1+1

轻巧夺冠

同步讲解

全国著名特级高级教师联合编写

高一数学 下

qingqiaoduoguan

总 主 编：刘 强 美澳国际学校校长
学科主编：明知白 北京东城区数学特级教师
中国数学奥林匹克高级教练

金版
第三次修订

北京出版社出版集团
北京教育出版社

1+1 轻巧夺冠

同步讲解

全国著名特级高级教师联合编写

高一数学 下

总主编：刘 强

主 编：刘中山 巩孝晖 王桂芬 李春翠

编 者：郑吉星 沈献宏 代夫珍 李宝亮

北京出版社出版集团 BEIJING PUBLISHING HOUSE(GROUP)
北京教育出版社 BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

1+1轻巧夺冠·同步讲解
高一数学(下)
刘强　总主编
*
北京出版社出版集团
北 京 教 育 出 版 社 出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
网址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
全 国 各 地 书 店 经 销
保定市华茂印刷厂　印刷
*
880×1230毫米　16开本　6.125印张　130000字
2005年10月第3次修订版　2005年10月第1次印刷

ISBN 7-200-02520-8/G·777
定价:8.00元

1+1 轻巧夺冠

金版 同步讲解

丛书特点

1. 左右两栏对照讲解。左栏为知识点讲解；右栏为与知识点相对应的例题。
2. 从基础知识的梳理，重点难点的突破（或新旧知识的融会贯通），与科技发展、生活实际相联系的综合、创新、应用三个层面解读每节内容。
3. 采用“同步讲解”与“优化训练”相配套的“1+1”模式。有讲有练，方便实用。

1+1轻巧夺冠·同步讲解 高一数学(下)　　第4章 三角函数

第4章 三角函数

4.1 角的概念的推广

知识要点归纳

基础知识及掌握这些知识的方法，“源于教材，高于教材”。可以帮助你高效率地掌握基础知识结构，得到学法指导。

思维能力拓展

对重点、难点进行深层次的拓展讲解和思路点拨，能有效地形成基础知识的提高和升华，是考试得高分的关键所在。

名师解题　不但有解题思路、方法的分析和点拨，也有解题时易错点和易忽略点的提示，能有效地避免解题时心理屏蔽作用和“低级错误”，深入浅出，指点迷津。

综合创新运用

用前瞻性、预测性的目光去分析，展示每节知识点可能出现的考题形式，命题角度、深度，并形成与科技发展、生活实际相联系的创新应用能力，努力做到与中、高考命题趋势“合拍”，步调一致。

素质能力测试

题目轻灵、简练，针对本节（课）所有知识点设计，与前面的讲解相互对应，形成“讲、例、练”三案合一的形式，学以致用，当堂达标。

点击知识点　标注在每道随堂训练题的后面，指明该道题目对应知识点的序号，形成对每个知识点的及时巩固和有效的强化训练，并能查漏补缺，一目了然。

1

真情讲练·轻巧夺冠

优化训练·学生训练用书

同步讲解

优化训练·教师讲评用书

目 录

第 4 章　三角函数

4.1　角的概念的推广

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 角的概念

(1)角可以看成是从同一点出发的两条射线所组成的图形

(2)角可以看成一条射线绕着它的端点旋转而成的图形.

说明:两种定义分别从"静"和"动"的观点来揭示角的实质.

(1)仅限于 $0°-360°$ 的角,若超出这一范围就无法表示了.

(2)打破了范围限制,可以表示任意大小的角.

2 角的分类

(1)角可以按照其形成的过程分为正角、负角、零角.

(2)正角:一条射线按逆时针方向旋转形成的角.

(3)负角:一条射线按顺时针方向旋转形成的角.

(4)零角:一条射线没有作任何旋转形成的角.

(对应例题见例 1)

3 象限角

(1)象限角的概念

在直角坐标系中讨论角时,使角的顶点与坐标原点重合,角的始边与 x 轴的正半轴重合,这时角的终边落在第几象限就说这个角是第几象限的角.如果角的终边落在坐标轴上,则这个角不属于任何象限(有时称之为象限界角).

(2)象限角的表示

象限	表　示
Ⅰ	$\{\alpha \mid k\cdot360°<\alpha<k\cdot360°+90°\quad k\in\mathbf{Z}\}$
Ⅱ	$\{\alpha \mid k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°\quad k\in\mathbf{Z}\}$
Ⅲ	$\{\alpha \mid k\cdot360°+180°<\alpha<k\cdot360°+270°\quad k\in\mathbf{Z}\}$
Ⅳ	$\{\alpha \mid k\cdot360°+270°<\alpha<k\cdot360°+360°\quad k\in\mathbf{Z}\}$

(3)终边落在坐标轴上的角的表示

x 轴的正半轴 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot360°\quad k\in\mathbf{Z}\}$

x 轴的负半轴 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot360°+180°\quad k\in\mathbf{Z}\}$

x 轴 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot180°\quad k\in\mathbf{Z}\}$

y 轴的正半轴 $\{\alpha \mid \alpha=k\cdot360°+90°\quad k\in\mathbf{Z}\}$

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例 1　(1)钟表经过 10 分钟,时针转了______度,分针转了______度.

(2)若将钟表拨慢了 10 分钟,则时针转了________度,分针转了________度.

解析　(1) $-10\times\dfrac{360°}{12\times60}=-5°$

$-10\times\dfrac{360°}{60}=-60°$

(2) $10\times\dfrac{360°}{12\times60}=5°$

$10\times\dfrac{360°}{60}=60°$

点评:(1)角的旋转方向.

