普通高等教育国家级规划教材配套用书

线性代数学习指导

主编 毕守东

安徽科学技术出版社

普通高等教育国家级规划教材配套用书

线性代数学习指导

主　编　毕守东
副主编　徐　丽　刘爱国
　　　　吴怀孔　陈德玲

安徽科学技术出版社

图书在版编目(C I P)数据

线性代数学习指导/毕守东主编. —合肥:安徽科学技术出版社,2006.3
ISBN 7-5337-3447-5

Ⅰ.线…　Ⅱ.毕…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 012026 号

*

安徽科学技术出版社出版
(合肥市跃进路 1 号新闻出版大厦)
邮政编码:230063
电话号码:(0551)2833431
E-mail: yougoubu@sina.com
yougoubu@hotmail.com
网址: www.ahstp.com.cn
新华书店经销　合肥中德印刷培训中心印刷厂印刷

*

开本: 787×960　1/16　印张: 12.25　字数:210 千
2006 年 3 月第 1 版　2006 年 3 月第 1 次印刷
印数: 4 000
定价: 14.80 元

前　言

线性代数是大学数学的一个重要组成部分,相对于微积分而言,许多初学者都会感到线性代数似乎更加难学.究其原因主要有两点,一是线性代数的研究对象和处理方法同中学阶段的内容大多没有明显的联系,因而不能像微积分那样有自然的延续性,而且线性代数中许多概念的产生不像微积分那样直观;二是线性代数的结构框架有一定的可变性,各部分内容有一定的独立性.已公开出版的许多线性代数教材在结构上不完全相同,这给读者在参阅不同教材时带来一定的困难,当然这对勤于思考的人来说,也许是件好事.

为了帮助初学者理顺思路、抓住重点,系统地掌握线性代数的主要内容,我们编写了这本线性代数学习指导.全书共五章,包括行列式,矩阵,向量组的线性相关性,线性方程组,相似矩阵及二次型.每章由基本要求、内容提要、例题解析和自测题四部分组成.基本要求部分指出了本章应要理解和重点掌握的知识要点;内容提要部分归纳和简述了本章的基本概念、基本定理和基本方法及其内在的联系和规律性,并指出应注意的问题;例题解析部分精选了一定数量的典型题目,这部分是每章的重点,对于这些重点例题不仅给出了题前的分析,而且给出了题后的注释,以启发和引导读者对问题的深入思考,以期达到举一反三的效果.自测题部分用于读者自我检测,我们列举了近300道习题,并都给出了详细解答,这些习题难度深浅各异,理论计算均有,覆盖内容全面,有很好的参考价值.在本书最后,给出了四套综合测试题,以全面检测读者对本门课程的掌握程度.

本书由毕守东同志任主编,徐丽、刘爱国、吴怀孔和陈德玲同志任副主编.

本书的出版得到了安徽农业大学教务处、理学院和安徽科技出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢.由于作者水平有限,错误在所难免,敬请广大读者批评指正.

编　者

2006年1月

目　　录

第 1 章　行列式

§1.1　基本要求

(1)了解行列式的定义.

(2)掌握行列式的性质.

(3)熟练掌握行列式的计算方法.

(4)掌握克莱姆(Cramer)法则.

§1.2　内容提要

1.2.1　二、三阶行列式

$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为**二阶行列式**.

$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$称为**三阶行列式**.

1.2.2　n 阶行列式的定义

定义 1.1　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排列成 n 行 n 列的表,记作

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 ***n* 阶行列式**.它是一个算式,当 $n=1$ 时,$D_1=|a_{11}|=a_{11}$;

当 $n\geqslant 2$ 时,$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots a_{1n}A_{1n}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$.

其中　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，而 $M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为元素 a_{ij} 的**余子式**，A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**. 该定义称为递推式定义，它也给出了行列式的一种计算方法：按行列式第一行展开计算.

注　除了用递推法定义行列式外，还可以用逆序法和函数法来定义行列式，有兴趣的读者可阅读有关参考书.

1.2.3　行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

推论　若行列式中有两行(列)完全相同，则此行列式为零.

