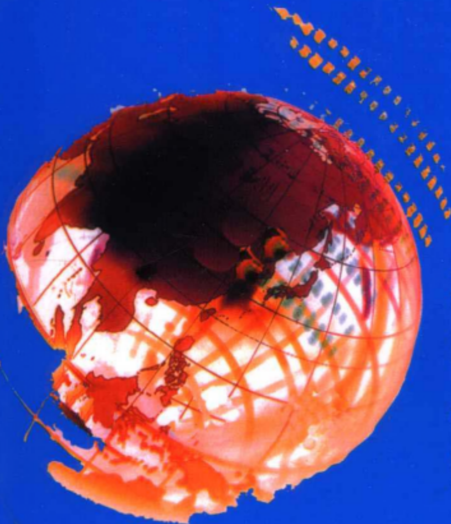
六年级

总主编 单墫 熊斌

奥数教程



本册主编 杭顺清

华东师范大学出版社

总主编 单墫 熊斌

奥数教程

(第三版)

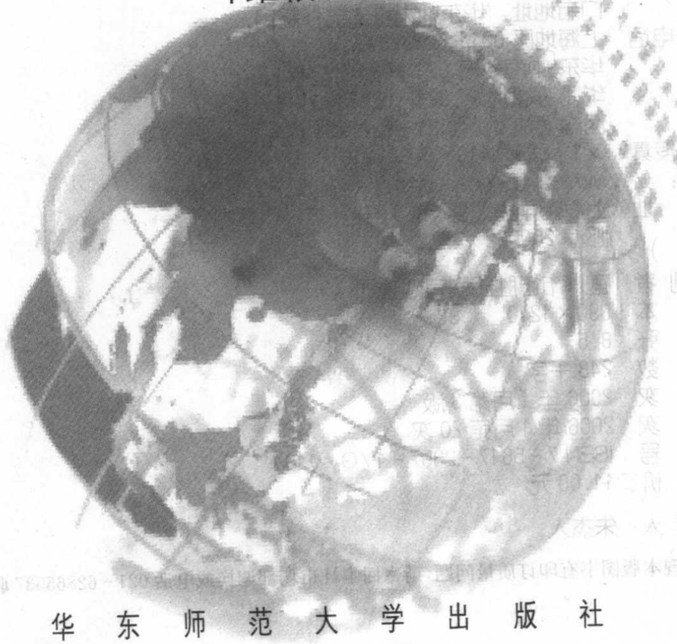
·六年级·

本册主编 杭顺清

参编者 郭凯福 庄国志 何强

陈毓明 沈军 吴士元

叶维根



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程.六年级/杭顺清主编.—上海:华东师范大学出版社,2000.11

ISBN 7-5617-2357-1

Ⅰ.奥... Ⅱ.杭... Ⅲ.数学课—小学—教学参考资料 Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第48989号

奥数教程 ·六年级·
(第三版)

总主编 单墫 熊斌
本册主编 杭顺清
策划组稿 倪明
责任编辑 审校部编辑工作组
特约编辑 肖启华
封面设计 高山
版式设计 蒋克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893
业务传真 021-62860410 62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社址 上海市中山北路3663号
邮编 200062

印刷者 宜兴市德胜印刷有限公司
开本 890×1240 32开
印张 8.5
字数 248千字
版次 2006年1月第3版
印次 2006年1月第20次
书号 ISBN 7-5617-2357-1/G·1104
定价 11.00元

