高等代数习题解

上册

杨子胥 编

贾启恒
陈蒙恩 主审

山东科学技术出版社

高等代数习题解

上册

杨子胥　编

贾启恒
陈蒙恩　主审

山东科学技术出版社

一九八二年·济南

内 容 提 要

本书从多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、集合与映射、线性空间、线性变换、λ矩阵、欧氏空间等方面，精选了1100道典型性较强的习题，做了全面详细的解答，并注意了一题多解。每章习题之前都作了简要的概述。内容丰富，重点突出，解答明确，启发性强，尤其便于自学。可供高等院校师生、中学教师和广大数学爱好者学习参考。

出版说明

数学是一门重要的基础学科，它已广泛地应用于生产、科研等各个领域。随着科学的迅猛发展，高等数学只靠大学的课堂讲授已远远满足不了高速前进的时代需要。为配合自学成才和职工业余教育及在校师生的学习，满足广大有志者的急切需要，我们特编写了这本《高等代数习题解》。

本书从多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、集合与映射、线性空间、线性变换、λ矩阵、欧氏空间等方面，精选了1100道习题作了详细的解答。不少题作了一题多解。在编排上，注意了先后顺序和内容的衔接，避免了大幅度的跳跃。

本书概括了高等代数的主要内容。只要认真学习，既能巩固所学的基本概念，又可有效地提高运算能力和技巧，还可提高读者分析问题、解决问题的能力，是高等院校、电视大学、函授大学、职工业余大学的广大师生和中学教师、数学爱好者的一本理想的工具书。

在编写本书的过程中，我们特请贾启恒、李师正、陈蒙恩对全书作了重要仔细的审校，并增加了部分习题；孙宗明、倪炳华、王文省等也曾给予不少的帮助，特在此致谢。

目　　录

上　　册

下　册

第一章　数域上的一元多项式

§1·1 数环和数域

1° 若非空数集R中任两数的和、差、积均仍属于R，则称R是一个数环.

2° 设P是至少包含两个数的数集，如果P中任两数的和、差、积、商（除数不等于零）均仍属于P，则称P是一个数域.

3° 任何数域都包含有理数域.

1.证明：若数环$R\neq 0$，则R必为一个无限数集.

证 因为数环$R\neq 0$，则R必含有不等于零的数a.于是

$$2a=a+a,\ 3a=a+2a,\cdots$$

都属于R，且互不相等.因若有

$$ma=na,$$

则$(m-n)a=0$.但$a\neq 0$，故

$$m-n=0,\ 即m=n.$$

从而R必含有无穷多个数.

2.有没有不含非零整数的数环？如果有，举出实例；如果没有，加以证明.

解 有这样的数环．例如：

$$R=\{a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots+a_n\pi^n\},$$

其中a_1，a_2，…，a_n为任意整数，n为任意的正整数，π为圆

周率.

R显然作成一个数环.而且R不包含不等于零的整数. 若不然，设R含有非零整数a，则令

$$a=a_1\pi+a_2\pi^2+\cdots+a_n\pi^n,$$

于是π为整系数方程

$$a_nx^n+\cdots+a_2x^2+a_1x-a=0$$

的根，这与π是超越数相矛盾.故数环R不包含非零整数.

3.设F是至少含有两个数的数集.证明:如果F中任两数的差与商（除数不为零）仍属于F，则F必为数域.

证 设a,b为F中任两数，由于F中任两数的差与商仍属于F，故

$$a-a=0\in F,$$

且当$b\neq 0$时，

$$\frac{b}{b}=1\in F,\ \frac{1}{b}\in F.$$

于是

$$0-b=-b,\ a+b=a-(-b),$$

$$a\cdot b=\frac{a}{\frac{1}{b}}$$

都属于F.即F对加、乘也是封闭的，从而F作成一数域.

4.设F是至少含有两个数的数集，且F对加法与乘法封闭.证明：如果对F中任意数a，$-a$也属于F；而且当$a\neq 0$时，a^{-1}也属于F，则F必为一数域.

