



普通高等教育“十五”国家级规划教材

微积分学 简明教程

(第二版) (下册)

曹之江 陈国庆 朱瑞英 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分学简明教程.下册.第二版/曹之江,陈国庆,
朱瑞英编著. —北京:高等教育出版社,2005.6

ISBN 7-04-016621-6

I. 微... II. ①曹...②陈...③朱... III. 微积
分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026827 号

策划编辑 马 丽 责任编辑 姚 晖 封面设计 王凌波
责任绘图 朱 静 版式设计 张 岚 责任校对 朱惠芳
责任印制 杨 明

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
			http://www.landaco.com.cn
经 销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	版 次	2000 年 7 月第 1 版
印 刷	中国农业出版社印刷厂		2005 年 6 月第 2 版
开 本	787×960 1/16	印 次	2005 年 6 月第 1 次印刷
印 张	27.25	定 价	31.10 元
字 数	510 000		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16621 - 00

内 容 提 要

本书系教育部原面向 21 世纪课程教材《微积分简明教程》(下册)的第二版。全书包含八章和附录,内容包括:无穷和,函数的无穷和构造,含参数积分所定义的函数,多变量微分学,多变量 Riemann 积分的概念,多变量 Riemann 积分的计算,域内积分与边界积分之间的联系,外微分,空间解析几何概要。其中无穷和、函数的无穷和构造、含参数积分所定义的函数三章由曹之江撰写,其余五章和附录属本书新编,由陈国庆撰写。全书取材适中,说理透彻,主干脉络清晰,叙述简明流畅,并注重结合物理背景和数学思想的历史发展,对传统的微积分内容采用了新颖的讲法。整体内容倡导逻辑思维、形象思维、直觉思维相结合的启发式教学,体现教学内容的先进性、理论高度和体系新颖性的同时,减轻记忆负担,提高教学效率。

本书可作为数学类本科专业数学分析课程教材,同时(略去注*内容)可作为理工科大学数学课程教材。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第七章 无穷和	1
§1 数项级数	1
1.1 基本概念	1
*1.2 Cauchy 收敛准则	5
练习题 7.1	5
§2 正项级数	6
2.1 第一比较判别法	6
2.2 第二比较判别法	11
练习题 7.2	14
§3 变号级数	16
3.1 绝对收敛与条件收敛	16
3.2 交错级数	17
*3.3 Abel 与 Dirichlet 判别法	18
练习题 7.3	21
*§4 无穷级数的重排	21
4.1 条件收敛级数的正项分解	21
4.2 级数的 Riemann 重排	23
练习题 7.4	26
*§5 无穷和的乘积	27
练习题 7.5	31
复习题七	31
<hr/>	
第八章 函数的无穷和构造	33
§1 用无穷和构造新函数	33
1.1 函数项无穷级数所定义的函数	33
1.2 一致收敛性	35
1.3 一致收敛判别准则	37
1.4 函数的无穷和所构造的函数	39
练习题 8.1	41
§2 无穷次的多项式——幂级数	42

2.1 收敛半径	42
2.2 由幂级数所定义的函数	46
练习题 8.2	48
§3 初等函数的幂级数构造	48
3.1 无限光滑函数与幂级数	48
3.2 基本初等函数的幂级数表示	50
练习题 8.3	58
§4 用幂级数表示微分方程的解	59
练习题 8.4	61
§5 周期振动的谐波分析法	62
5.1 谐波分析——周期函数的三角展开	62
5.2 三角级数的均方逼近	69
5.3 Fourier 系数的无穷小性质	72
5.4 Fourier 级数的逐项可积性	73
练习题 8.5	76
* §6 Fourier 级数的逐点收敛性	77
6.1 Dirichlet 积分公式和 Riemann-Lebesgue 定理	77
6.2 Dini 条件与 Fourier 级数的收敛性	81
练习题 8.6	87
* §7 Fourier 积分和 Fourier 变换	87
7.1 Fourier 级数的复数形式	87
7.2 Fourier 积分与 Fourier 变换	88
练习题 8.7	90
复习题八	90
<hr/>	
第九章 含参数积分所定义的函数	92
§1 含参数的常义积分	92
1.1 含参数的积分和	92
1.2 含参数常义积分所定义的函数	94
练习题 9.1	98
* §2 含参数的广义积分	99
2.1 含参数广义积分的一致收敛性	99
2.2 含参数广义积分所定义的函数	101
2.3 Euler 积分	109
练习题 9.2	114

