数学解题思维策略

——波利亚著作选讲

刘云章　赵雄辉　编

湖　南　教　育　出　版　社

数学解题思维策略

——波利亚著作选讲

刘云章　赵雄辉　编

责任编辑：胡　坚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

850×1168毫米　32开　印张：5.5　字数：130,000

1992年1月第1版　　1992年1月第1次印刷

印数：1—1,500

ISBN 7—5355—1386—7/G·1381

定　价：2.55元

前　　言

数学教育正处于空前的兴旺时期，越来越多的问题需要我们去探索研究，如何提高学生的数学素质，如何解答无穷无尽的数学问题，如何开发学生的非智力因素领域，如何培养学生创造性思维能力，如何对待升学考试，……对于这些问题，“本世纪最伟大的数学教育思想家”乔治·波利亚的著作堪称为“行动纲领”。

徐利治先生曾指出：我们要培养和造就一批波利亚型的数学工作者，要按照波利亚的思想改革数学教材和教学方法。数学专业的每个大学生、每个学者，特别是每个教师都应该读波利亚的书。然而，众多渴望学习波利亚理论的读者未能购全也难以详细阅读波利亚的数百万字的论著。有鉴于此，我们撰写了本书，旨在让广大师生、数学爱好者尽快地了解波利亚数学教育理论梗概。

本书以波利亚的名著《怎样解题》、《数学与合情推理》、《数学的发现》三套书为主要材料，同时参考了波利亚的有关论文，从中精选适合我国中学教育实际的内容，删去了大部分高等数学例题和习题，并给予必要的补充和解说。全书共分为六章，第一章介绍极富盛名的“怎样解题“表；第二章介绍诱发灵感的探索法；第三章是六个常用的数学解题模式，重在突出模式的形成过程；第四章对解题过程中的思维活动作一般分析，给出思想方法上的普遍结论；第五章讲解了几个最典型合情推理的特点和模式，并就它们的综合运用和教学艺术作了讨论；第六章集中讲述波利亚的数学教育观点和教师培训方案。另外，在书的末尾介绍了波利亚的生平和数学教育论著的大致情况，供进一步研究波利亚理论

的读者参考。

本书为波利亚著作“选讲”，其理论都来自于波利亚原著，例题和分析力求保持波利亚风格，但其中也不乏作者自己的观点和态度，不当之处，敬请读者指正。

作者

1991．7．

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　波利亚的解题表

波利亚认为，任何学问都包括知识和能力这两个方面．对于数学，能力比起仅仅具有一些知识来，要重要得多．因此，“学校的目的应该是发展学生本身的内蕴能力，而不仅仅是传授知识”．

在数学学科中，能力指的是什么？波利亚说：“这就是解决问题的才智——我们这里所指的问题，不仅仅是寻常的，它们还要求人们具有某种程度的独立见解、判断力、能动性和创造精神．”因此，他提出：“中学数学教学首要的任务就是加强解题的训练．”

波利亚发现，在日常解题和攻克难题而获得数学上的重大发现之间，并没有不可逾越的鸿沟．他说：“一个重大的发现可以解决一些重大的问题，但在求解任何问题的过程中，也都会有点滴的发现．”“一个有意义的题目的求解，为解此题所花的努力和由此得到的见解，可以打开通向一门新的科学，甚至通向一个科学新纪元的门户．”要想有重大的数学发现，就必须重视平时的解题，因为平时的解题和数学发现之间，只有难易程度上的差别，在本质上是完全一样的．“你要求解的问题可能不大，但如果它能引起你的好奇心，如果它能使你的创造才能得以展现，而且，如果你是用自己的方法去解决它们的，那么，你就会体验到这种紧张心情，并享受到发现的喜悦．在易塑的青少年时期，这样的体验会使你养成善于思维的习惯，并在你心中留下深刻的印象，甚至会影响到你的一生的性格．”