证 只需证F对减法与除法也封闭即可.

对于$a,b\in F$，由于$-b\in F$，则

$$a-b=a+(-b)\in F;$$

当$a\neq 0$时，由于$a^{-1}\in F$，而F对乘法封闭，故

$$\frac{b}{a}=b\cdot a^{-1}\in F.$$

即F对减法与除法也封闭.故F作成数域.

5.下列各数集是否作成数环或数域?

1) $P_1=\{a+b\sqrt{3}i\mid a,b$为任意有理数$\}$;

2) $P_2=\{a+bi\mid a,b$为任意有理数$\}$;

3) $P_3=\{a+bi\mid a$为任意有理数，b为任意实数$\}$;

4) $P_4=\{a+bi\mid a,b$为任意整数$\}$;

5) $P_5=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a,b$为任意有理数$\}$;

6) $P_6=\{\frac{2n}{2n+1}\mid n$为任意整数$\}$;

7) $P_7=\{a\sqrt{5}\mid a$为任意有理数$\}$;

8) $P_8=\{$全体非负有理数$\}$.

解 1) P_1作成数环，也作成数域.

首先，$0\in P_1, 1\in P_1$.

其次，设

$$a+b\sqrt{3}i\in P_1,\ c+d\sqrt{3}i\in P_1$$

为任意两个数，因为a，b，c，d是有理数，所以对a，b，c，d进行加、减、乘、除（除数不为零）后仍为有理数，故

$$(a+b\sqrt{3}i)+(c+d\sqrt{3}i)$$
$$=(a+c)+(b+d)\sqrt{3}i\in P_1,$$
$$(a+b\sqrt{3}i)-(c+d\sqrt{3}i)$$
$$=(a-c)+(b-d)\sqrt{3}i\in P_1,$$
$$(a+b\sqrt{3}i)\cdot(c+d\sqrt{3}i)$$
$$=(ac-3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}i\in P_1,$$

$$\frac{c+d\sqrt{3}i}{a+b\sqrt{3}i}=\frac{(c+d\sqrt{3}i)\cdot(a-b\sqrt{3}i)}{(a+b\sqrt{3}i)\cdot(a-b\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{ac+3bd}{a^2+3b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+3b^2}\sqrt{3}i\in P_1,$$

$$(a+b\sqrt{3}i\neq 0),$$

即P_1对加法、减法、乘法、除法是封闭的，所以P_1作成数环，也作成数域.

2） P_2作成数环，也作成数域，验算同1）。

3） P_3既不作成数环，也不作成数域。因为，$0+1\cdot i$，$1+\sqrt{2}i\in P_3$,但是，由于$\sqrt{2}$是无理数，故

$$i\cdot(1+\sqrt{2}i)=-\sqrt{2}+1\cdot i\notin P_3.$$

即P_3对乘法不封闭.

4） P_4是数环，但不是数域.是数环的验算同1）．又由于$-1+3i,2i\in P_4$，但是

$$\frac{-1+3i}{2i}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\notin P_4.$$

即P_4对除法不封闭，故不能作成数域.

5） P_5既不作成数域，也不作成数环：因为对乘法不封闭.例如，$\sqrt[3]{2}\in P_5$，但是

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4}\notin P_5.$$

事实上，若$\sqrt[3]{4}\in P_5$，设

$$\sqrt[3]{4}=a+b\sqrt[3]{2}，a，b为有理数.$$

则a与b都不能是零，且

$$a=\sqrt[3]{4}-b\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-b)$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2}-b)(\sqrt[3]{2}+b)}{\sqrt[3]{2}+b}=\frac{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{4}-b^2)}{\sqrt[3]{2}+b}$$

$$=\frac{2-b^2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+b}.$$

或 $$2-ab=(a+b^2)\sqrt[3]{2} \tag{1}$$

但$a+b^2\neq 0$，因若$a+b^2=0$，则$2-ab=0$.由此可得

$$b=-\sqrt[3]{2}.$$

这与b是有理数相矛盾，故$a+b^2\neq 0$.于是由(1)得

$$\frac{2-ab}{a+b^2}=\sqrt[3]{2}.$$

即有理数等于无理数，这是矛盾的.故$\sqrt[3]{4}\notin P_5$.

