新编奥林匹克数学竞赛指导

（高　中）

主　编　葛　军

副主编　宋数山　董林伟

编　著　（以姓氏笔划为序）

陈云楼　吴　彤　张志朝　宋数山

雍峥嵘　翁玉中　徐　杰　康达军

葛　军　董林伟　缪继高

南京师范大学出版社

新编数学奥林匹克竞赛指导(高中)
葛　军　主编
*
南京师范大学出版社出版发行
(江苏省南京市宁海路 122 号　　邮编 210097)
江苏省新华书店经销　　常熟市印刷七厂印刷
*
开本 850×1168 毫米　1/32　　印张 18.375　　字数 500 千
1997 年 8 月第 1 版　　1997 年 8 月第 1 次印刷
印数 1－20,000
ISBN 7－81047－125－2/G·79
定价：15.80 元
(南京师大版图书若有印、装错误可向承印厂退换)

前　言

中学数学竞赛的宗旨是激发学生学习兴趣，拓宽思路，发展智力，培养优秀苗子。

我们依照上述宗旨，立足基础，面向普及，编写了《新编奥林匹克数学竞赛指导》一书。本书共有三十五讲，每讲由知识概要、解题指导、巩固练习、解答提示四部分组成。每讲内容的编写侧重于基本知识、基本思想方法与基本技巧的灵活运用。本书精心选择例题，并努力做到推陈出新，例题编排由易到难，由浅入深，前三分之二的例题难度相当于高考中档以上试题和全国高中数学联赛中档以下试题，后三分之一的例题难度相当于全国高中数学联赛中档以上试题或中国数学奥林匹克竞赛(CMO)及国际数学奥林匹克竞赛(IMO)试题。

本书的编写者们都是具有数学竞赛教学、训练经验的优秀骨干教师，多年的辛勤耕耘，取得了累累硕果：所培训的学生中先后有近一百名同学取得了全国高中数学联赛的一等奖；有十多名同学取得了中国数学奥林匹克竞赛的优胜奖，1997年某中学就有三人同时获得该奖，且均进入国家集训队；还有同学取得了国际数学奥林匹克竞赛的金牌。

囿于水平及时间，书中错误与不妥之处仍难完全避免，敬请读者不吝指正。

编　者

1997年8月

目　　录

前言
第 1 讲　集合与容斥原理 …… (1)
第 2 讲　函数概念 …… (19)
第 3 讲　函数的性质与图像 …… (36)
第 4 讲　函数方程 …… (52)
第 5 讲　三角函数性质及其应用 …… (66)
第 6 讲　三角恒等变形 …… (83)
第 7 讲　多项式 …… (99)
第 8 讲　数列(一) …… (111)
第 9 讲　数列(二) …… (126)
第 10 讲　复数(一) …… (144)
第 11 讲　复数(二) …… (157)
第 12 讲　平面几何(一) …… (173)
第 13 讲　平面几何(二) …… (201)
第 14 讲　平面几何(三) …… (226)
第 15 讲　立体几何(一) …… (250)
第 16 讲　立体几何(二) …… (268)
第 17 讲　直线 …… (287)
第 18 讲　二次曲线 …… (305)
第 19 讲　不等式(一) …… (326)
第 20 讲　不等式(二) …… (352)
第 21 讲　几何不等式 …… (377)
第 22 讲　排列与组合 …… (402)
第 23 讲　整除 …… (415)
第 24 讲　同余(一) …… (426)

第 25 讲　同余(二) …………………………………………………… (435)
第 26 讲　进位制 ……………………………………………………… (445)
第 27 讲　高斯函数 …………………………………………………… (455)
第 28 讲　不定方程 …………………………………………………… (465)
第 29 讲　组合恒等式 ………………………………………………… (473)
第 30 讲　对应与计数 ………………………………………………… (485)
第 31 讲　格点问题 …………………………………………………… (499)
第 32 讲　染色问题 …………………………………………………… (513)
第 33 讲　存在性问题 ………………………………………………… (532)
第 34 讲　简单的组合几何问题 ……………………………………… (543)
第 35 讲　简单的图论问题 …………………………………………… (565)

第1讲　集合与容斥原理

【知识概要】

一、集合及其基本概念

1. 集合的概念

(1)集合是数学中的一个不定义概念.它可以用一句话来进行描述,即“一组对象的全体称为集合”,其中的对象称为集合的元素.