(2)角的正负.

例 2　下列命题

(1)第一象限的角必是锐角.

(2)锐角必是第一象限的角.

(3)终边相同的角必相等.

(4)第二象限的角必大于第一象限的角.

其中正确命题的个数为(　　)

A.0 个　　B.1 个　C.2 个　D.3 个

解析　如 390°是第一象限角但不是锐角.

390°与 30°的终边相同但不相等.

120°是第二象限角,390°是第一象限角,但 120° < 390°故选 B

例 3　写出终边在第一、三象限角平分线上的角的集合.

解析　如图 4-2,①终边在第一象限角的平分线上的角为

$\alpha=k\cdot360°+45°,k\in\mathbf{Z}$

②终边在第三象限角的平分线上的角为

$\alpha=k\cdot360°+225°,k\in\mathbf{Z}$

∴终边在第一、三角限角平分线上的角的集合为

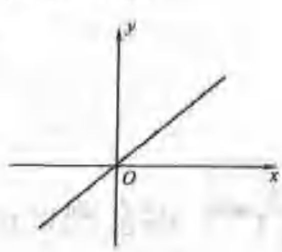

图 4-2

$S=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot360°+45°$ 或 $\alpha=k\cdot360°+225°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha \mid \alpha=2k\cdot180°+45°$ 或 $\alpha=(2k+1)\cdot180°+45°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\alpha \mid \alpha=n\cdot180°+45°,n\in\mathbf{Z}\}$

y 轴的负半轴$\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+270^\circ\quad k\in\mathbf{Z}\}$

y 轴$\{\alpha|\alpha=k\cdot180^\circ+90^\circ\quad k\in\mathbf{Z}\}$

(对应例题见例2,例3)

4 终边相同的角

一个角确定了,则这个角的终边也就唯一确定了,反过来,一条终边确定了,则它可以表示无数个角,这些角都相差 360° 的整数倍,α 角以及与 α 终边相同的角都可以表示为 $k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}$ 的形式,因而与 α 终边相同的角的集合为:

$$\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$$

(对应例题见例4,例5)

思维能力拓展

5 利用终边相同的角的表示,可以由角 α 所在的象限,判断 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

(1)方法一(范围限定法):将 α 的范围用式子表示出来,然后求出 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围,根据此范围进行判断,此时需要进行分类讨论.

(2)方法二(图示法):把直角坐标系中的各个象限进行二等分,从 x 轴右上方开始按逆时针将各区域依次标上1,2,3,4;1,2,3,4.若 α 是第几象限角就找数字几,其对应的位置就是 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.如图4-1.

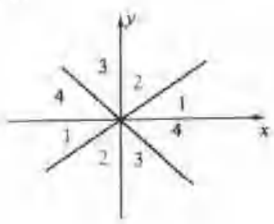

图4-1

说明:①方法一是基本方法,用此法不但可以判定 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限,还可以判断 $\frac{\alpha}{3}$,2α 等所在的象限.

②方法二较简捷,使用起来非常方便应熟记.也可判断 $\frac{\alpha}{3}$ 的位置(把各象限三等分).

(对应例题见例4)

综合创新运用

6 终边相同角的表示的灵活运用

(1)由角的范围来确定角的终边位置时应把角写成 $k\cdot360^\circ+\alpha$ 或 $k\cdot360^\circ+\alpha<x<k\cdot360^\circ+\beta,\ k\in\mathbf{Z}$ 的形式,从而便于确定.

点评:注意掌握这种先分类后合并的方法与技巧.

例4 已知角 α 为第四象限角,判断 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角.

解析 方法一:$\because$ α 是第四象限角

$\therefore$ $k\cdot360^\circ-90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}$

$k\cdot180^\circ-45^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}$

1°当 k 为偶数,即 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时

则:$n\cdot360^\circ-45^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ$

此时角 $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

2°当 k 为奇数时,即 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时

则 $n\cdot360^\circ+135^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ+180^\circ$

此时 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角.

故 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

方法二:由左栏图(4-1)可知 $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

例5 已知集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot120^\circ+30^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

$B=\{\beta|k\cdot360^\circ-120^\circ<\beta<k\cdot360^\circ+60^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

求:$A\cap B$

解析 $\because$ $\alpha=k\cdot120^\circ+30^\circ,k\in\mathbf{Z}$

$\therefore$ 当 $k=3n(n\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=n\cdot360^\circ+30^\circ$

当 $k=3n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=n\cdot360^\circ+150^\circ$

当 $k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$ 时,$\alpha=n\cdot360^\circ+270^\circ$

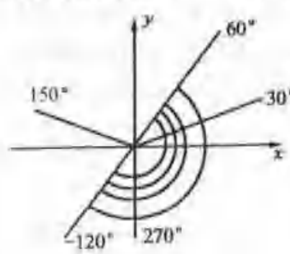

图4-3

由条件作图(4-3)阴影部分为集合 B 表示的区域.

$\therefore$ 集合 A 与集合 B 的公共部分是与 30°,270° 终边相同的角的集合.

即:$A\cap B=\{\alpha|\alpha=k\cdot360^\circ+30^\circ$ 或 $\alpha=k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

点评:$k=3n,k=3n+1,k=3n+2(n\in\mathbf{Z})$,这种分类方法要用心体会.

例6 若角 α,β 终边满足下列关系,写出 α,β 的关系式.

(1)关于原点对称.

(2)关于 x 轴对称.

(3)关于 y 轴对称.