6） P_6既不作成数域，也不作成数环，因为对加法不封闭.例如，

$$\frac{2}{3},\quad \frac{4}{5}\in P_6，但是\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}\notin P_6$$（因为分母减分子不等于1）.

7） P_7既不作成数域，也不作成数环，因为对乘法不封闭.例如，

$$\sqrt{5}\in P_7，但是，\sqrt{5}\sqrt{5}=5\notin P_7.$$

8） P_8虽对加、乘、除三种运算都封闭，但对减法不封闭，故不能作成数环.

6.证明：一切形如$\frac{m}{2^n}$的有理数作成的集合R（其中m为任意整数，n为任意非负整数）是一个数环.问：R是否作成数域？

证 任取a，$b\in R$，且令

$$a=\frac{m}{2^n}，\ b=\frac{s}{2^t}.$$

不妨设$n\geqslant t$,则

$$a \pm b = \frac{m}{2^n} \pm \frac{s}{2^t} = \frac{m \pm 2^{n-t}s}{2^n} \in R,$$

$$ab = \frac{m}{2^n} \cdot \frac{s}{2^t} = \frac{ms}{2^{n+t}} \in R.$$

故R作成数环.

但R不作成数域：例如

$$\frac{3}{2},\ \frac{5}{2} \in R, \text{但} \frac{3}{2} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{5} \notin R,$$

也就是说$\frac{3}{5}$不能表示成$\frac{m}{2^n}$的形状，即R对除法不封闭.

7.设m是任意给定的正有理数.证明：

1） 一切形如$x+y\sqrt{m}$（x,y为任意有理数）的数构成的集合P作成一个数域；

2） P是有理数域的充分与必要条件是，m为一个有理数的完全平方.

证 1)P对加、减、乘三种运算封闭是显然的.下面证明对除法也封闭.

在P中任取$\alpha = a + b\sqrt{m} \neq 0$.若$b = 0$，则$\alpha = a \neq 0$，于是$\alpha^{-1} = a^{-1} \in P$；若$b \neq 0$，则当$a - b\sqrt{m} = 0$时，有

$$\sqrt{m} = \frac{a}{b}.$$

从而一切形如$x + y\sqrt{m} = x + y \cdot \frac{a}{b}$的数就是全体有理数，即此时$P$为有理数域.

当$a - b\sqrt{m} \neq 0$时，有

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{a-b\sqrt{m}}{(a+b\sqrt{m})(a-b\sqrt{m})}=\frac{a-b\sqrt{m}}{a^2-b^2m}\in P,$$

故可知P对除法封闭，P作成数域.

2)由于$\sqrt{m}\in P$,因此，若P是有理数域，则$\sqrt{m}$为有理数.从而m为有理数的一个完全平方数.

反之，若m是有理数的一个完全平方数，则$\sqrt{m}$是一个有理数，从而P为有理数域.

8.设$P=\left\{a+b\sqrt{m}\mid a,\ b\text{为有理数},\quad m=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

证明：P作成一个数域.

证 证法Ⅰ：

P对加、减法封闭是显然的；下面证明对乘、除法也封闭.

首先，有

$$\sqrt{m}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1=m-1.$$

即 $\qquad m=1+\sqrt{m}$.

于是

$$(a+b\sqrt{m})(c+d\sqrt{m})=ac+bdm$$
$$+(ad+bc)\sqrt{m}=ac+bd(1+\sqrt{m})$$
$$+(ad+bc)\sqrt{m}=(ac+bd)+(ad+bc$$
$$+bd)\sqrt{m}\in P,$$

即P对乘法封闭.

