成人高校理工科基础课教材

简明
高等数学

上册

林纬华　主编

东北师范大学出版社

成人高校理工科基础课教材

简明高等数学

上　册

林纬华　主编

东北师范大学出版社

内容提要（上册）

本书是由全国一些成人高等院校经上海、长春两次会议确定编写的成人高校理工科基础课教材之一。

本书内容包括：函数、函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及积分应用、微分方程等，每章开头均有内容提要、章后有包括内容小结、例题选解、习题及习题答案在内的学习指导。

本书内容通俗易懂、重点突出、少而精、既照顾到了知识的系统性和科学性，又兼顾了通俗性。是一本成人理工科基础课较为理想的教材。

简明高等数学

上册

林纬华　主编

东北师范大学出版社出版
（吉林省长春市斯大林大街自由广场）
吉林省新华书店发行
吉林科技大学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32，印张：15　字数：300,000字
1986年7月第一版　1986年7月第一次印刷
印数：1——9,000册
统一书号：13334·12　定价：2.70元

前　言

近年来，我国成人高等教育发展很快，教学中遇到的难题之一就是缺少一套具有适合成人大专院校特点的教材。为此，一九八五年四月全国一些成人高等院校在上海召开会议，会议上商定尽快编写一套成人高校理工科基础课教材。经过认真准备，于同年六月在长春南湖召开了本套教材的编写会议，与会同志以原教育部颁发的成人高校理工专科教学计划和各科教学大纲为依据，经过充分研究讨论，制定出本套教材编写的指导思想和基本原则以及各学科的编写大纲和细则，本书就是这次会议确定编写的教材之一。

本书内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分及积分应用、微分方程等。

在编写过程中，考虑到成人的特点及理工科教学的实际，我们对教材内容作了认真精选，在照顾到知识的全面性和系统性的同时，又尽量突出重点，作到了少而精。

考虑到成人学员除上课外能用于学习的时间较少，与教师的联系不多，同学之间相互交流也不方便的困难。为了便于自学，我们在叙述上力求通俗易懂，详细，并且每章前都有内容提要，章后有包括内容小结、例题选解的学习指导和习题及习题答案。既可供教师讲课或习题课时选用，又可供学员课后练习。