解析 (1)α 与 $180^\circ+\alpha$ 终边关于原点对称

$\therefore$ β 与 $180^\circ+\alpha$ 是终边相同的角

$\therefore$ $\beta=k\cdot360^\circ+180^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}$

即:$\beta=(2k+1)\cdot180^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}$

同理可得(2)$\beta=k\cdot360^\circ-\alpha,k\in\mathbf{Z}$

(2)已知两角的终边位置关系，确定这两个角所满足的关系式.

方法：先找出满足这种位置关系的一个角，然后写出这个角终边相同的角即是.

(对应例题见例6)

(3)$\beta=(2k+1)\cdot180^\circ-\alpha,k\in\mathbf{Z}$

点评：先找出一种特殊的情况，再利用终边相同的角写出答案.如 $180^\circ-\alpha$ 与 α 的终边关于 y 轴对称，所以若 α、β 的终边关于 y 轴对称，则 $\beta=(2k+1)\cdot180^\circ-\alpha$.

素质能力测试

1. α 是第四象限角，则 $180^\circ-\alpha$ 是第(　　)象限角

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

2. 若 $\alpha=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}$，则 α 是第(　　)象限角

A. 一或三　　B. 一或二　　C. 二或四　　D. 三或四

3. 在下列各角中与 330° 角的终边相同的角是(　　)

A. 510°　　B. 150°　　C. -150°　　D. -390°

4. 角 α、β 的终边互为反向延长线，则(　　)

A. $\alpha=-\beta$　　B. $\alpha=180^\circ+\beta$

C. $\alpha=k\cdot360^\circ+\beta,k\in\mathbf{Z}$　　D. $\alpha=k\cdot360^\circ+180^\circ+\beta,k\in\mathbf{Z}$

5. 时针走过1小时20分，则分针转过的角为________.

6. 设 α 是第二象限角，且 $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第________象限角.

7. 如图4-4中阴影部分表示的角的集合为________________(包括边界).

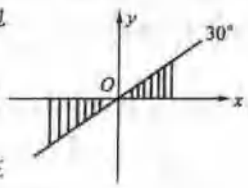

图4-4

8. 已知角 $\alpha=-3\,000^\circ$，则与 α 终边相同的最小正角是________.

9. 若 α、β 两角的终边互为反向延长线，且 $\alpha=-120^\circ$，则 $\beta=$________.

10. 写出终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的所有角的集合，并求出这个集合中在 $-360^\circ\sim360^\circ$ 之间的角.

11. 已知 $\alpha=-1\,910^\circ$.

(1)把 α 写成 $\beta+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z},0^\circ\leqslant\beta<360^\circ)$ 的形式，指出它是第几象限的角；

(2)求 θ，使 θ 与 α 的终边相同，且 $-720^\circ\leqslant\theta<0^\circ$.

12. 时针指示3点半时，时针与分针的夹角是多少度？

点击知识点

1. 点击知识点3
2. 点击知识点3、4
3. 点击知识点4
4. 点击知识点6
5. 点击知识点2
6. 点击知识点5
7. 点击知识点6
8. 点击知识点4
9. 点击知识点4、6
10. 点击知识点4
11. 点击知识点4
12. 点击知识点2

4.2 弧度制

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1 1弧度角的定义及弧度制

弧长等于半径长的弧所对的圆心角叫1弧度的角，弧度用符号 rad 表示.

以弧度为单位度量角的单位制叫弧度制.

说明:在用弧度制表示角时,单位弧度或 rad 往往可以省略不写.

2 (1)正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零.

(2)在角的概念推广以后,弧的概念也随之推广.可以把弧看成是一个动点沿着圆圈旋转而成的,当旋转方向为顺时针时弧为负,当旋转的方向为逆时针时弧为正.这样规定以后,弧的大小是任意的.

(3)由1弧度角的定义知道,弧有多少个半径长,它所对的圆心角就是多少弧度,即 $|\alpha|=\frac{l}{r}$(其中 r 为圆的半径,α 为圆心角的弧度数,l 为圆心角所对的弧长.)(对应例题见例1)

3 角度与弧度的互化

同一个角既可以用度来表示,也可以用弧度来表示,它们之间必然有着某种关系.

由1周角 $=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$ rad　　又1周角 $=360°$,可知

2π rad $=360°$　　π rad $=180°$

从而 $1\text{ rad}=(\frac{180}{\pi})°=57°18'$

$1°=(\frac{\pi}{180})\text{ rad}=0.017\,45\text{ rad}$

注意:①在进行角度与弧度的换算时,抓住关系式:π rad $=180°$ 是关键.由它可以得度数 $\times\frac{\pi}{180}=$ 弧度数.弧度数 $\times\frac{180°}{\pi}=$ 度数

②特殊角的弧度数与度数对应值今后常用,应该熟记,见下表.

度数	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

③在同一个式子中,角度与弧度不能混合用,必须保持单位统一.(对应例题见例2)

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 (1)把时钟拨慢了20分钟,分针所转过的角的弧度数为______.

(2)时钟转过2小时15分,分针转过的角的弧度数为______.

解析 (1)因为经过1小时,分钟转 $-360°$ 即 -2π rad,所以拨慢20分钟,分针转过的弧度数为 $\frac{20}{60}\times(2\pi)=\frac{2\pi}{3}$(rad)

(2)经过2小时15分,分针转过的角的弧度数为:

$$(2+\frac{15}{60})\times(-2\pi)=-\frac{9}{2}\pi(\text{rad})$$

点评:(1)分清角的正负.