并非所有的形如“×××的全体”就可组成集合,它必须满足以下三个方面:

1°　集合中的元素是确定的,即元素的确定性.例如“高个子人的全体”就不能形成集合,这是因为“高个子”的标准是不确定的,无法确定某个人是或不是这个集合中的元素.

2°　集合中的元素是互异的.例如:方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集为$\{1\}$,而非$\{1,1\}$.

3°　集合中的元素是无序的.例如$\{1,-1\}$与$\{-1,1\}$是两相同集合.

(2)集合中的元素可以是有限的,也可以是无限的,我们分别称之为有限集和无限集.集合中也可以不含任何元素,我们称之为空集,记作$\varnothing$.

(3)集合中的元素可以是数,也可以是式,也可以是其它各种事物,甚至也可以是集合.例如:$\{x>1\}$是单元素集,$\{1,\{1\}\}$是双元素集.

(4)集合的表示方法有两种:列举法和描述法.

列举法是将集合中的元素一一列举,并用逗号分开,写在大括号内.

描述法是形如$\{P|P$ 所满足的条件$\}$.

2. 元素和集合的关系

元素和集合的关系是属于和不属于的关系，分别记作 $a\in A$ 或 $a\notin A$（有时记作 $a\overline{\in}A$）.

3. 集合与集合的关系

若 A 中元素都是 B 中元素，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. 若 $A\subseteq B$，且 B 中至少有一元素 $b\notin A$，则称 A 为 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$，即 A、B 两集合的元素完全一样.

集合与集合的关系，有如下性质：

1° $A\subseteq B$，$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subset B(B\neq\varnothing)$.

2° $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

3° $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$\overline{A}\cap B=I\Leftrightarrow A\subseteq B$.（"$\Leftrightarrow$"表示充分必要条件）

4° 若 A 中元素有 n 个，则 A 的子集共有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个.

4. 集合的运算

$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$；

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$；

$\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$.

关于集合运算有以下一些常用结论：

(1)等幂律：$A\cap A=A$，$A\cup A=A$.

(2)同一律：$A\cap I=A$，$A\cup I=I$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$.

(3)互补律：$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{I}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=I$.

(4)交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$.

(5)结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

(6)分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(7)吸收律：$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$.

(8)反演律：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

二、容斥原理

若记有限集合 A 中的元素个数为 $|A|$，则由文氏图(如图 1—1 所示).

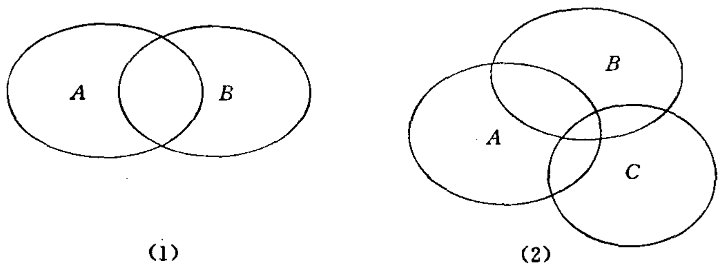

图 1—1

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$，

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

一般地，对于 n 个有限集合 S_1，S_2，…，S_n，则有

$$|S_1\cup S_2\cdots\cup S_n|=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|S_i\cap S_j\cap S_k|-\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}|+\cdots+(-1)^{n-1}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|,$$

其中符号 $\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}|$ 表示 S_1，…，S_n 中任取 k 个集合的交的元素个数的总和.

我们称上述公式为容斥原理.

我们可以用数学归纳法对此进行证明.

当 $n=2$ 时，显然成立.