本书由上海第二教育学院林纬华同志主编，参加编写的有：林纬华（第一、二章）、杨珊华（第三章）、计惠康（第四章）、徐力（第五章）、王九春（第六、七章）、鲜于方

圣（第八章）。

本书全部插图由陈岩波同志绘制。

本书由吉林工业大学付教授冯鹏起同志主审。

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免出现缺点，欢迎广大读者批评指正。

编　　　者

一九八六年三月

目　　录

第一章　函　　数 …………………………………………（1）

§1.1 实　　数 ……………………………………………（1）

一、实数与数轴（1）二、数集（3）三、实数的绝对值（7）

§1.2 函　　数 ……………………………………………（9）

一、常量与变量（9）二、函数概念（11）三、函数表示法（15）四、函数举例（18）五、数列整变量函数（21）

§1.3 函数的几种特性 ……………………………………（22）

一、函数的有界性（22）二、函数的单调性（24）三、函数的奇偶性（25）四、函数的周期性（27）

§1.4 反函数与复合函数 …………………………………（28）

一、反函数（28）二、复合函数（31）

§1.5 初等函数 ……………………………………………（32）

一、幂函数（32）二、指数函数与对数函数（33）三、三角函数与反三角函数（35）四、初等函数（39）

学习指导 …………………………………………………（39）

一、内容小结（39）二、例题选解 ……………………（41）

习题 ………………………………………………………（50）

第二章　极限与连续 ……………………………………（55）

§2.1 数列的极限 …………………………………………（56）

§2.2 函数的极限 …………………………………………（62）

一、$x \to x_0$时函数$f(x)$的极限（62）二、$x \to \infty$时函数$f(x)$的极限（67）

§2.3 ）无穷小与无穷大 …………………………………（69）

一、无穷小（69）二、无穷大（72）

§2.4 极限运算法则 …………………………………………… (74)
§2.5 两条极限存在定理　两个重要极限 ………………… (80)
§2.6 无穷小的比较 …………………………………………… (85)
§2.7 函数的连续性与间断点 ………………………………… (89)
一、函数的连续性（89）二、函数的间断点及其分类（91）
§2.8 连续函数的运算与复合 ………………………………… (93)
一、函数和、差、积、商的连续性（93）二、反函数与复合函数的连续性（94）
§2.9 初等函数的连续性 ……………………………………… (96)
§2.10 闭区间上连续函数的性质 …………………………… (97)
一、最大值与最小值定理（97）二、介值定理（99）
学习指导 ……………………………………………………… (101)
一、内容小结(101) 二、例题选解 ………………………… (105)
习题 ………………………………………………………… (115)
第三章　导数与微分 ………………………………………… (121)
§3.1 导数概念 ………………………………………………… (121)
一、两个具体问题(121) 二、导数定义(124) 三、导数的几何意义(129) 四、函数可导性与连续性的关系（131）
§3.2 求导法则 ………………………………………………… (133)
一、函数的和、差、积、商的导数(133) 二、反函数的求导法则（138）三、复合函数的求导法则（140）
§3.3 高阶导数 ………………………………………………… (146)
§3.4 参数方程所确定的函数的导数 ……………………… (149)
§3.5 函数的微分 ……………………………………………… (152)
一、微分的定义及其与导数的关系（152）二、微分的几何意义（156）三、微分的运算法则（157）
§3.6 微分在近似计算中的应用 …………………………… (160)
学习指导 ……………………………………………………… (162)

一、内容小结(162)二、例题选解……………………… (165)
习题 ………………………………………………… (175)
第四章 导数的应用……………………………… (184)
§4.1 中值定理 ……………………………………… (184)
§4.2 洛必达法则 ………………………………… (193)
§4.3 函数单调性的判别法 ……………………… (202)
§4.4 函数的极值问题 …………………………… (206)
一、极值的判别法（207）二、函数最大值与最小值的求法（213）
学习指导………………………………………… (217)
一、内容小结（217）二、例题选解……………… (220)
习题 ………………………………………………… (226)
第五章 不定积分………………………………… (230)
§5.1 原函数与不定积分 ………………………… (230)
§5.2 基本积分表与不定积分的运算法则 ……… (235)
§5.3 求不定积分的基本方法 …………………… (242)
一、换元积分法（243）二、分部积分法（254）
§5.4 有理函数和可化为有理函数的积分法 …… (260)
一、有理函数的分解（260）二、有理函数的积分（261）三、三角函数有理式的积分法（267）四、简单无理函数的积分法（271）
学习指导………………………………………… (275)
一、内容小结(275)二、例题选解 ……………… (276)
习题 ………………………………………………… (282)
第六章 定 积 分………………………………… (287)
§6.1 定积分的概念 ……………………………… (287)
一、两个典型问题（287）二、定积分的定义（292）
§6.2 定积分的性质 中值定理 ………………… (296)