(2)要熟悉特殊角的弧度数.

例2 把下列各角写成 $2k\pi+\alpha(0\leq\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$ 的形式,并指出是第几象限的角.

(1)$\frac{23\pi}{6}$　　(2)$-1\,500°$

解析 (1)$\frac{23}{6}\pi=2\pi+\frac{11}{6}\pi$　$\because\frac{11}{6}\pi$ 是第四象限角

$\therefore\frac{23}{6}\pi$ 是第四象限.

(2)$-1\,500°=-1\,500\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25}{3}\pi=-10\pi+\frac{5\pi}{3}$

$\because\frac{5\pi}{3}$ 是第四象限角.

$\therefore-1\,500°$ 是第四象限角.

点评:若把 $\frac{23}{6}\pi$ 化成 $3\pi+\frac{5\pi}{6}$ 从而得出 $\frac{23}{6}\pi$ 是第二象限角的错误结果.判定一个角是第几象限角,应把这个角表示成 π 的偶数倍与角 α 和的形式(其中 $0\leq\alpha<2\pi$),再去判定.

例3 一个扇形的面积是1 cm²,它的周长是4 cm,求圆心角的弧度数.

解析 设扇形的半径为 r,圆心角为 α.

则弧长 $l=\alpha\cdot r$　由题意可知

$$\begin{cases}\alpha r+2r=4\\ \frac{1}{2}\alpha r^2=1\end{cases}\qquad \text{解之得}\begin{cases}\alpha=2\\ r=1\end{cases}$$

$\therefore$ 扇形的圆心角为2 rad.

点评:本例把弧长公式、扇形面积公式结合起来,最后统一成 α、r 的方程组使问题得以解决.这便是方程思想的运用.

例4 扇形的周长为20 cm,当扇形的圆心角为何值时,它的面积最大?并求出最大面积.

解析 方法一:设扇形的圆心角为 α,半径为 r,面积为 S,则弧长为 $l=20-2r$

4 弧长公式与扇形面积公式

(1)在角度制中,弧长公式为:$l=\frac{\pi}{180}\cdot nr$

扇形面积公式为:$S=\frac{\pi}{360}nr^2$

(其中 n 为圆心角的度数)

(2)在弧度制中,弧长公式为:$l=|\alpha|r$

(其中 α 为圆心角的弧度数)

扇形面积公式:$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

从以上形式来看,使用弧度制后,弧长公式及扇形面积公式形式特别简单,因而使用起来更为方便.(对应例题见例3、例4)

思维能力拓展

5 合理选择参数,运用函数思想,转化思想,解决扇形中的有关最值问题.如在例4若用方法一将面积直接表示为圆心角 α 的函数,转化为关于 α 的二次方程用判别式法求最值,此法虽可但较繁.若用方法二将面积表示为半径的函数转化为 r 的二次函数最值问题.此解法就简单得多.

两种方法都用到了函数思想,转化思想,同学们在今后的学习中要注意数学思想方法的应用.以便较快捷地找到解题思路,并能优化解题过程,达到事半功倍的效果.

$\therefore 20-2r=r\cdot\alpha \qquad \therefore r=\frac{20}{2+\alpha}$

$\therefore S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}r^2\alpha=\frac{1}{2}(\frac{20}{2+\alpha})^2\cdot\alpha$

可化为 $S\alpha^2+4(S-50)\alpha+4S=0$

$\because \alpha\in\mathbf{R} \quad \therefore \Delta=16(S-50)^2-16S^2\geqslant 0$

解得 $S\leqslant 25 \quad \therefore S_{最大}=25$

此时 $\frac{200\alpha^2}{(2+\alpha)^2}=25$ 得 $\alpha=2$

方法二:$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}(20-2r)\cdot r=-r^2+10r=-(r-5)^2+25$

$\therefore$ 当 $r=5$ 时,$S_{最大}=25$

此时 $l=20-2\times5=10 \quad \alpha=\frac{l}{r}=\frac{10}{5}=2$

点评:解这类题目要弄清弧长 l、圆的半径 r、圆心角的弧度数 α 与扇形面积 S 之间的关系,即掌握弧长公式 $l=|\alpha|r$ 及扇形面积公式 $S_{扇形}=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$.

例5 已知半径为13 cm的飞轮上有一长为10 cm的弦,弦的中点为 M,若飞轮以角速度为4 rad/s的速度旋转.求经过5 s时点 M 所转的弧长.

解析 如图4-5,已知 $OA=13$,$AM=5$,$OM=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$\therefore$ 点 M 在以半径为12 cm的圆上旋转,点 M 在5 s内转过的弧度数为

$4\times5=20(\text{rad})$

$\therefore$ 其转过的弧长为 $l=20\times12=240(\text{cm})$

故经过5 s时,点 M 转过的弧长为240 cm.

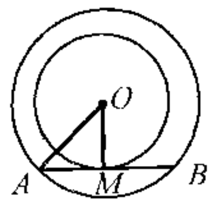

图4-5

综合创新运用

6 在扇形的有关问题中,要充分揭示图形的性质及联系,在圆心角、半径、弧长、面积这些量中,只要知道其中的任意两个量,便可求出其余的量.如例5要求弧长,只要求出点 M 所在圆的半径以及点 M 所转过的弧度数.结合已知条件及图形,问题便容易解决.

7 在建立了弧度制后,角的集合与实数集合之间便建立了一一对应关系,即每一个角都有唯一的一个实数即(这个角的弧度数)与它对应,反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(弧度数等于这个实数的角)与它对应.