假设命题对 $n-1$ 成立，需证命题对 n 也成立.

注意到 $S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_{n-1}\cup S_n=(S_1\cup\cdots\cup S_{n-1})\cup S_n$，由 $n=2$ 时的情形可知：$|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_{n-1}\cup S_n|=|S_1\cup\cdots\cup S_{n-1}|+|S_n|-|(S_1\cup\cdots\cup S_{n-1})\cap S_n|=|S_1\cup\cdots\cup S_{n-1}|+|S_n|-|(S_1\cap S_n)\cup\cdots\cup|S_{n-1}\cap S_n|$. ①

由归纳假设，对于 $n-1$ 个集合 $S_1\cap S_n$，$\cdots$，$S_{n-1}\cap S_n$，则有

$$\begin{aligned}&|(S_1\cap S_n)\cup(S_2\cap S_n)\cup\cdots\cup(S_{n-1}\cap S_n)|\\ &=|S_1\cap S_n|+|S_2\cap S_n|+\cdots+|S_{n-1}\cap S_n|-|(S_1\cap S_n)\cap(S_2\cap S_n)|-|(S_1\cap S_n)\cap(S_3\cap S_n)|-\cdots-|(S_{n-2}\cap S_n)\cap(S_{n-1}\cap S_n)|+\cdots+(-1)^{n-2}|(S_1\cap S_n)\cap(S_2\cap S_n)\cap\cdots\cap(S_{n-1}\cap S_n)|\\ &=|S_1\cap S_n|+|S_2\cap S_n|+\cdots+|S_{n-1}\cap S_n|-|S_1\cap S_2\cap S_n|-|S_1\cap S_3\cap S_n|-\cdots-|S_{n-2}\cap S_{n-1}\cap S_n|+\cdots+(-1)^{n-2}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|.\end{aligned}$$ ②

又由归纳假设，对于 $n-1$ 个集合 $S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$，有

$|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_{n-1}|=|S_1|+|S_2|+\cdots+|S_{n-1}|-|S_1\cap S_2|-|S_1\cap S_3|-\cdots-|S_{n-2}\cap S_{n-1}|+|S_1\cap S_2\cap S_3|+\cdots+|S_{n-3}\cap S_{n-2}\cap S_{n-1}|-\cdots+(-1)^{n-2}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_{n-1}|$ ③

把②、③代入①，整理得容斥原理.

容斥原理可有如下变形：

变形一：$|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n|=|I|-|S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n|$
$=|I|-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}S_i+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|-\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|S_i\cap S_j\cap S_k|+\cdots+(-1)^k\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}|S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\cdots\cap S_{i_k}|+\cdots+(-1)^n|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|$.

变形二：$|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k\cap\overline{S}_{k+1}\cap\cdots\cap\overline{S}_n|$
$=|\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i|-\sum\limits_{k+1\leqslant j\leqslant n}|\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i\cap S_j|+\sum\limits_{k+1\leqslant j<l\leqslant n}|\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i\cap S_j\cap S_l|+\cdots+(-1)^{h-k}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|$，其中 $\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i$ 表示 $S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k$.

证明：设 $K=\{1,2,\cdots,k\}$，$\overline{K}=\{k+1,k+2,\cdots,n\}$，且设 $I'=\bigcap\limits_{i\in k}S_i=\bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant k}S_i$，$S_j'=\bigcap\limits_{i\in k}S_i\cap S_j\subseteq I'(j\in\overline{K})$，利用变形一，以 I' 代替 I，S_j' 代替 S_j，于是有

$$\left|\bigcap_{j\in\overline{K}}\overline{S_j'}\right|=|I'|-\sum_{j\in\overline{K}}|S_j'|+\sum_{\substack{j,l\in\overline{K}\\ j\neq l}}|S_j'\cap S_l'|-\cdots+(-1)^{n-k}\left|\bigcap_{j\in\overline{K}}S_j'\right|$$