性质 3　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 1　若行列式中某一行(列)的元素全为零，则此行列式为零.

推论 2　若行列式中有两行(列)对应元素成比例，则此行列式为零.

性质 4　若行列式中某一行(列)的每一个元素都可表示为两数的和，则该行列式可以表示为两行列式之和. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　把行列式中的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

性质 6(展开法则)　行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots a_{in}A_{in}\quad (i=1,2,\cdots,n);$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots a_{nj}A_{nj}\quad (j=1,2,\cdots,n).$$

推论　行列式任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots a_{in}A_{jn}=0 \quad i\neq j$ 或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots a_{ni}A_{nj}=0 \quad i\neq j$

性质 6 及其推论可写成:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D_n & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D_n & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

性质 7[拉普拉斯(Laplace)定理] 在行列式 D 中任选 k 行(或 k 列)($1\leqslant k\leqslant n$),由这 k 行(或 k 列)元素组成的所有 k 阶子式(一共可组成 $C_n^k\cdot C_n^k$ 个 k 阶子式)与它们的对应代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

推论(行列式乘法公式) 两个 n 阶行列式

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} 与 B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$ 的乘积等于一个行列式

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

其中 C_{ij} 是 A 的第 i 行元素分别与 B 的第 j 列对应元素乘积之和,即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}(i,j=1,2,\cdots,n).$$

1.2.4 几个特殊行列式及其结果

(1) 上三角行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

(2) 下三角行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

(3) 对角行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

1.2.5 克莱姆(Cramer)法则

对于 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,即$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$

若其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$,则该线性方程组有唯一解:

$$x_j=\frac{D_j}{D}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后所得到的 n 阶行列式.

推论 1　对于 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,若其系数行列式 $D\neq 0$,则该线性方程组只有一组零解,即 $x_1=0,x_2=0,\cdots x_n=0$.

推论 2　若 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解($x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零的解),则该线性方程组的系数行列式 $D=0$.

1.2.6 行列式的计算方法

利用行列式的性质计算行列式是本章的重点.行列式计算的主要方法有:

(1) 利用行列式的性质化为三角形行列式.

(2) 利用行列式的性质做恒等变形化简,使行列式中出现尽量多的零元素,

然后按零元素最多的行或列展开.

(3) 拆行列式为几个行列式的和.

(4) 应用拉普拉斯定理及行列式乘法法则.

(5) 递推公式法.

(6) 数学归纳法.

(7) 应用范德蒙行列式.

(8) 升阶法(加边法).

行列式的计算方法很多,技巧性较强,要想熟练掌握,必须多加练习,不断总结、积累.练习时,首先要分析所求行列式的特点及其元素的规律性,针对其特征,选用适当的方法.

§ 1.3　例题解析

例 1.1　计算　$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & a \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

分析　消零化三角形:将第 i 行乘 $-a$ 加到第 $i-1$ 行 $(i=2,3,\cdots,n)$.

解　$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^n & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a^n & 0 \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}=(1-a^n)^{n-1}.$$

注　消零化三角形法是计算行列式常用的方法,再看一例.

例 1.2　计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

分析　本行列式称为爪形行列式,通常可化为三角形行列式来计算.

解

$$D_n \xlongequal{c_1-\frac{1}{j}c_j,\, j=2,3,\cdots,n} \begin{vmatrix} 1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}).$$

例 1.3　计算　$D_n = \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \begin{smallmatrix} & & \cdot \\ & \cdot & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix}$.

分析　这是一个副对角线元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，而其他元素均为零的稀疏行列式，由定义依次按第一行展开.

解

$$D_n = (-1)^{1+n}a_1 \begin{vmatrix} 0 & & a_2 \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & \\ a_n & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}a_1(-1)^{1+(n-1)}a_2 \begin{vmatrix} 0 & & a_3 \\ & \begin{smallmatrix} & \cdot \\ \cdot & \end{smallmatrix} & \\ a_n & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_1a_2\cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

注　本例亦可进行列交换使 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 位于主对角线上，相邻交换列的次数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$，可得同样的结果

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

例 1.4　计算　$D_4 = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_1b_4 & a_2b_4 & a_3b_4 & a_4b_4 \end{vmatrix}$.