复习题九	115
<hr/>	
第十章 多变量微分学	117
§1 基本概念和记号	117
1.1 n 维 Euclid 空间 \mathbb{R}^n	117
1.2 矩阵	122
1.3 张量与多元多项式	126
1.4 向量的极限	128
1.5 \mathbb{R}^n 中的集合	130
练习题 10.1	133
§2 多变量实值函数及其极限	135
2.1 多变量实值函数的概念	135
2.2 多变量实值函数的极限	138
*2.3 函数的收敛与一致收敛	140
练习题 10.2	142
§3 多变量实值函数的连续性	143
练习题 10.3	145
§4 多变量实值函数的导数与微分	146
4.1 可微与导数	146
4.2 方向可微与方向导数	151
4.3 可偏导与偏导数	153
4.4 可微、方向可微与可偏导之间的关系	156
4.5 函数的光滑性	161
练习题 10.4	162
§5 向量函数的导数与微分	164
5.1 向量函数及其连续性	164
5.2 向量函数的导数和微分	166
练习题 10.5	168
§6 矩阵和张量函数及其导数	169
§7 求导法则	170
练习题 10.7	175
§8 多变量实值函数的高阶导数	176
8.1 高阶偏导数	176
8.2 高阶导数与高阶微分	180
8.3 高阶方向导数	183

练习题 10.8	185
§ 9 微分中值定理与 Taylor 公式	186
9.1 实值函数的微分中值定理与 Taylor 公式	186
*9.2 向量函数的微分中值定理	190
练习题 10.9	193
§ 10 反函数和隐函数定理	193
10.1 反函数定理	193
10.2 隐函数定理	197
10.3 隐微分法	200
10.4 函数相关性	202
练习题 10.10	205
§ 11 光滑几何	207
11.1 \mathbb{R}^3 中曲面的切平面和法向量	207
11.2 \mathbb{R}^3 中曲线的切线与法平面	211
*11.3 曲线的曲率	214
*11.4 曲面沿给定方向上的曲线	216
练习题 10.11	217
§ 12 凸函数与最优化初步	218
12.1 凸函数与单调映射	218
12.2 最优化问题的提法	221
12.3 无约束极小化	223
12.4 等式约束极小化	231
12.5 光滑函数在有界闭集上的最大值和最小值	237
练习题 10.12	242
<hr/>	
第十一章 多变量 Riemann 积分的概念	244
§ 1 $\mathbb{R}^n (n \leq 3)$ 中的几何形体及其度量	244
1.1 曲线的长度	245
1.2 平面区域的面积、空间区域的体积	247
1.3 曲面的面积	248
§ 2 多变量 Riemann 积分的概念	249
2.1 多变量 Riemann 积分的定义	250
2.2 关于积分术语、积分符号和微元法	251
练习题 11.2	253
§ 3 函数的 Riemann 可积性	254

§ 4 多变量 Riemann 积分的性质	255
练习题 11.4	257
§ 5 多变量 Riemann 积分的具体形式	258
5.1 二重积分	258
5.2 三重积分	260
5.3 第一型曲线积分——对弧长的曲线积分	261
5.4 第二型曲线积分——对坐标的曲线积分	262
5.5 第一型曲面积分——对面积的曲面积分	266
5.6 第二型曲面积分——对坐标的曲面积分	267
练习题 11.5	273
<hr/>	
第十二章 多变量 Riemann 积分的计算	275
§ 1 二重积分的计算	275
1.1 平面区域的正则剖分	275
1.2 化二重积分为一元累次积分	278
1.3 二重积分的变量替换	284
练习题 12.1	291
§ 2 三重积分的计算	293
2.1 空间区域及其正则剖分	293
2.2 化三重积分为累次积分	294
2.3 三重积分的变量替换	296
练习题 12.2	301
* § 3 广义重积分	303
3.1 无界区域上的广义二重积分	303
3.2 无界函数的广义二重积分	305
练习题 12.3	305
§ 4 第一型曲线积分的计算	306
练习题 12.4	308
§ 5 第二型曲线积分的计算	309
练习题 12.5	311
§ 6 第一型曲面积分的计算	312
6.1 光滑曲面的分析表述	312
6.2 化第一型曲面积分为二重积分	315
练习题 12.6	322
§ 7 第二型曲面积分的计算	323