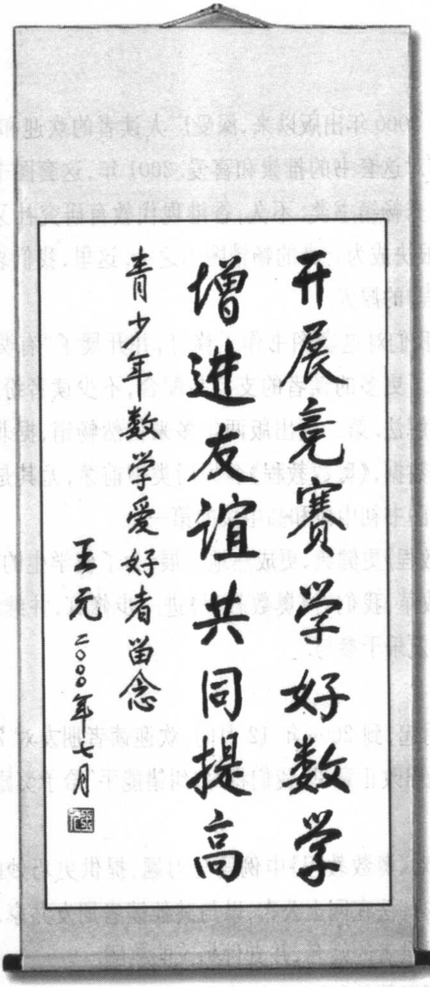
出版人 朱杰人

本 书 荣 获
第十届全国教育图书展
优秀畅销图书奖

《奥数教程》编委会

顾　问　王　元
主　编　单　墫　熊　斌
编　委　（按姓氏笔画为序）
冯志刚　刘诗雄
江兴代　余红兵
单　墫　杭顺清
胡大同　赵雄辉
倪　明　葛　军
熊　斌

杭顺清　上海市当代中学校长，上海市闸北区教育学院数学教研员，特级教师，中国数学奥林匹克高级教练，上海市中小学数学教学专业委员会常务理事．曾获得全国模范教师、上海市劳动模范等荣誉称号．主要著作有《小学生数学能力比赛指引》、《我学数学更聪明》、《小学生数学竞赛阶梯训练》、《奥林匹克竞赛指南》、《数学基础训练2000例》、《数学学习手册》等．



著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生致青少年数学爱好者

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”．但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好．的确，数学是中国人擅长的学科，如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属．

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势．

中国人能用一只手表示 1～10，而很多国家非用两只手不可．

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有 12 进制，60 进制的残余)．

中国文字都是单音节，易于背诵，例如乘法表，学生很快就能掌握，再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”．但外国人，一学乘法，头就大了．不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵．

圆周率 $\pi = 3.14159\cdots$．背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了．可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背 π 先背诗，我们看来简直自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法．

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色．从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生学习兴趣，启迪学生智慧．例如：

“一百个和尚一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解．中国却有多种算术解法，如将每个大和尚“变”成 9 个小和尚，100 个馒头表明小和尚是 300 个，多出 200 个和尚，是由于每个大和尚变小和尚，多变出 8 个，从而 $200 \div 8 = 25$ 即是大和尚人数．小和尚自然是 75 人，或将一个大和尚与 3 个小和尚编成一组，平均每人吃一个馒头．恰好与总体的平均数相等．所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少，即大和尚是 $100 \div (3+1) = 25$ 人．

中国人善于计算，尤其善于心算. 古代还有人会用手指计算(所谓"掐指一算"). 同时，中国很早就有计算的器械，如算筹、算盘. 后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中，我国的优势显然，所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理，在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算，我国有不少论著)，比希腊人稍逊一筹. 但是，中国人善于向别人学习. 目前我国中学生的几何水平，在世界上遥遥领先. 曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班，他们认为所教的几何内容太深，学生不可能接受，但听课之后，不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解，而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著. 在国际数学竞赛中，我国选手获得众多奖牌，就是最有力的证明. 从 1986 年我国正式派队参加国际数学奥林匹克以来，中国队已经获得了 11 次团体冠军. 成绩骄人. 当代著名数学家陈省身先生曾对此特别赞赏. 他说"今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛中获得第一. ……去年也是第一名. "(陈省身 1990 年 10 月在台湾成功大学的讲演"怎样把中国建为数学大国")

陈省身先生还预言:"中国将在 21 世纪成为数学大国. "

成为数学大国，当然不是一件容易的事，不可能一蹴而就，它需要坚持不懈的努力. 我们编写这套丛书，目的就是:(1)进一步普及数学知识，使数学为更多的青少年喜爱，帮助他们取得好的成绩;(2)使喜爱数学的同学得到更好的发展，通过这套丛书，学到更多的知识和方法.

"天下大事，必作于细. "我们希望，而且相信，这套丛书的出版，在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用. 本丛书初版于 2000 年，2003 年修订过一次，现根据课程改革的要求对各册再作不同程度的修订.

著名数学家、中国科学院院士、原中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词，我们表示衷心的感谢. 还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不会是现在这个样子.

单 墫 熊 斌

2005 年 11 月

目　　录

基础篇

提高篇

基础篇

第1讲

因式分解的方法(一)

一、知识要点和基本方法

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解.因式分解的基本方法有提取公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法.

把一个多项式因式分解，如果多项式的各项有公因式，就先提取公因式，公因式可以是数、单项式，也可以是多项式；如果各项没有公因式，再看能否直接运用公式或用十字相乘法分解，如果还不能分解，就试用分组分解法或其他方法.分解因式时，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止，结果一定是乘积的形式，每个因式都是整式，相同因式的积要写成幂的形式.

二、例题精讲

例1 把 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$ 分解因式，其中 n 是正整数.