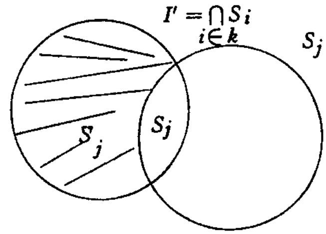

图 1—2

注意到 $\overline{S_j'}$ 是 S_j' 在 I' 中的余集（见图 1—2），它等于 $\bigcap\limits_{j\in k}S_j\cap\overline{S}_j$（符号 $\overline{S}_j$ 表示 S_j 在 I 中的余集，见下图）. 再根据集合的交的运算律，可得 $\bigcap\overline{S_j'}=\bigcap\limits_{i\in K}S_i\cap(\bigcap\limits_{j\in\overline{K}}\overline{S}_j)$.

再代入④得：

$$\left|\bigcap_{i\in K}S_i\cap(\bigcap_{j\in\overline{K}}\overline{S_j})\right|=\left|\bigcap_{i\in K}S_i\right|-\sum_{j\in\overline{K}}\left|\bigcap_{i\in k}S_i\cap S_j\right|+\sum_{\substack{j,l\in\overline{K}\\ l\neq j}}\left|\bigcap_{i\in k}S_i\cap S_j\cap S_l\right|+\cdots+(-1)^{n-K}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k\cap S_{k_n}\cap\cdots\cap S_n|$$

，即得结论.

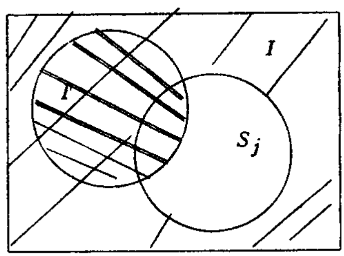

图 1—3

变形三：设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，K 是 N 的任意一个 K 元子集，$\overline{K}$ 是 K 在 N 中的余集，那么

$$\left|\bigcap_{i\in K}S_i\cap(\bigcap_{j\in\overline{K}}\overline{S_j})\right|$$
$$=\left|\bigcap_{i\in K}S_i\right|-\sum_{j\in\overline{K}}\left|\bigcap_{j\in\overline{K}}S_i\cap S_j\right|+\sum_{\substack{j,l\in\overline{K}\\ j\neq l}}\left|\bigcap_{i\in K}S_i\cap S_j\cap S_l\right|+\cdots$$
$$+(-1)^{n-k}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|.$$

证法同变形二.

由上述变形三可以证明如下性质（筛法公式）：

设 S_1、S_2、$\cdots$、S_n 是有限集 I 的 n 个子集，如果 $p_1=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i|$，$p_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|S_i\cap S_j|$，$p_3=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|S_i\cap S_j\cap S_k|$，$\cdots$，$p_n=|S_1\cap S_2\cap$

$+\cdots\bigcap S_n|$；$q_1=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\overline{S}_1\cap\cdots\cap\overline{S}_{i-1}\cap S_i\cap\overline{S}_{i+1}\cap\cdots\cap\overline{S}_n|$，$q_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\overline{S}_1\cap\cdots\cap\overline{S}_{i-1}\cap S_i\cap\overline{S}_{i+1}\cap\cdots\cap\overline{S}_{j-1}\cap S_j\cap\overline{S}_{j+1}\cap\cdots\cap\overline{S}_n|$，$\cdots$，$q_{n-1}=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_{i-1}\cap\overline{S}_i\cap S_{i+1}\cap\cdots\cap S_n|$，$q_n=|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|$，那么 $q_k=p_k-C_{k+1}^1p_{k+1}+C_{k+2}^2p_{k+2}-\cdots+(-1)^{n-k}C_n^{n-k}p_n$，其中 $k=1,2,\cdots,n$，$p_0=|I|$，$q_0=|\overline{S}_1\cap\overline{S}_2\cap\cdots\cap\overline{S}_n|$.