素质能力测试

1. 与 $\frac{9}{4}\pi$ 终边相同的角的表达式中,正确的是(　　)　　1. 点击知识点3

A. $2k\pi+45°,k\in\mathbf{Z}$　　B. $k\cdot360°+\frac{9}{4}\pi,k\in\mathbf{Z}$

C. $k\cdot360°-315°,k\in\mathbf{Z}$　　D. $k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$

2. 圆的一条弧长等于这个圆的内接正三角形的一条边长,那么这条弧所对的圆心角的弧度数为(　　)　　2. 点击知识点2

A. $\frac{2}{3}\pi$ rad　　B. 1 rad　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ rad　　D. $\sqrt{3}$ rad

3. 将分针拨慢10分钟,则分针所转过的弧度为(　　)　　3. 点击知识点2

A. $-\frac{\pi}{3}$ rad　　B. $\frac{\pi}{3}$ rad　　C. $-\frac{\pi}{6}$ rad　　D. $\frac{\pi}{6}$ rad

4. $315°=$ ______ rad　　$-\frac{5}{6}\pi=$ ______ 度　　4. 点击知识点3

5. 若 2 rad 的圆心角所对的弦长为 2,则这个圆心角所对的弧长是______. 5. 点击知识点 4

6. 正六边形的一个内角的弧度数等于______. 6. 点击知识点 3

7. 半径为 12 cm,弧长为 8π cm 的弧,其所对的圆心角为 α,则与 α 终边相同的角的集合为______. 7. 点击知识点 4

8. 把角 $1\ 680°$ 写成 $2k\pi+\alpha(k\in \mathbf{Z},\alpha\in[0,2\pi))$ 的形式为______,在 $(-2\pi,0)$ 间与 $1\ 680°$ 终边相同的角是______. 8. 点击知识点 3

9. 正 n 边形的一个内角的弧度数等于______. 9. 点击知识点 3

10. 已知扇形 OAB 的中心角为 4 rad,其面积为 2 cm^2,求扇形的周长和弦 AB 的长. 10. 点击知识点 4

11. 如图 4-6,一个大风车的半径为 8 m,每 12 min 旋转一周,最低点离地面 2 m,求风车翼片的一个端点 P 离地面的距离 h(m)与时间 t(min)之间的函数关系. 11. 点击知识点 6

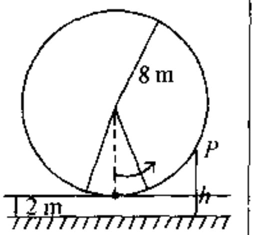

图 4-6

12. 已知扇形的面积为 S,当扇形的中心角为多少弧度时,扇形的周长最小? 并求出最小周长. 12. 点击知识点 4、5

4.3　任意角的三角函数

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1. 任意角的三角函数的定义

角 α 的顶点放在坐标原点，始边与 x 轴非负半轴重合，角 α 的终边上任意一点 P(除端点外)的坐标是 (x,y)，它与原点的距离为 $r(r>0)$，那么角 α 的六种三角函数为：

α 的正弦：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$　　α 的余弦：$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

α 的正切：$\tan\alpha=\frac{y}{x}$　　α 的余切：$\cot\alpha=\frac{x}{y}$

α 的正割：$\sec\alpha=\frac{r}{x}$　　α 的余割：$\csc\alpha=\frac{r}{y}$

注意：①$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$.

②三角函数值只与角 α 的终边的位置有关，而与点 P 在终边上的位置无关.

③三角函数是以角为自变量，以比值为函数值的函数.

(对应例题见例1)

2. 三角函数的定义域

三角函数的定义域，就是使比值有意义的角的取值范围.

三角函数	定义域
$\sin\alpha$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
$\cot\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$
$\sec\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$
$\csc\alpha$	$\{\alpha\mid\alpha\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

(对应例题见例2)

3. 三角函数线

设任意角 α 的顶点在原点，终边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆相交于点 $P(x,y)$，过点 P 作 x 轴垂线，垂足为 M，过单位圆与 x 轴正半轴的交点 A 作圆的切线，使它与角 α 的终边或其反向延长线相交于点 T，则有向线段 MP、OM、AT 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线. 如图4-7.

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 已知角 α 的终边上有一点 $(3a,4a)(a\neq0)$

求：角 α 的正弦值和正切值.

解析　由 $x=3a,y=4a$ 得

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(3a^2)+(4a)^2}=5|a|$

若 $a>0$，则 $r=5a$

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$　　$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4a}{3a}=\frac{4}{3}$

若 $a<0$，则 $r=-5a$

$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{4a}{-5a}=-\frac{4}{5}$　　$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{4a}{3a}=\frac{4}{3}$

点评：(1)深刻理解三角函数的定义是学好三角函数的基础，已知角的终边上一点的坐标会求三角函数值是重要的基本技能.

(2)本题中 a 的正负不知，应对其讨论，否则会得出错误的结果.

例2 x 取什么值时，$\frac{\sin x-\cos x}{\tan x}$ 有意义?

解析　要使此式有意义，必须使 $\tan x$ 存在，且 $\tan x\neq0$

∴角 x 的终边不能落在坐标轴上.

即 $x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

点评：求三角函数的定义域应转化为一个等价的条件组问题，如此例易忘记 $\tan x$ 有意义这一条件，应引起重视.

例3 已知 $\sin\alpha\geqslant\frac{1}{2}$，求角 α 的集合.