波利亚的“解题”不同于“题海战术”．他认为，一个数学教师，如果“把分配给他的时间塞满了例行运算来训练他的学生，

他就扼杀了学生的兴趣，妨碍了他们的智力发展…”。因此他主张，与其穷于应付繁琐的教学内容和过量的题目，还不如选择一个有意义但又不太复杂的题目，去帮助学生深入发掘题目的各个侧面，使学生通过这道题目，就如同通过一道大门而进入一个崭新的天地。比如，“证明$\sqrt{2}$是无理数”和“证明素数有无限多个”就是这样的好题目，前者通向实数的精确概念，而后者是通向数论的门户，打开数学发现大门的金钥匙往往就在这类好题目之中。

数学有两个侧面，一方面，已严格地提出来的数学是一门系统的演绎科学，另一方面，在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学。波利亚指出，通过研究解题的方法，我们可以看到数学的第二个侧面，也就是可以看到“处于发现过程中的数学”。

波利亚把“解题”作为培养学生的数学才能和教会他们思考的一种手段和途径。这种思想得到了国际数学教育界的广泛赞同，1976年国际数学管理者委员会把解题能力列为十项基本技能的首位，美国数学教师联合会理事会把解题提到了“80年代学校数学的核心”这一高度。

过去，国内外有关学习数学的著作和习题集基本上偏重于解决个别类型的问题，例如算术问题、几何问题、代数问题等，但是很少涉及解题的一般方法。然而，“学生熟悉了解答个别类型问题的特殊方法以后，有可能只限于掌握一种千篇一律的死板方法而并不具备独立解决新问题的本领。”波利亚的《怎样解题》就弥补了这一空白，这本书给出了求解数学问题的一般方法，并且介绍了讲授解题的一些经验。著名的现代数学家瓦尔登在1952年2月2日瑞士苏黎世大学的会议致词中就曾说过：“每个大学生、每个学者，特别是每个教师都应该读这本引人入胜的书”，对这本书给予了高度的评价。今天人们公认，在数学解题研究方面，波利亚是一面旗帜，他作出了划时代的贡献。

§1 “怎样解题”表

波利亚认为，学生除必须掌握逻辑分析方法外，还必须掌握探索性思维方法。波利亚致力于探索解题过程的一般规律，将他自己数十年的教学与科研经验集中具体地表现在如下的解题表上：

“怎样解题”表

第一　你必须弄清问题

弄 清 问 题

未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？满足条件是否可能？要确定未知数，条件是否充分？或者它是否不充分？或者是多余的？或者是矛盾的？

画张图，引入适当的符号。

把条件的各个部分分开，你能否把它们写下来？

第二　找出已知数与未知数之间的联系

如果找不出直接的联系，你可能不得不考虑辅助问题。你应该最终得出一个求解的计划。

拟 定 计 划

你以前见过它吗？你是否见过相同的或形式稍有不同的问题？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其它数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者二者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

第三　实行你的计划

实 现 计 划

实现你的求解计划，检验每一步骤。

你能否清楚地看出这一步骤是正确的？你能否证明这一步骤是正确的？

第四　验算所得到的解。

回　　顾

你能否检验这个论证？你能否用别的方法导出这个结果？你能不能一下子看出它来？

你能不能把这结果或方法用于其它的问题？

§2 “怎样解题”表的特点

波利亚认为，教师对学生的帮助最好是顺乎自然。教师对学生应当设身处地，应当了解学生的情况，应当弄清学生正在想什么，并且提出一个学生自己可能会产生的问题，或者指出一个学生自己可能会想出来的步骤。

在“怎样解题”表中，波利亚按照逻辑思维的顺序和出现可能性大小的顺序搜集了一系列公式化了指导性意见，提出的方式

也十分灵活，有时用建议的口气，有时则用引导性问题的办法，尽量顺乎自然，使学生感到这些意见真是说到他们的心坎上，就是他们自己所要说的话。从教育心理学上来看，这张表的确是十分可取的，利用这张表教师可以行之有效地指导学生自学，发展学生独立思考和进行创造性活动的能力，正如波利亚所说："读者充分熟悉这张表并且看出在建议之后所应采取的行动，他会感到这张表中所间接列举的是对解题很有用的典型思维活动，这些思维活动在表中的次序是按其发生的可能性大小排列的"。