证明：因 q_k 表示 I 中的恰好属于 k 个子集 S_i 的元素的个数，因此，$q_k=\sum\limits_{K\subseteq N}|\bigcap\limits_{i\in K}S_i\cap(\bigcap\limits_{j\in K}\overline{S}_j)|(k=0,1,\cdots,n)$，其中 $\sum\limits_{K\subseteq N}$ 表示对 N 中所有 k 元子集 K 求和. 将变形三代入上式，整理得

$$q_k=\sum_{K\subseteq N}|\bigcap_{i\in k}S_i|-\sum_{K\subseteq N}\sum_{\substack{K\subseteq p\\|p|=K+1}}|\bigcap_{i\in P}S_i|+\sum_{K\subseteq N}\sum_{\substack{K\subseteq p\\|p|=K+2}}|\bigcap_{i\in p}S_i|+\cdots+(-1)^{n-k}\sum_{K\subseteq N}|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n|$$

$$=p_k-C_{k+1}^1q_{k+1}+C_{k+2}^2P_{k+2}-\cdots+(-1)^{n-k}C_n^{n-k}p_k$$

$(q=0,1,\cdots,n)$.

显然 $k=0$ 时，就是变形一.

【解题指导】

例 1 设 $A=\{x|x=a^2+b^2,\ a,\ b\in Z\}$，$x_1,x_2\in A$，求证：$x_1\cdot x_2\in A$.

分析：集合 A 是一切可以表示成两个整数平方和的整数的全体，故只要证明 $x_1\cdot x_2$ 可以表示成为两个整数的平方和.

证明：设 $x_1=a^2+b^2$，$x_2=c^2+d^2$，$(a,\ b,\ c,\ d\in Z)$，则 $x_1\cdot x_2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$.

又 $a,b,c,d\in Z$，故 $ac+bd,bc-ad\in Z$，从而推得 $x_1\cdot x_2\in A$.

例 2 已知 $A=\{x|x^2+px+q=0,\ x\in\mathrm{R}\}$，$B=\{x|x^2-3x+2=0,x\in\mathrm{R}\}$，且 $A\cap B=A$，求 p、q 的值或关系式.

分析：要求 p、q 的关系式，必须知道 A 中的元素是什么？由 $A\cap B=A$ 可知 $A\subseteq B$，而 B 中的元素是 1 和 2. 故若知 A 则结论也知.

解：由题意知 $B=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

由 $A\cap B=A$ 得 $A\subseteq B$，故 $A=\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$或$\{1,2\}$.

当 $A=\varnothing$ 时，方程 $x^2+px+q=0$ 无实根，则 $\Delta=p^2-4q<0$，即 $p^2<4q$；

当 $A=\{1\}$时，方程 $x^2+px+q=0$ 有重根 1，则 $p=-2,q=1$；

当 $A=\{2\}$时，方程 $x^2+px+q=0$ 有重根 2，则 $p=-4,q=4$；

当 $A=\{1,2\}$ 时，方程 $x^2+px+q=0$ 有两根 1 和 2，则 $p=-3,q=2$.

例 3　设 $a,b\in\mathrm{R}$，$A=\{(x,y)|x=n,y=an+b,n\in Z\}$，$B=\{(x,y)|x=m,y=3m^2+15,m\in Z\}$，$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 144\}$是平面 xOy 的集合. 讨论是否存在 a 和 b，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，且$(a,b)\in C$.

分析：这是讨论存在性的问题，可先假设存在实数 a、b 使结论成立，找出结论成立的必要条件. 如果存在，再证明它的充分性.

解法一：如果存在实数 a 和 b 使得 $A\cap B\neq\varnothing$ 成立，那么，就一定存在整数 m，n 使得$(n,na+b)=(m,3m^2+15)$，即

$$n=m,na+b=3m^2+15.$$

也就是存在整数 n，使得 $na+b-(3n^2-15)=0$.

如果存在实数 a 和 b，使得$(a,b)\in C$，那么必有 $a^2+b^2\leqslant 144$.