7.1 积分域为正则曲面情形	323
7.2 积分域为参数方程表示的光滑曲面情形	325
7.3 第二型曲面积分计算举例	326
练习题 12.7	330
§ 8 多变量 Riemann 积分变量替换公式小结	330
<hr/>	
第十三章 域内积分与边界积分之间的联系	334
§ 1 Green 公式	334
练习题 13.1	339
§ 2 梯度映射与平面曲线积分路径无关性	340
练习题 13.2	345
§ 3 Stokes 公式	345
练习题 13.3	351
§ 4 梯度映射与空间曲线积分路径无关性	351
练习题 13.4	353
§ 5 Gauss 公式	353
练习题 13.5	359
<hr/>	
*第十四章 外微分	361
§ 1 外积与外微分式	361
§ 2 外微分	364
§ 3 外微分的应用	365
<hr/>	
附录一 空间解析几何概要	371
§ 1 向量代数	371
1.1 向量概念	371
1.2 向量加法	371
1.3 向量数乘	372
1.4 共线与共面	373
练习题 A.1	373
§ 2 向量的内积、外积与混合积	374
2.1 内积	374
2.2 外积	375
2.3 混合积	376
练习题 A.2	377

§ 3 向量的坐标表示	377
练习题 A. 3	378
§ 4 用坐标进行向量运算	379
4.1 线性运算	379
4.2 内积	379
4.3 外积	380
4.4 混合积	380
练习题 A. 4	381
§ 5 三维 Euclid 空间 \mathbb{R}^3	382
练习题 A. 5	383
§ 6 \mathbb{R}^3 中的平面与直线	383
6.1 平面方程	383
6.2 直线方程	385
6.3 相互关系	386
练习题 A. 6	388
§ 7 \mathbb{R}^3 中的曲面与曲线	390
7.1 图形与方程	390
7.2 柱面	391
7.3 锥面	391
7.4 回转面	392
7.5 椭球面	394
7.6 双曲面	395
7.7 抛物面	397
7.8 \mathbb{R}^3 中的坐标变换和二次曲面	399
练习题 A. 7	401
<hr/>	
附录二 练习题答案	403

第七章 无穷和

§ 1 数项级数

1.1 基本概念

假如把数学当作为一种运算的科学的话,则微积分学本质上乃是一种涉及超越加、减、乘、除及乘方、开方等代数运算的运算科学.例如在第一章里,我们所提到的基元函数——三角与反三角函数、指数与对数函数以及无理指数的幂函数等,都代表了一种超越运算,而且我们已经把这几类特殊的超越函数规范化了,使它们成为构造其他各种衍生的超越函数(即所谓初等函数)的基元.除此以外,我们在数学物理以及各种应用科学领域里,还将遇到各种代表着千万种不同的超越运算的非初等函数.于是为了使得微积分学成为一种合理而有效的运算科学,我们必须做到:(1)对所有这些规范的或未规范的“超越运算”,作出严格的既合乎逻辑又合乎经验的理论;(2)指出如何去实现这些“超越运算”的确实途径.由于我们经验所及的运算仅仅是代数运算,因此超越运算的诠释,事实上就是超越函数的代数化,即如何用代数运算逼近和表现超越运算.本章与下章,我们将从严格的意义上讨论并解答上述问题.

令 $\{u_n\}$ 为实数列. 则它的无穷项形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数,简称级数. u_n 称为级数的通项(或一般项).

对应于一个无穷级数,可有一个相应的部分和序列 $\{S_n\}$, 其中

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

反过来, 对于一个任给的序列 $\{S_n\}$, 可以对应有一个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中 $u_1 = S_1, u_n = S_n - S_{n-1} (n=2, 3, \cdots)$, 它以 $\{S_n\}$ 为部分和序列. 由此可见, 无穷级数的理论, 与序列变量的理论息息相关.

定义 1.1 令 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为无穷级数, $\{S_n\}$ 为其部分和序列. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ 存在, 则称 S 为无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和, 记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 此时无穷级数称为是收敛的, 否则称为是发散的.

例 1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \cdots$. 注意到 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 于是得部分和

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

从而有 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, 按定义知级数收敛, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

例 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \cdots$.

此时可有 $S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ 为奇数,} \\ 0, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 发散.

例 1.3 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$.

此时 $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1, \\ n, & r = 1. \end{cases}$

于是知当 $|r| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$, 级数收敛; 当 $|r| \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 级数发散.

由上面论述可知, 一个无穷级数, 只有当它是收敛时, 才有“和”. 因此“无穷和”与我们寻常所了解的有限项相加, 是本质上不同的. 这意味着对于无穷和的任何运算性质, 必须从数学上重新经过严密审定, 而不能凭经验去随意运作. 这

里,我们先来考虑一下无穷和有哪些与有穷和相似的运算性质.

定理 1.1

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, a 为任一常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 更改或增、减有限项的值, 不改变级数原来的收敛、发散性.