§6.3 微积分基本定理 …………………………………………… (301)
一、积分上限函数及其性质（301）二、微积分基本定理（303）
§6.4 定积分的换元法 …………………………………………… (305)
§6.5 定积分的分部积分法 ……………………………………… (312)
§6.6 广义积分 …………………………………………………… (316)
一、无穷限广义积分（316）无界函数广义积分（319）
学习指导…………………………………………………………… (232)
一、内容小结(322)二、例题选解 ……………………………… (326)
习题 ………………………………………………………………… (331)
第七章 定积分的应用……………………………………………… (336)
§7.1 定积分的微元法 …………………………………………… (336)
§7.2 平面图形的面积 …………………………………………… (340)
§7.3 体积 ………………………………………………………… (346)
一、平行截面面积为已知的立体的体积（346）二、旋转体的体积（348）
§7.4 平面曲线的弧长与曲率 …………………………………… (350)
一、平面曲线的弧长（350）二、平面曲线的曲率（353）
三、曲率圆与曲率三半径（357）
§7.5 定积分在物理中的应用 …………………………………… (359)
一、变力做功问题（359）二、水压力问题（362）
§7.6 函数的平均值 ……………………………………………… (365)
学习指导…………………………………………………………… (368)
一、内容小结（368）二、例题选解……………………………… (372)
习题 ………………………………………………………………… (383)
第八章 微分方程…………………………………………………… (387)
§8.1 基本概念 …………………………………………………… (387)
§8.2 可分离变量方程 …………………………………………… (392)

§8.3 一阶线性方程 …………………………………………… (397)
§8.4 可降阶的二阶方程 ………………………………… (402)
一、$y''=f(x,y')$型方程 (402) 二、$y''=f(y,y')$型方程 (403)
§8.5 二阶线性方程通解的结构 ………………………… (407)
§8.6 二阶常系数线性齐次方程 ………………………… (411)
§8 7 二阶常系数线性非齐次方程 ……………………… (415)
一、$f(x)=ae^{\lambda x}$的情形 (416) 二、$f(x)$为x的多项式的情形 (418) 三、$f(x)=a\cos x+\sin x$的情形 (421)
学习指导……………………………………………………… (423)
一、内容小结 (423) 二、例题选解 ………………………… (428)
习题 …………………………………………………………… (436)
习题答案……………………………………………………… (445)

第一章 函 数

客观世界的事物都是互相联系、互相制约的，这种现象在数学中就表现为量与量之间有一定的关系，其中最常见的情形可用函数来描述。函数是高等数学研究的主要对象，实数是研究函数的基础，本章把有关实数与函数的基本知识作必要的复习与介绍。

§1.1 实 数

一 实数与数轴

正负整数、分数、和零统称为有理数，有理数可以表示为有限或无限循环小数的形式。无限不循环小数称为无理数，例如$\sqrt{2}=1.14235\cdots$和 $\pi=3.141592\cdots$等都是无理数。有理数和无理数统称为实数。各种数之间的关系可表示如下：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\end{cases}
$$

实数有大小顺序，就是说任何两个实数a和b，下面三个关系中有一个而且只有一个成立：

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

为了使数和形结合起来，我们引进数轴概念。数轴是一条直线，在它上面确定了一个点O称为原点，用箭头规定了直线的正方向，同时规定一个长度单位。这种具有原点，正方向和长度单位的直线叫做数轴。通常构成的数轴是水平的，并取自左至右的方向为正方向（图1.1）。

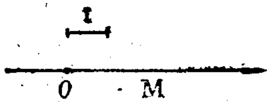

图1.1

任一实数x，可与如下方法确定的一点M相对应：当x为正数时，点M在O点之右侧，当x为负数时，点M在O点之左侧，当$x=0$时，M点与原点O重合；不论哪种情形，M到O的距离都等于$|x|$。显然当x为给定时，数轴上有且只有唯一一点M与之对应；反之，对于数轴上任一点M，都有且只有一个实数x，使M正好是x所对应的点。这样一来，全体实数就和数轴上的所有点之间建立了一一对应关系（证明

略）。每个实数可表示为数轴上一个确定的点，反之数轴上每个点也表示一个确定的实数。数轴上点M所对应的实数x称为点M的坐标。今后我们不再区分实数和它对应的点，而用同一个符号来表示它们，有时说“实数x”，有时说“点x”。这些说法不会引起混乱。

数轴上坐标为有理数的点称为有理点，坐标为无理数的点称为无理点。任何两个实数之间都含有无穷多个有理数，也含有无穷多个无理数，这分别称为有理数在实数中稠密和无理数在实数中稠密。