分析　第一列提出公因子 a_1，再将第一列乘 $-a_j$ 加到第 j $(j=2,3,4)$ 列，然后按第四行展开，得上三角行列式.

$$D_4 = a_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ b_2 & 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ b_3 & 0 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4\begin{vmatrix} a_1b_2-a_2b_1 & a_1b_3-a_3b_1 & a_1b_4-a_4b_1 \\ 0 & a_2b_3-a_3b_2 & a_2b_4-a_4b_2 \\ 0 & 0 & a_3b_4-a_4b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_1b_4\prod_{i=1}^{3}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i).$$

注 认真观察行列式中元素的特点及规律性是解本题的关键.

例 1.5 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$,求 $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}$.

分析 直接计算 $A_{11},A_{21},A_{31},A_{41}$的值,工作量大且容易出错,这类题目根据行列式的展开性质求解较简单.

解 构造新的行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

显然 $D_1\neq D$,但与 D 的代数余子式 $A_{11},A_{21},A_{31},A_{41}$是一样的,对 D_1 按第一列展开,有 $A_{11}+A_{21}+2A_{31}+2A_{41}=D_1\xlongequal[r_4+2r_2]{r_3-4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -8 & -1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=$

$$(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-4r_1]{r_2+2r_1}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -14 & 13 \\ 0 & 18 & -27 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -14 & 13 \\ 18 & -27 \end{vmatrix}=144.$$

例 1.6 计算 $D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

分析 由观察,将第 1、3 行元素对换之后,再将第 1、3 列元素对换,然后应用拉普拉斯定理计算.

解

$$D_4=-\begin{vmatrix}0&b_3&a_3&0\\0&a_2&b_2&0\\a_1&0&0&b_1\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_3&b_3&0&0\\b_2&a_2&0&0\\0&0&a_1&b_1\\0&0&b_4&a_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_3&b_3\\b_2&a_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1&b_1\\b_4&a_4\end{vmatrix}$$

$$=(a_3a_2-b_3b_2)(a_1a_4-b_1b_4).$$

注　行列式中零元素较多时也可直接展开计算.(读者练习)

例 1.7　计算　$D_{n+1}=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

分析　这是一个每行元素和相等的行列式.将第 j $(j=2,3,\cdots n)$列都加到第一列,得到各元素都相等的一列.

解

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}x+na&a&a&\cdots&a\\x+na&x&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x+na&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{r_i-r_1(i=2,3,\cdots,n+1)}}\begin{vmatrix}x+na&a&a&\cdots&a\\0&x-a&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x+na)(x-a)^n.$$

注　这种行和相等的做法具有普遍性.

例 1.8　计算　$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\cdots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\cdots&x_2x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_nx_1&x_nx_2&\cdots&1+x_n^2\end{vmatrix}$.

分析　升阶法(加边法):对于某些行列式加上一行一列,再借助于某种特殊的行列式求解,也可起到化繁为简的作用.特别是加第一列为$(1,0,\cdots,0)^T$,则第一行的其他元素可以任意选择,若选择合适的元素,就可使消零化简更方便.本例先对 D_n“加边”再将行列式的第一行乘 $-x_i$ 加到第 $i+1$ 行$(i=1,2,\cdots,n)$.然后将第 j 列乘 $x_{j-1}(j=2,3,\cdots,n)$全加到第一列.

解

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^n x_i^2 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

例 1.9　计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1x_0 & a_2x_0^2 & \cdots & a_{n-1}x_0^{n-1} & a_n+x_0^n\\ 1 & a_1x_1 & a_2x_1^2 & \cdots & a_{n-1}x_1^{n-1} & a_n+x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_1x_{n-1} & a_2x_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}x_{n-1}^{n-1} & a_n+x_{n-1}^n\\ 1 & a_1x_n & a_2x_n^2 & \cdots & a_{n-1}x_n^{n-1} & a_n+x_n^n\end{vmatrix}$.