"怎样解题"表的特点之一是具有普遍性。表中的指导性意见，不仅适用于"不太能够独立工作"的人，而且适用于那些能独立解题的人；不仅适用于数学学科而且可适用于其它学科。例如：未知数是什么？已知数是什么？条件是什么？这些问题都是普遍适用的，对于所有各类问题，我们提出这些问题都会取得良好效果。它们的用途不限于任何题目，其问题可以是代数的或几何的，数学的或非数学的，理论的或实际的，一个严肃的问题或仅仅是个谜语，这没什么差别，上述问题都是有意义的，而且有助于我们解题。

"怎样解题"表中的另一个特点是具有常识性。表中的所有问题与建议都是简单的、显而易见的，并且来自于普通常识。波利亚这张表把常识概括地加以叙述，表中所提出的处理办法对那些认真对待其问题并有某些常识的人来说是很自然的，然而按正确道路行动的人往往不注意用明确的语言来表达其行动，波利亚这张表却尝试去表达这些。

"怎样解题"表风靡全球。经验证明，适当使用表中的问题与建议，常能对学生有所帮助。由于此表来源于普通常识，所以显得很自然，学生自己也会提出这类问题，又因此表具有普遍性，所以它对学生的帮助并非强加于人。这些表只是指导"游泳"的纲领，"游泳"还靠学生自己。"题海"是客观存在，我们应该研究对付"题海"的战术。波利亚的"解题表"堪称"题海游泳术"的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

纲领，教师吃透了这张表并教会学生，就能引导学生到“题海”畅游，而不再是望题兴叹。

波利亚指出，指引人们去解答所有可能的数学问题的这种放之四海皆准的发明创造规律是不存在的，“合理的探索法不能以万灵规律为目标，但它可以努力研究在解题中典型而有用的做法（智力活动，策略，步骤）。”收集一些典型的问题与建议并使其具有充分的普遍性，并且安排简洁得体，这虽不及点金石那样使人向往，但却切实可行。波利亚的“怎样解题”表就是这样的内容。

§3 “表”的主要部分及主要问题

波利亚把数学题的求解过程分为四个阶段；把“怎样解题”表中的问题与建议分成了四组。首先，我们必须了解问题必须清楚地看到要求的是什么？其次，我们必须了解各个项之间有何联系？未知数和数据之间有什么关系？为了得到解题的思路，应该制订一个计划。第三，实现我们的计划，第四，回顾所完成的解答，对它进行检查和讨论。

上述每一阶段都有其重要性。可能会有这样的情况：一个学生想出了一个异常好的念头，于是跳过所有的预备步骤，答案就脱口而出了，如此幸运的念头当然是求之不得的，但是也可能发生很不如愿和很不走运的事，学生通过上述四阶段中的任何一个阶段都没有想出好念头。还有更糟糕的是学生并没有理解问题就进行演算或作图。一般说来，在尚未看到主要联系或者尚未作出某种计划的情况下，去处理细节是毫无用处的。如果学生在实行其计划的过程中检查每一步，就可以避免许多错误。如果学生不去重新检查、考虑已完成的解答，则可能失去最好效果。

第一阶段　弄清问题

波利亚强调：“回答一个你尚未弄清的问题是愚蠢的，去做一件你不愿干的事是可悲的。”学生应当弄清问题，然而他不仅应当

弄清它，而且还渴望解出它.如果学生对问题没弄清或不感兴趣，这并不是他的过错，问题应当精选，所选的题目不宜太难但也不要太易，应顺乎自然而且趣味盎然，并且有时在叙述方式上也应当自然而有趣。

首先，必须了解问题的文字叙述．教师在某种程度上可检查这一点，他可以要求学生重新叙述这题目，而学生应能流利地重新叙述这个问题．学生还应当能够指出问题的主要部分，即未知数、已知数据、条件．所以老师提问时，不要错过这样的问题：未知数是什么？已知数据是什么？条件是什么？