实数与数轴上的点一一对应，可见实数充满数轴而没有“空隙”，这种性质称为实数的连续性。实数具有连续性是实数与有理数的一个基本区别，在后面的学习中经常要用到这一性质。

关于实数的运算，大家都比较熟悉，这里不再详述。

二 数 集

1. 集合的基本知识

通常把一些具有某种共同特性的对象的全体叫做集合。例如教室里所有的桌子构成一个集合，气球内所有气体分子构成一个集合，平面上所有等腰三角形也构成一个集合。构成集合的对象称为该集合的元素。当集合的元素是数时，这一集合称为数集合，简称数集。下面介绍关于集合的一些基本知识。

通常用一个大写字母表示集合。集合的具体表示一般有两种方法：

第一种是列举法，就是把集合中的元素一一列举出来，如$A=\{1, 3, 5, 7, 9,\}$就表示A这个集合是由五个元素1，3，5，7，9构成的。列举法的优点在于一看就知道这一集合含有哪些元素，但这种表示法对元素很多，特别是元素有无限多（称为无限集）的集合不能适用。

第二种是描述法，就是用给出描述集合元素应具有的共同特征的方法来表示集合，一般形式是

$$A=\{x\mid x\text{应满足的条件}\}$$

它表示满足竖线后条件的所有x构成的集合，例如全体自然数集合N可写成$N=\{n\mid n\text{为自然数}\}$；又如$A=\{x\mid \sqrt{1-x^2}=0, x\text{为实数}\}$，$A$就是方程$\sqrt{1-x^2}=0$的所有实根构成的集合，即$A=\{-1, 1\}$。

如果a是集合A的元素，就说a属于A，记为$a\in A$，如果b不是A的元素，就说b不属于A，记成$b\overline{\in}A$或$b\notin A$。例如$2\in\{2, 4, 6\}$，而$3\overline{\in}\{2, 4, 6\}$。

如果两集合A和B由相同的元素构成，就称两集合为相等的，记为$A=B$。例如$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{x\mid x\text{为不超过4的自然数}\}=\{1, 2, 3, 4\}$，不难看出，$A=B$。

不含有任何元素的集合称为空集，记为ϕ，例如$\{x\mid \sin x>1, x\text{为实数}=\phi\}$。应当注意，$\{0\}\neq\phi$，因为它含有一个元素为0。

若集合A的每一个元素也是集合B的元素，就称集合A包含于集合B或集合B包含集合A，记为$A\subset B$，此时A称为B的子集，例如N是全体自然数的集合，Q是全体有理数的集合，则$N\subset Q$。从包含关系的定义可以知道，当$A=B$时，$A\subset B$且$B\subset A$；反之如果$A\subset B$同时$B\subset A$，则$A=B$.

如果$A\subset B$但$A\neq B$，则称A为B的真子集。例如整数集就是有理数集的真子集。

由两个集合可以得到一些新的集合，特别要提出的是两个集合的并与交。以集合A与集合B的所有元素为元素构成的集合称为A与B的并集，简称为A与B的并，记作$A\cup B$。由集合A与集合B的公共元素为元素构成的集合称为A与B的交集，简称为A与B的交，记作$A\cap B$。例如，$A=\{0, 1, 3, 5\}$，$B=\{0, 1, 2, 3\}$，则$A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 5,\}$，$A\cap B=\{0, 1, 3\}$。

如果A与B没有公共元素，即$A\cap B=\phi$，则称集合A与B不相交。例如$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{4, 5, 6\}$，则$A\cap B=\phi$。

2. 区间与邻域

有些数集在高等数学中经常要用到，有必要加以讨论并给以专门名称和记号。本书中讲到数集，除非有特别声明，都是指实数的集合。至于点集，一般也是指数轴上的点的集合。由于实数与数轴上的点有一一对应关系，所以为了方便，对数集与点集常不加区分。