设$c+d\sqrt{m}\neq 0$，即c，d为不全等于零的有理数.若有

$$\frac{1}{c+d\sqrt{m}}=x+y\sqrt{m},x,y\text{为有理数} \qquad (1)$$

则根据$m=1+\sqrt{m}$可得

$$\begin{aligned}1&=(c+d\sqrt{m})(x+y\sqrt{m})\\&=(c-d)x-cy+(dx+cy+dy)m,\end{aligned}$$

或 $\quad (d-c)x+cy+1=[dx+(c+d)y]m$.

由于m是无理数，故必

$$\begin{cases}dx+(c+d)y=0\\(d-c)x+cy=-1.\end{cases}$$

但

$$D=\begin{vmatrix}d & c+d\\ d-c & c\end{vmatrix}=cd+c^2-d^2\neq 0,$$

（否则，由一元二次方程求根公式知，

$$c=\frac{-d\pm d\sqrt{5}}{2}.$$

与c，d为不全等于零的有理数矛盾）

于是得

$$x=\frac{c+d}{D},\quad y=\frac{-d}{D}.$$

代入（1），并经验算有

$$\frac{1}{c+d\sqrt{m}}=\frac{c+d}{D}-\frac{d}{D}\sqrt{m}\in P.$$

由此可知P对除法也封闭，故P作成数域.

证法Ⅱ：

由 $$m=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

得 $$\sqrt{m}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

所以 $$a+b\sqrt{m}=a+b\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\left(a+\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}\sqrt{5}.$$

令 $$a+\frac{b}{2}=c,\quad \frac{b}{2}=d,$$

则c，d为有理数.反之，如果c，d为任意有理数，则a，b 也是有理数.于是

$$\begin{aligned}P&=\{a+b\sqrt{m}\mid a,b\text{为有理数}\}\\&=\{c+d\sqrt{5}\mid c,d\text{为有理数}\}\end{aligned}$$

后者是数域，所以P是数域.

9．一切形如$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$的数作成的集合（其中$a$，$b,c$为任意有理数）用$P(\sqrt[3]{2})$表示．证明：$P(\sqrt[3]{2})$作成一个数域.

证 $P(\sqrt[3]{2})$中的数对加、减、乘法运算封闭是显然的.下面证明对除法也封闭.

设

$$\alpha=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\neq 0,\ a,\ b,c\text{为有理数}.$$

则 $$(\alpha-a)^3=(b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})^3.$$

两边展开，再整理，得

$$\alpha^3-3a\alpha^2+(3a^2-6bc)\alpha-(a^3+2b^3+4c^3-6abc)=0 \qquad (1)$$

则一定有 $$a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0.$$

事实上，若$a^3+2b^3+4c^3-6abc=0$，则由上式，得

$$a^2-3a\alpha+3a^2-6bc=0 \qquad (2)$$

将α,α^2代入上式，并整理，得

$$(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}=0 \qquad (3)$$

由第5题5)可知，必

$$a^2-2bc=2c^2-ab=b^2-ac=0.$$

由此又推得

$$a^3=2b^3, \sqrt[3]{2}=\frac{a}{b},$$

这是矛盾的，故 $a^3+2b^3+4c^3-6abc\neq 0$.

(1)式两边除以$\alpha(a^3+2b^3+4c^3-6abc)$，再根据(2)与(3)两式的左端相等，即得

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}$$

$$\in P(\sqrt[3]{2}).$$

从而$P(\sqrt[3]{2})$对除法也封闭，$P(\sqrt[3]{2})$作成数域.

10.令F为包含一切形如$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$的数的集合，其中$a$，$b$，$c$，$d$为任意有理数. 证明：$F$作成一个数域.

证 F对加、减封闭是显然的. 又由于

$$(\sqrt{2})^2=2, (\sqrt{3})^2=3, (\sqrt{6})^2=6,$$
$$\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}, \sqrt{2}\sqrt{6}=2\sqrt{3},$$
$$\sqrt{3}\sqrt{6}=3\sqrt{2}$$

都属于F，故F对乘法也封闭.

下面证明F对除法也封闭.