分析　利用拆项法:由行列式的性质,将 D_{n+1}拆开成两个行列式之和.提取每列的公因子,再应用范德蒙行列式进行计算.

解

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1x_0 & a_2x_0^2 & \cdots & a_{n-1}x_0^{n-1} & a_n\\ 1 & a_1x_1 & a_2x_1^2 & \cdots & a_{n-1}x_1^{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_1x_n & a_2x_n^2 & \cdots & a_{n-1}x_n^{n-1} & a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a_1x_0 & a_2x_0^2 & \cdots & a_{n-1}x_0^{n-1} & x_0^n\\ 1 & a_1x_1 & a_2x_1^2 & \cdots & a_{n-1}x_1^{n-1} & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & a_1x_n & a_2x_n^2 & \cdots & a_{n-1}x_n^{n-1} & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2\cdots a_{n-1})\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_2\cdots a_{n-1})\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例 1.10 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

分析 递推公式法:这种方法是建立所求的行列式 D_n 与低阶行列式 D_i ($i<n$)之间的关系式,再由这个关系式解出所求的行列式 D_n. 它特别适用于各行(列)所含元素的基本形式相同,如行和相等或列和相等的行列式. 该例将第 j ($j=2,3,\cdots,n$)列全加到第一列,然后按第一列展开,再利用递推法.

解 $$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=D_{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}$$
$$=D_{n-1}+1.$$

因为 $D_1=2$,所以,由上述递推关系得:$D_2=3,D_3=4,D_4=5,\cdots,D_n=n+1$.

例 1.11 证明 $D_n=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos n\alpha$.

分析 应用数学归纳法.

证 当 $n=1$ 时,命题显然成立.

若 $n=k$ 时,命题成立,即

$$D_k=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}=\cos k\alpha.$$

则当 $n=k+1$ 时,即

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

按第 $k+1$ 行展开,并将归纳假设代入,得

$$D_{k+1}=2\cos\alpha\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(k)}$$

$$-\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(k-1)}$$

$$=2\cos\alpha\cdot D_k-D_{k-1}=2\cos\alpha\cdot\cos k\alpha-\cos(k-1)\alpha=\cos(k+1)\alpha.$$

因此,根据数学归纳法原理,对任意正整数 n,都有 $D_n=\cos n\alpha$.

例 1.12　证明 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

分析　利用行列式乘法.

证

$$D_4^2=D_4D_4=D_4D_4^T=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$$

则　$D_4=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

因为,按行列式的计算知,a^4 的符号应为负,所以,$D_4=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

例 1.13 a、b 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1+x_2-4x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$$,仅有零解?有非零解?

分析 根据克莱姆法则的推论,当且仅当系数行列式 $D\neq 0$ 时仅有零解;$D=0$ 时有非零解.因此,只需计算行列式 D 的值.

解 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{vmatrix} \overset{r_i-r_1}{\underset{(i=2,3,4)}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & b-1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ a-1 & b-1 \end{vmatrix}=-5(b-1).$$

当 $D\neq 0$ 即 $b\neq 1$,a 为任意常数时,齐次线性方程组仅有零解.

当 $D=0$ 即 $b=1$,a 为任意常数时,齐次线性方程组有非零解.

例 1.14 求一个二次多项式 $f(x)$,使得 $f(1)=-1$,$f(2)=-3$,$f(-1)=9$.

分析 先构造线性方程组,再利用克莱姆法则解之.

解 设所求多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$,由已知条件得

$$\begin{cases} a+b+c=-1, \\ 4a+2b+c=-3, \\ a-b+c=9. \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-6,\ D_1=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-6,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}=30,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 9 \end{vmatrix}=-18.$$

$$a=\frac{D_1}{D}=1,\ b=\frac{D_2}{D}=-5,\ c=\frac{D_3}{D}=3,$$

因此,所求多项式为 $f(x)=x^2-5x+3$.

例 1.15 在已建立平面直角坐标系的平面上,给定两个不同的点 $M_1(x_1, y_1)$和 $M_2(x_2,y_2)$.用行列式表示通过 M_1,M_2 两点的直线方程.

分析 该例是克莱姆法则及其推论在几何上的应用.