区间是介于两实数之间的一切实数构成的数集，这两个实数称为区间的端点。

设a与b为两实数，且$a<b$，数集$\{x|a<x<b\}$称为开区间，用记号(a, b)表示，即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}$$

数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，用记号$[a, b]$表示。数集$\{x|a\leqslant x<b\}$与$\{x|a<x\leqslant b\}$都称为半开半闭区间，分用别记号$[a, b)$与$(a, b]$表示。

在数轴上，区间是介于两点之间的所有点的集合，也就是一个线段，这两点就是区间的端点。表示区间的线段是否包含端点，要根据区间的类型而定。

对上述四种类型的区间，都称数 $b-a$ 为该区间的长度。

除了上面四种有限区间外，还经常要考虑无穷区间，引入端点记号 $+\infty$ 与 $-\infty$，并规定各种无穷区间记号的意义如下：

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\text{为实数}\}$$

$$(-\infty, a)=\{x\mid x<a\}$$

$$(-\infty, a]=\{x\mid x\leqslant a\}$$

$$(b, +\infty)=\{x\mid x>b\}$$

$$[b, +\infty)=\{x\mid x\geqslant b\}$$

这里应注意，符号"$+\infty$"与"$-\infty$"分别读作"正无穷大"与"负无穷大"，它们不是数，不能参与数的运算。

在数轴上，无穷区间可用全直线或射线来表示，无穷区间没有长度，有时也说它的长度是无穷大。数学上，为了在某一点近旁讨论问题，下面再来介绍点的邻域概念，点 a 的邻域是指以点 a 为中点的开区间，显然点 a 有无穷多个邻域。更确切地说，对任一正数 δ，开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的一个 δ 邻域，这里数 δ 称为该邻域的半径。点 a 的以 δ 为半径的邻域即 a 的 δ 邻域常简记为 $U(a, \delta)$ 有时不需要突出邻域的半径，就常用 $U(a)$ 表示 a 的某一个邻域。

在 a 点的邻域中去掉 a 点后余下的点构成的点集称为 a 点的一个空心邻域（或称去心邻域），记为 $U^0(a, \delta)$，实际上就是两个开区间的并

$$U^0(a,\ \delta)=(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\delta)$$

邻域概念是与一个点（即它的中点）密切联系的，笼统地说“给定一个邻域”是不确切的，必须说给定某点的一个邻域。说“开区间就是邻域”也是不妥的，应该说“开区间是该区间中点的一个邻域”。

点 a 的邻域在数轴上就是一个以 a 为中点的线段，该线段不包含端点，邻域的半径就是该线段长的一半。

三、实数的绝对值

实数x的绝对值记作$|x|$，它是如下定义的一个非负实数

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{当}x\geqslant 0\text{时}\\ -x, & \text{当}x<0\text{时}\end{cases}$$

例如$|2|=2$，　$|0|=0$，　$|-3|=3$。

数x的绝对值$|x|$就是数轴上点x与原点 0 的距离。

从定义可知关系式$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$对任何实数$x$都成立。事实上，如果$x\geqslant 0$，有$-|x|<x=|x|$，如果$x<0$，有$-|x|=x<|x|$，因此总有$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$。

带有绝对值的不等式$|x|<a$与不等式$-a<x<a$是等价的，这就是说，如果$|x|<a$，一定有$-a<x<a$；反之，如果$-a<x<a$，一定有$|x|<a$。这从数轴上看是十分明显的，因为$|x|<a$表示点x到原点o的距离小于a，这种点x必位于开区间$(-a,\ a)$内，即$-a<x<a$；反过来，如果$-a<x<a$，则x位于开区间$(-a,\ a)$内，它到原点距离小于a，即$|x|<a$。与此类似，不等式$|x|\leqslant a$与$-a\leqslant x\leqslant a$