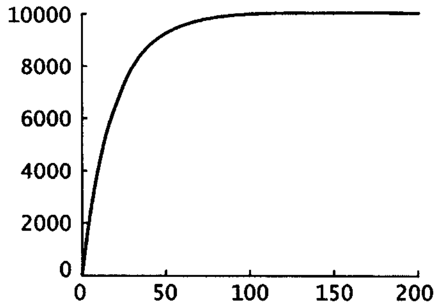


图 1.1　产品销售量曲线

图 1.1 的曲线基本反映出产品的生命周期——先增后逐渐平稳略有下降.

5. 模型检验

通过对实际问题分析,我们建立了数学模型(1.4),并得到解曲线(1.5)或图形 1.1,它们是否能应用于实际? 能否预测产品在今后一段时期内的销售情况? 关键取决于对模型的检验.

我们使用某产品一段时期的销售统计数据,将这些实测数据代入模型(1.5)中,如果实测数据与理论数据(模型中对应值)之差的平方和(定义为误差平方和)很小,则称该模型通过了检验. 如图 1.2 所示,符号"∘"表示实测数据,而曲线 $x(t)$ 是理论曲线. 实际观测数据在理论曲线附近波动,显而易见,其波动幅度较小. 再计算误差平方和的值,如果该值相对于原始数据比较小,我们称该模型通过了检验,这时可以运用该模型进行预测了

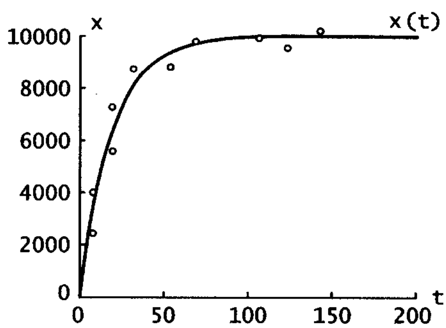


图 1.2　产品销售量曲线

以上反映了一个数学建模的全过程.

§1.2 数学模型的分类

为了有效地、系统地研究数学建模方法,需要将数学模型加以分类,在各类模型中找出数学建模方法的共性,便于初学者学习和尽快掌握数学建模方法. 一般地,对数学模型按两种方法进行分类,一是按应用领域划分,如人口模型、交通模型、经济预测模型、数量经济模型、金融模型、生态模型、环境模型、企业规划模型等等;二是按数学方法进行划分,如方程模型、微分方程模型、图论模型、网络模型、概率模型、统计模型、优化模型、最优控制模型等等. 或者更笼统地划分,分成连续系统模型和离散系统模型、确定性模型和随机性模型等几大类. 从理论研究的角度看,对数学模型的分类是有必要的. 但不管数学模型按什么方式进行分类,建立数学模型的主要目的是能有效地解决实际问题和预测未来.

学习数学模型或数学建模的第一步关键是掌握数学建模的基本方法和步骤.

§1.3 数学建模的基本方法和步骤

我们可能面对的实际问题是多种多样、错综复杂的,如果解决实际问题的目的不同,分析问题和解决问题的方法也不同,建立的数学模型也不相同. 一般地,解决实际问题的数学建模方法大致可分为两类:机理分析法和测试分析法. 所谓机理分析是根据对客观事物特性的认识,通过对现实对象各个因素之间的因果关系的分析,找出反映内部机理的数量规律,建立的数学模型常有明确的物理意义. 例如,试建立细菌繁殖过程的数学模型. 该问题显然涉及几个因素,一是需要预测任意时刻 t 某种细菌的数量 $A(t)$,即细菌的数量与时间构成的函数关系;二是细菌的繁殖速度 $v(t)$ 也与时间有关,同时它与细菌的数量成一定的关系. 由机理分析法,可以直接分析得到如下关系:$v(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{A(t)-A(t_0)}{t-t_0}$. 机理分析法的特点就是某实际问题涉及的各个因素之间有比较明确的物理意义下的因果关系. 但对于大多数实际问题,要认识其内部机理是很困难的,甚至没法确定研究对象与哪些因素有关,这时需要用到第二种建模方法——测试分析法. 例如,某种疾病的诊断问题,首先需要分析该疾病有什么样的症状,该疾病与各种症状具有什么关系呢? 有时很难表达成一个数学关系式. 但可以收集患者的各种数据,

通过数据分析建立该疾病与症状之间的关系模型,从而达到正确诊断该疾病的目的.因此,测试分析法的特点是通过对系统输出的测试来认识系统的输入-输出规律,建立尽可能与这一规律相吻合的数学模型.另外,许多实际问题也常常将两种方法结合起来,用机理分析法建立模型的结构,用测试分析法确定模型的参数.