因此，实数 a,b 满足的充要条件是

$$\begin{cases} na+b-(3n^2+15)=0 \quad (n\in Z), & ④ \\ a^2+b^2\leqslant 144. & ⑤ \end{cases}$$

④式表明点 $P(a,b)$在直线 l：$nx+y-(3n^2+15)=0$ 上，设原点到直线 l 的距离为 d，于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}=3\sqrt{n^2+1}+\frac{12}{\sqrt{n^2+1}}\geqslant 12,$$等号只在 $n^2=3$ 时成立. 而 $n\in Z$，故 $n^2\neq 3$. 所以上式等号不可能成立，即 $d>12$.

因为点 P 在直线 l 上，点 P 到原点的距离 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant d>12$，这使 $a^2+b^2\leqslant 144$ 不可能成立.

所以不存在实数 a 和 b 使④、⑤同时成立.

解法二:由解法一中④式,得 $b=3n^2+15-an$,代入⑤式,并整理成关于 a 的不等式

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leqslant 0,$$

它的判别式 $\Delta=-36(n^2-3)^2$.

由于 $n\in Z, n^2-3\neq 0$,则 $\Delta<0$. ⑥

又 $1+n^2>0$,故不可能存在实数 a,使⑥式成立. 这表明不存在实数 a 和 b 使④、⑤同时成立.

解法三:如果存在实数 a 和 b 满足题意,由解法一中④式知,必存在整数 n,使 $3n^2-an-(b-15)=0$.

于是,它的判别式 $\Delta=a^2+12b-180\geqslant 0$,即 $a^2\geqslant -12(b-15)$. 而由式⑤得 $a^2\leqslant 144-b^2$,所以 $144-b^2\geqslant -12(b-15)$,即 $(b-6)^2\leqslant 0$,得 $b=6$.

当 $b=6$ 时,$a^2\leqslant 144-b^2$ 中等号也应成立,于是 $a^2\leqslant 108$;而 $\Delta\geqslant 0$ 即为 $a^2\geqslant 108$,所以 $a^2=108$,此时 $\Delta=0$,$n=\dfrac{a}{6}=\pm\sqrt{3}$ 不是整数,所以不存在实数 a 和 b 使④、⑤同时成立.

说明:这里的三种解法是出于对条件④和⑤的不同的处理手法,特别是对④式的不同认识.

将 a、b 看成坐标变量 (a,b),④式就成了直线方程,$\sqrt{a^2+b^2}$ 就成了直线上的点到原点的距离,于是就有了解法一.

把④式中的 n 看成未知数,就成了关于 n 的一元二次方程 $3n^2-an-(b-15)=0$,由 $\Delta\geqslant 0$,得到了关于 a、b 的又一限制条件,结合⑤找出了矛盾,这就是解法二.

由于④、⑤是对三个字母 a、b、n 的两个限制条件,消去一个字母(消去 b 较方便)就得到两个字母的不等式;再将这两个字母中的 a 看成未知数,就得到了关于 a 的不等式,利用一元二次不等式有解的条件得到了关于一个字母 n 的限制条件,最后找出了矛盾. 这就是解法三.

解题时，要注意字母的个数、方程(不等式)的个数以及由此导致的可能结果；还要注意常量与变量的辩证关系.

例 4 已知集合 S 中有 10 个元素，每个元素都是两位数，求证：一定可以从 S 中取出两个无公共元素的子集，使两个子集的元素和相等.

证明：因为 S 的子集个数为 $2^{10}=1024$ 个，而 S 的任一子集的各元素和$\leqslant 99\times 10=990<1024$，所以，由抽屉原理可知，必有两个子集 S_1、S_2 的元素和相等.

若 $S_1\cap S_2=\varnothing$，命题得证；

若 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$，则设 $S'_1=S_1\cap\overline{S_1\cap S_2}$，$S'_2=S_2\cap\overline{S_1\cap S_2}$得 $S'_1\cap S'_2=\varnothing$，命题得证.

例 5 计算不超过 120 的合数和素数的个数.