解 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$

$=(x-y)^{2n}[(x-y)-(x-z)+2(y-z)]$

$=(x-y)^{2n}(y-z)$.

说明 n 是正整数时，$2n$ 是偶数，$(x-y)^{2n}=(y-x)^{2n}$；$2n+1$ 是奇数，$(x-y)^{2n+1}=-(y-x)^{2n+1}$.

例2 把下列各式分解因式：

(1) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$；

(2) $(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

分析 观察两个多项式的特点,第(1)题容易使人想到用平方差公式分解,第(2)题不妨用立方和 $[a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$ 或立方差 $[a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$ 公式试一试.

解 (1)
$$\begin{aligned}&(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2\\&=(a^2+9b^2-1)^2-(6ab)^2\\&=(a^2+9b^2-1+6ab)(a^2+9b^2-1-6ab)\\&=[(a+3b)^2-1][(a-3b)^2-1]\\&=(a+3b+1)(a+3b-1)(a-3b+1)(a-3b-1).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3\\&=[(ax-by)+(by-cz)][(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2]-(ax-cz)^3\\&=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2-(ax-cz)^2]\\&=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by+ax-2cz)(by-ax)]\\&=(ax-cz)(ax-by)(3cz-3by)\\&=3(ax-cz)(ax-by)(cz-by).\end{aligned}$$

说明 第(2)题如果先由 $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$ 推得 $m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$,把 $ax-by$ 视为 m,$by-cz$ 视为 n,则 $m+n=ax-cz$,从而能较简捷地将原式分解因式.另外,由立方和公式可推得 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)\cdot(c+a)$,变形得 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$,由这个公式也可将第(2)题分解因式.

例3 计算:$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$.

解 设 $\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=a$,则 $1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=1\underbrace{00\cdots0}_{n个0}+a=10^n+a$,

$a+1=10^n$.

$$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$$

$$=a\times a+10^n+a$$

$$=a(a+1)+10^n$$

$$=a\times10^n+10^n$$

$$=10^n(a+1)=10^{2n}.$$

说明 本题中设 $\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=a$，能使运算过程书写简便. 如果注意到 $1\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=2\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1$，那么原式 $=a^2+2a+1$，就能运用完全平方公式求出结果.

例4 已知 $2^{48}-1$ 可以被 60 与 70 之间的两个整数整除，求这两个整数.

解 $2^{48}-1=(2^{24})^2-1$

$$=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$$

$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$$

$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1).$$

易求得 $2^6+1=65$，$2^6-1=63$，而 $2^{12}+1>70$，$2^{24}+1>70$. 所以要求的两个整数为 63 和 65.

例5 已知 $1+x+x^2+x^3+x^4=0$，求 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1\,999}$ 的值.

解 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{1\,999}$

$$=(1+x+x^2+x^3+x^4)+(x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)+\cdots$$

$$+(x^{1\,995}+x^{1\,996}+x^{1\,997}+x^{1\,998}+x^{1\,999})$$

$$=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{1\,995})$$

$$=0.$$

说明 要求值的多项式有2 000 项，中间带有省略号，分组时

要弄清省略号中共有多少项，如何分组，这样最后一组才不会出错.

例 6 如图 1-1，立方体的每一个面上都写有一个自然数，并且相对两个面所写的二数之和都相等. 若 18 的对面写的是质数 a，14 的对面写的是质数 b，35 的对面写的是质数 c. 试求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

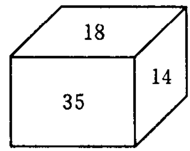


图 1-1

解 由题意可得

$$a+18=b+14=c+35.$$

所以 $\quad a-b=-4,\ b-c=21,\ c-a=-17.$

因为 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$

$$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$=\frac{1}{2}[(-4)^2+21^2+(-17)^2]$$

$$=373,$$

所以所求式的值为 373.

说明 本题中条件"a、b、c 是质数"，在求解中没有使用. 不过由这一条件及关系式 $18+a=14+b=35+c$，可以断定 c 的奇偶性一定与 a、b 的奇偶性不同，而 $a\neq b$，偶质数又只有 2 一个，故 $c=2$，从而 $a=19$，$b=23$.

例 7 把下列各式分解因式：

(1) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$；

(2) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$.

分析 (1)、(2)两题的多项式均无公因式可提取，也不能直接用公式法分解. 第(1)题从四项的特点看出应分组分解，第(2)题宜把 $x+y$、xy 各看成一个整体，去括号后再分组分解.