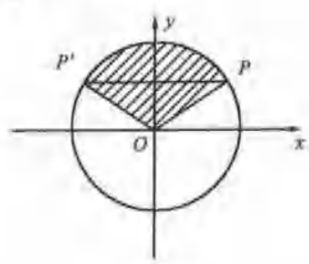

图4-9

解析　作直线 $y=\frac{1}{2}$ 交单位圆于 P、P'，则 $\sin\angle POx=\sin\angle P'Ox=\frac{1}{2}$，在 $[0,2\pi)$ 内 $\angle POx=\frac{\pi}{6}$，$\angle P'Ox=\frac{5\pi}{6}$，如图4-9，因此所求角的集合为 $\{\alpha\mid2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$

点评：利用三角函数及运动的观点可以直观地求出符合条件的角.

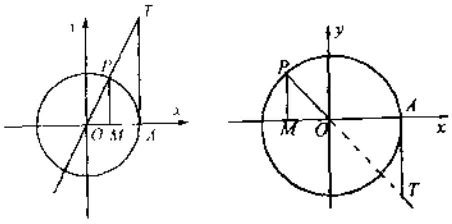

图 4－7

注意:①三角函数线是三角函数的几何表示.它们都是有向线段,线段的方向表示三角函数值的正负,与坐标轴同向为正,异向为负.线段的长度为三角函数值的绝对值.所以书写时要注意起点、终点的顺序,不能把顺序颠倒.如 $\sin\alpha=MP$ 若写成 $\sin\alpha=PM$ 就错了.

②特别地,当角 α 的终边落在 x 轴上时,正弦线,正切线分别变成一个点.当角 α 的终边落在 y 轴上时,余弦线变成一个点,正切线不存在.

③由三角函数的定义或三角函数线易推导:$|\sin\alpha|\leqslant 1$,$|\cos\alpha|\leqslant 1$,这就是正弦、余弦函数的有界性.

(对应例题见例3)

4 各象限角的各种三角函数值的符号.

由三角函数的定义可知,$\sin\alpha$ 与 $\csc\alpha$、$\tan\alpha$ 与 $\cot\alpha$、$\cos\alpha$ 与 $\sec\alpha$ 的符号是一致的.如图 4－8.

注意:①记忆时可只记正的,用口诀为:"一全正二正弦、三两切四余弦",也可结合定义进行记忆.如:α 为第四象限角,其终边上的点 $P(x,y)$ 满足 $x>0,y<0$,所以 $\sin\alpha=\frac{y}{r}<0$,$\cos\alpha=\frac{x}{r}>0$

②在各象限,同一个角的正弦与余割、余弦与正割、正切与余切的符号是一致的.

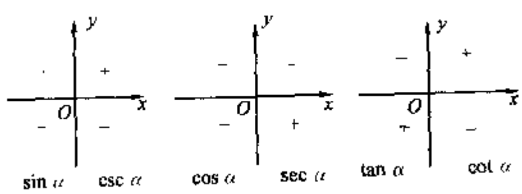

图 4－8

(对应例题见例4)

5 诱导公式

由于三角函数值的大小只与角 α 的终边的位置有关,而与 P 点在终边上的位置无关,所以终边相同的角的同一三角函数值相等.即:

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha,k\in\mathbf{Z}$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha,k\in\mathbf{Z}$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha,k\in\mathbf{Z}$$

其中 α 为使式子有意义的任何角.但常根据需要把 α 限定在[0,2π)内.利用这一组公式,就可以将任意角的三角函数转化为 0～2π 间的角的三角函数值.

(对应例题见例5)

例4 函数 $y=\frac{\sqrt{\sin x}+\lg\cos x}{\tan x}$ 的定义域为(　　)

A.$2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

B.$2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$

C.$2k\pi<x<(2k+1)\pi$

D.$2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$(其中 $k\in\mathbf{Z}$)

解析 要使函数有意义,必须使 $\begin{cases}\sin x\geqslant 0 & ①\\ \cos x>0 & ②\\ \tan x\neq 0 & ③\end{cases}$

由①得 x 为第一、二象限角或 x 轴上角,或 y 轴正半轴上的角.

由②得 x 为第一、四象限角或 x 轴正半轴上角.

由③得 x 终边不在坐标轴上.

∴ x 为第一象限角.故应选 B.

点评:(1)终边在各象限及坐标轴上的角的三角函数值的符号应熟记.

(2)已知三角函数值的符号可以确定角的范围.

例5 求 $\cos\frac{25\pi}{3}+\tan(-\frac{15\pi}{4})$ 的值.

解析 $\cos\frac{25\pi}{3}+\tan(-\frac{15\pi}{4})$

$=\cos(8\pi+\frac{\pi}{3})+\tan(-4\pi+\frac{\pi}{4})$

$=\cos\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

点评:利用诱导公式一,可把绝对值较大的角转化为 0～2π 间的角.

例6 若 α 为锐角,求证:$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

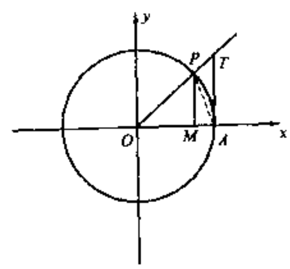

图 4－10

解析 如图 4－10,在单位圆中,作出锐角 α 的正弦线 MP,正切线 AT,连结 AP.