分析：因 $11^2=121>120$，所以不超过 120 的合数必是 2，3，5，7 的倍数，所以只要分别计算不超过 120 的 2，3，5，7 的倍数的个数. 利用容斥原理可知结果.

解：设 $S_1=\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 120,\ 2\mid a\}$，$S_2=\{b\mid 1\leqslant b\leqslant 120, 3\mid b\}$，$S_3=\{c\mid 1\leqslant c\leqslant 120, 5\mid c\}$，$S_4=\{d\mid 1\leqslant d\leqslant 120, 7\mid d\}$，则

$|S_1|=[\frac{120}{2}]=60$，$|S_2|=[\frac{120}{3}]=40$，$|S_3|=[\frac{120}{5}]=24$，$|S_4|=[\frac{120}{7}]=17$，且有 $|S_1\cap S_2|=[\frac{120}{2\times 3}]=20$，$|S_2\cap S_3|=[\frac{120}{2\times 5}]=12$，$|S_1\cap S_4|=[\frac{120}{2\times 7}]=8$，$|S_2\cap S_3|=[\frac{120}{3\times 5}]=8$，$|S_2\cap S_4|=[\frac{120}{3\times 7}]=5$，$|S_3\cap S_4|=[\frac{120}{5\times 7}]=3$，$|S_1\cap S_2\cap S_3|=[\frac{120}{2\times 3\times 5}]=4$，$|S_1\cap S_2\cap S_4|=[\frac{120}{2\times 3\times 7}]=2$，$|S_2\cap S_3\cap S_4|=[\frac{120}{2\times 5\times 7}]=1$，$|S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4|=[\frac{120}{2\times 3\times 5\times 7}]=0$.

由容斥原理可知 $|S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4|=92$，而 2，3，5，7 也在 92 个数之中，它们都不是合数，故合数为 $92-4=88$(个).

又 1 不是素数，故素数个数为 $120-88-1=29$(个).

例 6 由 1,2,3 组成的 n 位数，要求 n 位数中 1,2 和 3 每一个至少出现一次，求所有这种 n 位数的个数.

解：设所有由 1,2,3 组成的 n 位数的集合记作全集 S，则 $|S|=3^n$. S 中不含 $i(i=1,2,3)$ 的 n 位数的集合记作 A_i，则 $|A_i|=2^n$，$|A_i\cap A_j|=1$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$，$i\neq j,i,j=1,2,3$. $\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$ 为 S 中同时含有数字 1,2,3 的 n 位数全体的集合. 由容斥原理知

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=|S|-[|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|],$$

则 $$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=3^n-3\cdot 2^n+3.$$

说明：一般来说，问题中若出现"至少"，"一定"，"不可能"等字词时，可考虑问题的反面. 本题中，若考虑直接分析 n 位数中 1,2,3 出现的次数就很复杂. 由于它的反面仅是一些特殊情形，故可利用它的反面(补集)去求得正面问题的解决，这运用了"正难则反"的解题策略.

例 7 证明：一个有限集的全体子集，可以用如下方式排成一行：

(1)居行中第一位是空集；

(2)每个子集恰好在此行中出现一次；

(3)每个子集中的元素或者是前一个子集添加一个元素或删去一个元素所得.

解：我们可以先观察特殊情形：

当 $n=1$ 时，显然可以排成：$\varnothing,\{1\}$；

当 $n=2$ 时，子集共有 $2^2=4$ 个，可排成 $\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2\}$；

当 $n=3$ 时，子集共有 $2^3=8$ 个，不难排出如下一列子集：

$\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2\},\{2,3\},\{3\},\{3,1\},\{1,2,3\}$；

或：$\varnothing,\{1\},\{1,2\},\{2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,3\},\{3\}$.

从后一种情形发现，若将后四个子集中的元素 3 删去，正好是前四个子集的一种逆排列，这种规律在 $n=2$ 时也正是如此.

现以这种规律来看 $n=4$ 时的情形：

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{1,2\}$，$\{2\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,3\}$，$\{3\}$，$\{3,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{2,4\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,4\}$，$\{4\}$.