学生应当仔细地、重复地并且从各个方面来考虑问题的主要部分．如果问题和某一图形有关，那么他应该画张图并在上面标出未知数与已知数据．如果对这些对象需要给以名称，他应该引入适当的符号．适当地注意选择符号，他就会被迫考虑这些必须选择符号的对象，在此预备阶段中，假定我们并不期望有一个明确的回答，而只不过想有一个临时性的回答或一个猜测，那么另外还有一个问题可能是有用的，即：满足条件是否可能呢？

例1　已知长方体的长、宽、高，求其对角线长度．

为对此问题作有益的讨论，学生必须熟悉勾股定理及其在平面几何中的某些应用，他们对立体几何可能只有很少的系统知识．教师这时可以依赖学生对空间关系的朴素知识．通过使问题具体化而使之有趣．如教室就是个长方体，其长度可以测量，也可估计，要求学生不作测量，间接地求出教室的对角线长度．教师指出教室的长、宽、高，用手势说明什么是对角线，通过不断地和教室相联系而使画在黑板上的图变得更加形象。

以下是老师与学生的对话：

“未知数是什么？”

“长方体对角线的长度。”

“已知数是什么？”

“长方体的长、宽、高。”

“引入适当的符号，用哪个字母表示未知数？”

“x”

“长、宽、高应选哪些字母？”

“a、b、c”

“联系a、b、c与x的条件是什么？”

“x是长方体的对角线，长方体的长、宽、高为a、b、c”

“这是个合理的问题吗？我意思是说，条件是否充分，足以确定未知数吗？”

“是的，是充分的。如果我们知道a、b、c，我们就知道长方体，如果长方体被确定，则对角线也被确定了。”

第二阶段　拟定计划

当我们知道，或大体上知道，为了求解未知数，必须完成哪些计算、要作哪些图的时候，我们就有了一个计划。从弄清问题到想出一个计划，其过程可能是曲折的。事实上，求解一个问题的主要成绩是构想出一个解题计划的思路，这个思路可能是逐渐形成的。或者，在明显失败的尝试和一度犹豫不决之后，突然冒出一个“好念头”。老师为学生所能做的最大的好事是通过比较自然的帮助，促使他自己想出一个好念头。我们下面要讨论的问题与建议正是要诱发这样一种好念头。

为了弄清学生的心理活动，老师应当回想他自己的经验，回顾他自己在解题时碰到的困难与取得成功的经验。

我们当然知道，如果我们对该问题知识贫乏，是不容易产生好念头的；如果我们完全没有知识，则根本不可能产生好念头。一个好念头的基础是过去的经验和已有的知识，仅仅靠记忆不足以产生好念头。解决数学问题所必需的材料是我们早已获得的数学知识的某些有关内容，如以前解决的问题，以前证明过的定理。因此，以“你知道一个与此有关的问题吗？”为题开展讨论较为合适，但其困难就在于，通常有相当多的问题与我们现在手上的问题有关。

我们怎样挑出其中一个或几个确实有用的问题呢？我们建议把力量放在主要的共同之处上：看着未知数！试想起一个具有相同或相似未知数的熟悉的问题来。

上述问题，如能很好地理解和认真地加以考虑，常常有助于激发起一连串正确的想法，但它们并非总是有用的。如果这些问题不行，我们必须寻找某些其它的适当接触点，并且探索问题的各个方面；我们不得不变化、变换、修改该问题。你能否重述这个问题？"怎样解题"表中的某些问题提示了改变问题的专门方法，例如普遍化、特殊化、应用类比、舍去一部分条件等等。改变问题可能导致提出某种适当的辅助问题：如果你不能解决所提出的问题，则应首先尝试去解决某些与此有关的问题。

尝试去应用各种已知的问题或定理，考虑各种修改，对各种辅助问题进行试验，我们可能离开原来的问题太远，甚至最后有失掉它的危险。但是还有一个很好的问题可以把我们带回原处，即"你是否用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？"

例2 我们继续考察例1.