∵ $S_{\triangle OAP}<S_{扇形OAP}<S_{\triangle OAT}$

∴ $\frac{1}{2}|OA||MP|<\frac{1}{2}|OA|\cdot l<\frac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$

∵ α 为锐角　$|OA|=1$

∴　$\sin\alpha=MP=|MP|$

$\tan\alpha=AT=|AT|$

$l=OA\cdot\alpha=\alpha$

∴　$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$

点评:(1)利用三角函数线来表示三角函数较直观.

(2)结合图形利用三角形的面积公式及扇形的面积公式.

思维能力拓展

6. 三角函数线的灵活运用

三角函数线的引入,使三角函数具有了鲜明的几何特征,它直观地刻画了三角函数性质,为我们解决有关三角函数问题提供了几何方法,体现了数形结合的思想.如例 6 是弧度制与三角函数线的综合运用,借助了平面几何图形的面积之间的关系及三角函数线,使问题得以顺利解决.

综合创新运用

7. 三角函数定义的灵活运用

(1)利用三角函数的定义,可以把一个三角问题转化为一个代数问题来解,但是解决转化后的代数问题往往要有较强的代数变形能力,如例 7.

(2)利用正弦、余弦函数的有界性,可以来确定某些范围、符号、不等式等问题.

如 θ 为第二象限角,试确定 $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)$ 的符号

分析:$\because$ θ 为第二象限角.

$\therefore$ $-1<\cos\theta<0, 0<\sin\theta<1$

$\therefore$ $\sin(\cos\theta)<0$ $\quad\cos(\sin\theta)>0$

$\therefore$ $\sin(\cos\theta)\cdot\cos(\sin\theta)<0$

例 7 已知 θ 为锐角

求证:$1<\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$

解析 设 $P(x,y)$ 为角 θ 的终边上一点.

则 $\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\because$ θ 为锐角 $\quad\therefore$ $x>0, y>0$

故 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}$$

$$=\sqrt{2-\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{2}\text{(当 }x=y\text{ 时取等号)}$$

又 $\because$ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}$

$$=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{2xy}{x^2+y^2}}>1$$

$\therefore$ $1<\sin\theta+\cos\theta\leqslant\sqrt{2}$

点评:此题利用三角函数线来证明更简单、直观.

素质能力测试

1. $\sin\dfrac{25\pi}{6}$ 等于( )

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. $-\dfrac{1}{2}$ D. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若 $\cos\theta<0$ 且 $\sin\theta>0$,则 $\dfrac{\theta}{2}$ 是( )

A. 第一象限角 B. 第一或第三象限角

C. 第三象限角 D. 任意象限角

3. 设角 α 的终边上有一点 $P(-4a,3a)(a\neq0)$,则 $2\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值是( )

A. $\dfrac{2}{5}$ B. $\dfrac{2}{5}$ 或 $-\dfrac{2}{5}$

C. $-\dfrac{2}{5}$ D. 与 a 有关但不能确定

4. 下列命题中正确的是( )

A. 若 $\cos\theta\leqslant0$,则 θ 是第二或第三象限角

B. 若 $\alpha>\beta$,则 $\cos\alpha<\cos\beta$

C. 若 $\sin\alpha=\sin\beta$,则 α 与 β 是终边相同的角

D. α 是第三象限角的充要条件是 $\sin\alpha\cos\alpha>0$ 且 $\cos\alpha\cot\alpha<0$

5. 函数 $y=\tan(x-\dfrac{\pi}{4})$ 的定义域是______.

6. 满足 $\cos x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 的角 x 的集合为______.

点击知识点

1. 点击知识点 5
2. 点击知识点 4
3. 点击知识点 1
4. 点击知识点 1,4
5. 点击知识点 2
6. 点击知识点 3

7. 角 α 的终边在直线 $y=x$ 上,则 $\sin\alpha+\cos\alpha=$____________. 7. 点击知识点1、7

8. 若 $\sin\alpha=\cos\alpha$,则角 α 的集合为__________. 8. 点击知识点3

9. 求函数 $y=\lg(\sin 2x)+\sqrt{9-x^2}$ 的定义域. 9. 点击知识点4、7

10. 已知角 θ 终边上一点 $P(a,3)(a\neq0)$ 且 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}a$. 求 $\tan\theta$ 的值. 10. 点击知识点1

11. 解答下列问题: 11. 点击知识点4

(1)求函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域;

(2)θ 是正 n 边形的内角,$\sin\theta\cos\theta<0$,求 n 的取值范围.

4.4　同角三角函数的基本关系式

同步教材研读
名师解疑释惑

知识要点归纳

1. 同角三角函数的基本关系式，根据三角函数的定义，容易推得下面的关系

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(2)商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(3)倒数关系：$\tan\alpha\cot\alpha=1$

说明：①关系式成立的条件是使各个式子有意义的任何角，如(1)中 $\alpha\in\mathbf{R}$　(2)中 $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$　(3)中 $\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$

②$\sin^2\alpha=(\sin\alpha)^2$，$\sin^2\alpha\neq\sin\alpha^2$

③涉及的角为同一个角.

如$\sin^2\dfrac{\alpha}{3}+\cos^2\dfrac{\alpha}{3}=1$

$\tan2\alpha\cdot\cot2\alpha=1$ 都是正确的.

④除了掌握三个基本公式外，还要熟练掌握其等价形式

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$

(对应例题见例 1)

2. 利用同角三角函数的基本关系式，可以由一个角的某个三角函数值，求该角的其他三角函数值，其题型有三类.

(1)已知一个角的某种三角函数值且该角的范围，求该角的其他三角函数值.

(2)已知一个角的某种三角函数值但未指明该角的范围，求这个角的其他三角函数值.