于是，假设 $n=k$ 时，已将其 2^k 个子集按题设要求排成一列，那么当 $n=k+1$ 时，只须在已排好的 2^k 个子集中，分别添加元素 $k+1$，逆序排在这 2^k 个子集的后面形成 $n=k+1$ 的 2^{k+1} 个子集的一种符合要求的排列.

说明：一个复杂的问题，也许一时找不到突破口，我们可以将其退化成一个简单的问题或者特殊问题，从中发现规律或者方法，从而找到一般问题的解法. 这运用了“进难则退，以退为进”的解题策略.

例 8　有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素.

解：显然可以由题设找到这样的 1987 个集合，它们都含有一个公共元素 a，而且每两个集合不含 a 以外的公共元素.

但是，是否仅这一种可能性呢？

由任意两个集合的并集有 89 个元素可知，1987 个集合中的任意两个集合有且只有一个公共元素，则容易证明这 1987 个集合中必有一个集合中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中，设为 $A_1,A_2,\cdots,A_{46}$，其余的设为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1986}$.

设 B 为 $A_{46},\cdots,A_{1986}$ 中的任一个集合，且 $a\notin B$，由题设 B 和 $A,A_1,A_2,\cdots,A_{45}$ 都有一个公共元素，且此 46 个元素各不相同，故 B 中有 46 个元素，与题设矛盾. 所以这 1987 个集合中均含有 a.

故所求结果为 $1987\times44+1=87429$，即这 1987 个集合的并集有 87429 个元素.

说明：这是一种“先猜后证”的解题策略. 由题设容易设计一种特殊情形，再排除其他类型的可能性，从而达到了目的.

例 9　对于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 及其每一非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按顺序递减排列该集合子集中的数，然后从最

大数开始交替减加后继的数得交替和(例如$\{1,3,8\}$的交替和为:$8-3+1=6$).对$n=8$,求所有子集的"交替和"的总和.

解:把$\{1,2,\cdots,n\}$所有子集包括本身和空集分为两类:M和N,把所有含元素n的子集归入M,不含n的归入N,则对M中的一个子集$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k,n\}$,$N$类中必有一子集$B=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$;反之亦然.而$A$的交替和为$x=n-a_k+a_{k-1}-\cdots$,$B$的交替和为$y=a_k-a_{k-1}+\cdots$,所以$x+y=n$,从而推得总交替和为$P=n\cdot\frac{2^n}{2}=n\cdot 2^{n-1}$.当$n=8$时,$P_8=8\times 2^{8-1}=1024$.

说明:对于$n=8$这个不大不小的数来说,要算出$2^8=256$个子集的交替和,也不是件易事.本题采用"一般化"方法,这是与"特殊化"的思路相反的一种方法,即将原问题变成一般问题,使得问题的求解过程不受具体数字的影响,并容易找到求解方法.

例10 集合Z由n个元素组成,Z中最多有多少个这样的3元子集,使得其中任意两个3元子集都恰好有一个公共元.

解:用k_n表示所求的数.设从集合Z中取出k_n个3元子集,其中任意两个都恰好有一个公共元,分三种可能情况:

(1)集合Z中的每个元素都至多出现在两个3元子集中.设$\{a,b,c\}$是其中一个3元子集,则其他任何一个3元子集都与$\{a,b,c\}$相交,而且所有其他子集中至多有一个含元素a,至多有一个含元素b,至多有一个含元素c.因此,子集最多有$1+3\times1=4$个,即$k_n\leqslant4$.

(2)集合Z中有一个元素出现在3个3元子集中,但集合Z的每一个元素至多出现在3个3元子集中,则设$\{a,b,c\}$是其中一个3元子集,于是其他任意一个子集都与它相交,而且所有其他子集中至多有两个集合包含元素a,至多有两个集合包含元素b,至多有两个集合包含元素c.因此,所有子集至多有$1+3\times2=7$个,即$k_n\leqslant7$.

(3)集合Z中含有元素a,它至少属于4个3元子集,则这4