解 (1) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$

$$=(x^3+y^3)+(2x^2y+2xy^2)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y)$$

$$=(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

(2) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$

$$=(x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+1-2xy+x^2y^2$$

$$=[(x+y)^2-2(x+y)+1]-2xy(x+y-1)+x^2y^2$$

$$=(x+y-1)^2-2\cdot(x+y-1)\cdot xy+(xy)^2$$

$$=(x+y-1-xy)^2$$

$$=(x-1)^2(y-1)^2.$$

说明 将多项式分组的目的在于经过适当的分组后,原多项式能转化为可提取公因式,或可运用公式,或可用十字相乘等方法将其分解.

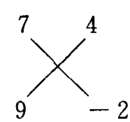
例 8 分解因式:

(1) $63x^2+22x-8$;

(2) $x^2+x+6y^2+3y+5xy$.

解 (1) $63x^2+22x-8$

$$=(7x+4)(9x-2).$$

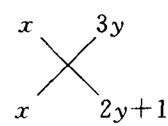


(2) $x^2+x+6y^2+3y+5xy$

$$=x^2+(5y+1)x+(6y^2+3y)$$

$$=x^2+(5y+1)x+3y(2y+1)$$

$$=(x+3y)(x+2y+1).$$



例 9 已知二次三项式 x^2-mx-8 (m 是整数)在整数范围内可以分解为两个一次因式的积,求 m 的可能取值.

解 根据条件,如果将-8分解为两个整数的积,那么这两个整

数的和即为$-m$.

因为-8分解为两个整数积的可能情形有

$(-1)\times 8$, $(-2)\times 4$, $(-4)\times 2$, $(-8)\times 1$.

所以$-m$的可能值为

$(-1)+8$, $(-2)+4$, $(-4)+2$, $(-8)+1$.

故m的可能取值有-7, -2, 2, 7共四个.

说明 如果题目的条件不是限定在整数范围内可以分解,那么m的取值不能用本题的解法.如果题目改为x^2-8x-m在整数范围内可以分解因式,那么只要将-8拆成两个整数的和(如$-50+42$, $-9+1$),这两个整数的积就等于$-m$,因此,符合条件的m有无数个.

例10 在黑板上写有一个缺系数和常数项的多项式:

$$x^3+\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$$

现有两个人做填数字游戏:第一个人在任一个空位内填上一个非零整数(可正可负),接着,第二个人在剩下的两个空位置中任选一个填上一个整数,最后,第一个人在余下的空位上填一个整数.

求证:不管第二个人怎样填数,第一个人总能使所得到的多项式可分解为三个一次因式的积,并且每个因式的x系数为1,常数项为整数.

证明 因为第一个人有选择任一个空位的主动权,所以他可以在x前的框内填上-1,这样,原多项式变为

$$x^3+\boxed{}\,x^2-x+\boxed{}$$

第二个人不管在哪一个框内填数a,第一个人只需在最后一个空框内填上第二个人所填数的相反数$-a$;这样,原多项式就变成了

$$x^3+ax^2-x-a,\ 或\ x^3-ax^2-x+a.$$

而
$$\begin{aligned}&x^3+ax^2-x-a\\=&x(x^2-1)+a(x^2-1)\\=&(x+a)(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& x^3-ax^2-x+a \\
= & x(x^2-1)-a(x^2-1) \\
= & (x-a)(x+1)(x-1).
\end{aligned}
$$

这就表明了第一个人总能使所填数符合要求.

练　习　题

A　组

一、选择题

1 如果多项式 $x^2+kx+\frac{1}{9}$ 是一个完全平方式,那么 k 的值是(　　).

(A) -3　　(B) 3

(C) $\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$或$-\frac{2}{3}$

2 多项式 $2a(a^2+a+1)+a^4+a^2+1$ 分解因式的结果为(　　).

(A) $(a^2+a-1)^2$　　(B) $(a^2-a+1)^2$

(C) $(a^2+a+1)^2$　　(D) $(a^2-a-1)^2$

3 已知 x^2+ax-6 可分解为两个一次因式的积,且 $a<0$, 则 a 的值为(　　).

(A) -2 和 -3　　(B) -7 和 -4

(C) -1 或 -5　　(D) 任意负有理数

4 若 n 是奇数,则 $\frac{1}{4}(n^2-1)$ (　　).

(A) 一定是奇数

(B) 一定是偶数

(C) 可能是奇数,也可能是偶数

(D) 可能是整数,也可能是分数(分母不是 1)

5 n 是某一自然数,代入代数式 n^3-n 中计算其值时,4 个同学算出的结果分别如下,其中正确的结果只能是(　　).

(A) 388 944　　(B) 388 945　　(C) 388 954　　(D) 388 948