数学建模要经过哪些步骤并没有固定的模式,建模的步骤往往与问题的性质和建模的目的有关.我们用一个简单的示意图来描述,如图 1.3.

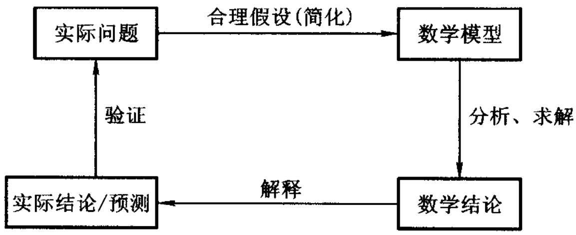


图 1.3 数学建模过程的示意图

上述步骤只是数学建模过程的一个大致地描述,实际建模时可以灵活应用.如例 1.1,为了分析某产品销售量的变化规律,其数学建模的过程经过了分析→假设→模型→求解→检验→应用.并且在建立数学模型的过程中,既用到了机理分析法,又用到了测试分析法.

数学建模是以解决实际问题为对象,并不局限于用一种数学方法,也不拘泥于使用哪一种计算软件工具,在建模过程中提倡百花齐放、开阔思路.常常对于同一问题有多种建模方法,较难分辨优劣.另一方面,应该尽可能用简明、巧妙的方法完成数学建模,使模型不仅有很好的应用价值,亦有很好的推广价值和理论价值.

在建模的过程中还应当注意模型的解释和检验.因为数学模型往往只是对现实对象的某种近似,模型是否成功,是否能反映所研究的实际问题,需要通过对模型的解释检验才能发现其合理性,才能达到应用的目的.如果发现用模型的解去解释实际问题尚有一定的距离,则需要修改假设和模型,使模型更加完善,更能反映实际情况.

总之,数学建模需要有对现实对象的敏锐的洞察力,有对问题分析的高度的抽象力,有对数学工具的熟练的把握力,再加上不时迸发的创造力.有了这些能力,只要坚持数学建模实践,就一定能够提高数学建模的水平.

更多的相关信息资源

1 Frank R. Giordano, Maurice D. Weir and William P. Fox. *A First Course in Mathematical Modeling*. 影印版. 北京:机械工业出版社, Cole, a division of Thomson Learning, Inc,2003

2 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材. 长沙:湖南教育出版社,1993

3 吴翊,吴孟达,成礼智. 数学建模的理论与实践. 长沙:国防科技大学出版社,1999

4 傅鹂,龚劬,刘琼荪,何中市. 数学实验. 北京:科学出版社,2000

5 萧树铁,姜启源,何青,高立. 数学实验. 北京:高等教育出版社,1999

6 周义仓,赫孝良. 数学建模实验. 西安:西安交通大学出版社,1999

7 潭永基,俞文魮. 数学模型. 上海:复旦大学出版社,1996

8 么焕民,孙秀梅,孟凡友. 数学建模(上、下册). 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003

9 唐焕文,贺明峰. 数学模型引论. 北京:高等教育出版社,2001

10 王守愚. 思维与创造. 北京:气象出版社,2000

第 2 章

飞机如何定价

——方程求解

很多的科学问题都可以转化为数学问题，很多的数学问题都可以转化为解方程问题，可见方程求解之重要．无论在理论分析上还是在计算方法上，方程求解都非常复杂，然而其思想和所用的工具却十分简单：迭代、数列和图形．

——作者

§2.1　竞争中的飞机制造业

在近 90 年的历史中，波音这个世界最大的飞机制造商已经有三次因喷气机设计的创新而迎来了它的巨大飞跃，波音 707 是第一架横跨大西洋的喷气机；波音 747 是第一架巨型的喷气式客机；而波音 777 是第一架长途旅行双发动机的客机．为使波音公司在与其竞争对手空中客车公司的角逐中继续保持领先地位，工程师们正在设计一种全新的喷气客机——波音 7E7，该飞机的设计目标是成为世界飞机市场上最有效率和最为经济的机型．

1970 年法、德两国分别成立了空中客车公司，开始了漫长的向波音挑战的旅程．而后，1971 年西班牙加入，1979 年英国也加入．在此后长达 25 年的时间里，尽管四国政府不断给予财政补贴，空中客车公司工程技术人员全力以赴，新型飞机一架接一架上天，但在波音公司竞争性定价策略的压力下，公司仍一直亏损．直到 1 300 多架空中客车交付使用后，波音公司才正视空中客车公司的存在，不再继续使用低价倾销策略，逼迫空中客车公司退出竞争．因为那时波音公司的账单上首次出现了亏损，它不得不意识到有欧洲各国政府力量支持的空中客车公司是不可战胜的．于是，两家公司握手言和，共同提高飞机价格，共同垄断市场．