"你是否知道一个与此有关的问题？"

……

"看着未知数，你是否知道一个具有相同未知数的问题？"

……

"好，未知数是什么？"

"长方体的对角线"

"你是否知道任何具有相同未知数的问题？"

"不，我们还没有任何关于长方体对角线的问题"

"你是否知道任何具有相似未知数的问题？"

……

"你看，对角线是条线段，就是直线的一段。你从来没有解过一个未知数是直线长度的问题？"

"我们曾经解决过这样的问题，例如找出直角三角形的一边"

“好！这里有一个和你的问题有关的问题，且早已解决，你能利用它吗？”

……

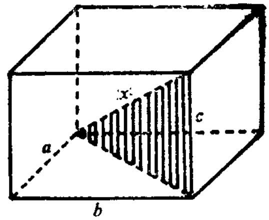

图1—1

“你真不错，想起了一个与你当前问题有关的问题，而且这个问题你以前已经解决了。你愿意利用它吗？为了能利用它，你能否引进某个辅助元素？”

“看这里，你所想起的是一个关于三角形的问题.图中有三角形吗？”

我们希望这最后的提示已明白得足以诱发出解题的思路（即引入一个在图1—1中用阴影标出的直角三角形）.这个引入的直角三角形的斜边就是我们所要求的对角线。但是教师应当对下述情况有所准备：即使这样明白的提示也不能使学生开窍，那么他应当动用更明显的提示。

“你是否希望在图1—1中有个三角形？”

“在图中，你希望有哪种三角形？”

“你现在还不能求出这对角线；但你能求出三角形的一条边。那么现在你该怎么办呢？”

“如果对角线是三角形的一条边，你能找出它吗？”

经过或多或少的帮助后，学生终于成功地引进了决定性的辅助元素，即图中阴影三角形，在鼓励学生进入实际计算之前，教师应确信其学生对问题的理解已有足够的深度。

“我想，画出那个三角形是个好主意，你现在有了个三角形，但是你是否有未知数？”

“未知数是三角形的斜边，我们可用勾股定理去计算它。”

“如果两边为已知，你会计算.但它们是已知的吗？”

“一个边已给定，是c。另一个边，我想也不难求出。是的，另一边是另一个直角三角形的斜边。”

“很好！现在能看出你有个计划了。”

第三阶段 实现计划

想出一个计划，产生一个求解的念头是不容易的。要成功，需要有许多条件，如已有的知识、良好的思维习惯、目标集中，还要有好运气。但实现计划则容易得多，我们所需要的主要是耐心。

计划仅给出一个一般性的大纲，我们必须充实细节并耐心地检查每一个细节，直到每一点都完全清楚了，没有任何可能隐藏错误的含糊之处为止。

如果学生真的拟定出一个计划，则教师就比较清闲了。现在的主要危险是学生可能忘记他的计划，因为那些从外界接受计划的和根据教师的权威来采纳某个计划的学生，很容易发生这种现象；但若是学生自己搞出来的计划（即便经过某种帮助）并且学生满意地看出了最终的思路，则他就不那么容易忘记。教师必须坚持让学生检查每一步骤。

根据“直观”或“形式”上的论证，我们可以使自己相信每一步骤的正确性。我们可以集中力量在有问题的疑点上，直到问题完全搞清楚，毫不怀疑每一步骤都是正确的为止；或者我们可以根据形式推理的法则推导出有问题的这一点。

主要之点是：学生应当确信每一步骤的正确性。在某些情况老师可以强调“看出来”与“证明”二者之间的差别而提出：你能清楚地看出这一步骤是正确的吗？同时你也能证明这一步骤是正确的吗？

例3 我们继续考察例2。

学生最后得到了解题的思路。他看出未知数 x 是直角三角形的斜边，而给定的高度c是边长之一，另一边则是长方体的一个面的对角线。很可能这时学生会引入一个适当的符号，选择y表示另一边，即面上的对角线，其两边为a和b。学生现在可能看得更清楚：解题的思路就是应该引进一个辅助未知数y。最后，陆续对这两个直角三角形进行考虑之后，得到

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com