(3)已知一个角的某种三角函数值是用字母给出的，求其他三角函数，这类问题有两组解，要注意分类的方法.

(对应例题见例 2)

3. 三角函数式的化简求值

三角函数式的化简要求

(1)三角函数种类尽量少.

(2)项数尽量少.

(3)次数尽量低.

(4)尽量不含有分母、根式

典型题例解析
了解考题形式

名师解题

例1 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，求 $\cos\alpha$、$\tan\alpha$ 的值.

解析 ∵　$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$ 且 $\sin\alpha\neq-1$

∴　α 是第三或第四象限的角

1°当 α 是第三象限角时

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$　　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$

2°当 α 是第四象限角时

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$　　$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}$

例2 已知 $\sin\alpha=m(|m|\leqslant1)$，求 $\tan\alpha$.

解析 1°当 $m=0$ 时，$\tan\alpha=0$

2°当 $m=\pm1$ 时，角 α 的终边落在 y 轴上，此时 $\tan\alpha$ 不存在.

3°当 α 在第一、四象限时

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-m^2}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}=\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

4°当 α 在第二、三象限时

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-m^2}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

点评：(1)若必须使用平方关系式时，应尽早使用，且只使用一次.

(2)当角所在的象限不确定时，应进行分类讨论.

(3)注意此题分类讨论的方法，若按 m 的符号分类将会出现什么情况？

要掌握此类问题的解决技巧.

例3 化简 $\sqrt{1-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}+\sqrt{1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}\ (0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$

解析 ∵　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$　∴　$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}>\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$

$\sqrt{1-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}+\sqrt{1+2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}$

$=\sqrt{(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2})^2}+\sqrt{(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2})^2}$

$=(\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2})+(\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2})=2\cos\dfrac{\alpha}{2}$

点评：(1)将“1”用 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ 代换把被开方式化为完全平

(5)尽可能求出式子的值.

(对应例题见例3)

4 证明三角恒等式

(1)证明三角函数恒等式的基本原则:由繁到简

(2)证明三角函数恒等式常用方法:

①从左向右推

②从右向左推

③左右互推

(3)证明三角函数恒等式常用技巧

①切割化弦

②整体代入

(对应例题见例4)

思维能力拓展

5 其他几个三角函数间的关系

(1)$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

(2)$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

(3)$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(4)$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$

(5)$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$

这几个关系式很易根据定义推导出来,熟悉这几个公式及其变形将有利于提高解题能力和解题速度.

6 关于 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的齐次式

所谓关于 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的齐次式就是式子中的每一项都是关于 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的式子且它们的次数之和相同,设为 n 次,解决这类问题时,可分子分母同除以 $\cos\alpha$ 的 n 次幂,其式子可化为关于 $\tan\alpha$ 的式子,根据已知条件再解决就简单得多.

(对应例题见例5)

综合创新运用

7 关于 $\sin\alpha+\cos\alpha$、$\sin\alpha-\cos\alpha$、$\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ 的关系.以上三个式子中,只要已知其中的一个式子的值,便可求出其余两个式子的值,以及与它们有关的一些式子的值.

(对应例题见例6)

方式,去掉根号.

(2)$\sin\dfrac{\alpha}{2}$、$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ 的符号及它们间的大小.

例4 求证 $\dfrac{1-2\sin2x\cos2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}=\dfrac{1-\tan2x}{1+\tan2x}$

解析 右边 $=\dfrac{1-\dfrac{\sin2x}{\cos2x}}{1+\dfrac{\sin2x}{\cos2x}}=\dfrac{\cos2x-\sin2x}{\cos2x+\sin2x}$

$=\dfrac{(\cos2x-\sin2x)(\cos2x-\sin2x)}{(\cos2x+\sin2x)(\cos2x-\sin2x)}$

$=\dfrac{1-2\sin2x\cos2x}{\cos^2 2x-\sin^2 2x}=$ 左边

$\therefore$ 原等式成立.

点评:(1)注意第三步的变化技巧.

(2)若由左边推右边怎么证?

例5 已知:$\sin\alpha=2\cos\alpha$

计算:(1)$\dfrac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$ (2)$\dfrac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$

(3)$3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha$

解析 $\because\sin\alpha=2\cos\alpha$ $\therefore\tan\alpha=2$

(1)$\dfrac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha-2}{5+3\tan\alpha}=\dfrac{3\times2-2}{5+3\times2}=\dfrac{4}{11}$

(2)$\dfrac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha+1+\tan\alpha}{\tan^2\alpha-2}$

$=\dfrac{2^2+1+2}{2^2-2}=\dfrac{7}{2}$

(3)$3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha=\dfrac{3\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{3\tan^2\alpha-4}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{3\times2^2-4}{2^2+1}=\dfrac{8}{5}$

点评:(1)注意"1"的代换

(2)另法,将 $\sin\alpha=2\cos\alpha$ 直接代入.

例6 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 求 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ 的值.

解析 $\because$ $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore$ $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[1-(-\dfrac{1}{4})]=\dfrac{5}{8}\sqrt{2}$

点评:应注意 $\sin\alpha+\cos\alpha$、$\sin\alpha-\cos\alpha$、$\sin\alpha\cos\alpha$ 三者间的关系在解题中的应用.

素质能力测试

1. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$,α 是第二象限的角,那么 $\tan\alpha$ 的值( )

A. $-\dfrac{4}{3}$ B. $-\dfrac{3}{4}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{4}{3}$

2. 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$,则 $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$ 的值是( )

点击知识点

1. 点击知识点2

2. 点击知识点6