波音和空中客车这两家厂商的最大客户，全球最大的高科技商用飞机租赁公司——国际租赁金融公司的主席斯蒂文・艾德华兹说："波音应该如空中客车一样，在定价和技术上跃过对手"．

价格:作为市场调节的杠杆,厂家采用何种定价策略,将是决定其生死存亡的重要因素.从波音公司与空中客车公司的竞争过程中,一味的低价是行不通的,竞争与联合、由市场调节的科学合理的定价策略成为必然.我们的问题是:某飞机制造商对其研发的一种新型客机如何定价?

§2.2 飞机的定价策略

传统观念中,价格被认为是管理者决定的变量,而销售量是市场决定的变量.另一种观念与此相反,把销售量作为管理者决定的变量,而价格是由市场决定的变量.事实上,他们都是为了相同的目标——利润最大.

2.2.1 问题分析

飞机定价策略涉及诸多因素,这里主要考虑以下因素:

飞机的制造成本、公司的生产能力、飞机的销售数量与价格、竞争对手的行为与市场占有率等因素.

2.2.2 假设及模型

价格记为 p,根据实际情况,飞机的几大制造商共同垄断市场,并在价格上形成联合,具体假设如下:

1) 单一型号:为了研究方便,假设只有一种型号飞机;

2) 价格决定总销售量:设该型号飞机全球销售量为 N. N 应该受到诸多因素的影响,假设其中价格是最主要的因素.根据市场历史的销售规律和需求曲线,假设该公司销售部门预测得到

$$N = N(p) = -78p^2 + 655p + 125;$$

3) 市场占有率:既然在价格上形成联合,即几大公司在价格的变化是同步的,因此,不同定价不会影响各自的市场占有率(但是会影响飞机的市场需求总量).假设市场占有率是常数,记为 h;

4) 飞机生产能力:假设公司具有足够生产能力,能够满足订单要求,销售量记为 x. 既然可以预测该型号飞机全球销售量,结合公司的市场占有率,可以得到

$$x = h \times N(p);$$

5) 制造成本:根据产品分析部门的估计,制造成本为

$$C(x) = 50 + 1.5x + 8x^{\frac{3}{4}};$$

6）利润：假设利润等于销售收入减去成本，利润函数为

$$R(p)=px-C(x);$$

7）最佳定价策略：利润 $R(p)$ 最大.

由以上分析及假设得到波音公司飞机最佳定价策略的数学模型如下：

$$\mathrm{Max}R(p)=px-C(x),$$

其中 $N(p)=-78p^2+655p+125$，$x=h\times N(p)$，$C(x)=50+1.5x+8x^{\frac{3}{4}}$，$p,x,N\geq 0$. 即：

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}\ R(p)=&(p-1.5)h\times(-78p^2+655p+125)-50-8h^{\frac{3}{4}}\times\\&(-78p^2+655p+125)^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

这是一个典型的无约束非线性优化模型，可以转化为求目标函数 $R(p)$ 的驻点，也就是其导函数 $R'(p)$ 的零点：

$$R'(p)=0,$$

即

$$\begin{aligned}&h\times(-78p^2+655p+125)+(p-1.5)h\times(-156p+655)-\\&6h^{\frac{3}{4}}\times(-78p^2+655p+125)^{-\frac{1}{4}}(-156p+655)=0\end{aligned}$$

因此，模型的求解转化为非线性方程的求解.

§2.3 方程数值求解方法

无论是探索未知世界、还是改造已知世界，都涉及变量的取值及优化，从而几乎无一不归结为解方程. 方程是很多工程和科学工作的发动机. 若干世纪以来，工程师和科学家们花了大量的时间用于求解方程：线性的或非线性的，单个方程或方程组的，代数的或超越的等等. 求解方法主要有寻求精确解的解析法、近似解的数值解法.

2.3.1 非线性方程

方程分为代数（多项式函数）方程和超越方程，一次代数方程称为线性方程，其余称为非线性方程. 从中学到大学，对数学课程来讲，解方程可谓是家常便饭. 对于解方程，我们掌握了多少呢？

趣 二次方程的求根公式能倒背如流，三次方程求解公式呢？四次方程有求根公式吗？如果有，你又能够记住多少？