证明仅需运用序列极限的简单运算性质, 读者可自行作出.

对于一个有限项组成的和, 若我们在和式中对被加项预先作任意的组合, 然后再求和, 则总的和值不变. 例如

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + a_6, \end{aligned}$$

这称为代数和的结合律. 对于无穷和而言, 我们指出, 上述的“结合律”仍然成立.

设给定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 我们对无穷的被加项在不更动项的前后顺序的情况下,

预先作任意的组合再求和, 例如对 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 作组合求和

$$\begin{aligned} & (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \\ &= v_1 + v_2 + \cdots + v_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} v_k. \end{aligned} \quad (1.1)$$

级数重组后得到一个新的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, 其中 v_k 是原级数中按顺序第 k 个组合

项. 现在提出问题, 若原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛或发散的, 则组合后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 是否保持原来的收敛性或发散性?

定理 1.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 为(1.1)所示的被加项经组合后所得级数, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

证明 令 S_n 表示 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和, Ω_k 表示 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 的部分和. 则由(1.1)知 $\Omega_k = S_{n_k}$, 于是知 $\{\Omega_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子序列. 据第二章 §1, 知收敛序列的任何子序列收敛至同一极限. 这就推知

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad \square$$

定理的逆命题不真,即组合后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛,不能推断原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

收敛.例如例 1.2 中所示级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$,若依次进行两两组合,即得

$$(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0,$$

组合后的级数收敛,但原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 发散.因此我们不能以组合后的级数的收敛,来推断原级数的收敛.但我们可以按照组合后的级数的发散性,推断原级数的发散性(定理 1.2 的逆否命题).

例 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$. 对级数的项进行如下的组合:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) + \cdots,$$

其中 $v_1 = \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, \cdots ,

$v_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$, \cdots . 这说明 $\Omega_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_k > \frac{1}{2} +$

$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{k}{2} \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$. 据定理 1.2 的逆否命题,知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

一个有限项的和,若任意更改被加项的前后顺序,其和不变.这称为代数和的交换律.对于无穷和(无穷级数)而言,是否也有“交换律”?我们在本章后面章节将证明,对于某类收敛的无穷级数,若无穷次更改被加项的前后顺序,可以改变级数的和,甚至还可以将收敛级数改变为发散级数.因此对无穷和一般不满足“交换律”.

无穷级数理论的首要而基本的问题,是收敛与发散性的判别.本章将主要致力于讨论这一问题.

定理 1.3 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证明 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$,则按假定可有实数 S ,使 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$,于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

定理的逆命题不成立.如 $\frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,

* 1.2 Cauchy 收敛准则

根据实数的完备性及第六章 §1 和 §2 的有关结论, 即可得

定理 1.4 (序列收敛的 Cauchy 准则)

实数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N$, 只须 $n > N$, 便有 $|x_{n+p} - x_n| < \epsilon$, 其中 p 为任一正整数.

对于无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 则 $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$, 于是可得相应的 Cauchy 准则.

定理 1.4' (无穷级数收敛的 Cauchy 准则)

设 $\{u_n\}$ 为实数列. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为 $\forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$, 便有 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \epsilon$, 其中 p 为任一正整数.

附注 基于连续变量极限与离散变量极限的关系(见第二章 §2), 由定理 1.4, 我们可以得到关于连续变量极限存在的 Cauchy 准则如下:

定理 1.4'' (函数极限的 Cauchy 准则 1)

设 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上定义. 则极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists M \in [a, \infty)$, 使对于任何点 $x', x'' > M$, 都有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

证明从略.

对于在有限点上的连续变量极限, 同样可有

定理 1.4''' (函数极限的 Cauchy 准则 2)

设 $f(x)$ 在 $0 < |x-a| < r$ 上定义, 则极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 $\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使对于任何点 x', x'' 满足 $0 < |x'-a| < \delta, 0 < |x''-a| < \delta$, 便有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

证明从略.

**练习题 7.1**

指出下列无穷级数的收敛性或发散性:

- (1) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots$;
- (2) $\frac{1}{10\,001} + \frac{1}{20\,001} + \frac{1}{30\,001} + \cdots$;
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;
- (4) $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots$;

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{\ln^3 3}{3^n}\right);$$

$$(8) \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \dots.$$

§2 正项级数

2.1 第一比较判别法

一个无穷级数,如各项值均为非负,则称之为**正项级数**.若仅从收敛发散的角度来考虑问题,则各项值均为负的级数,也可视为正项级数(带负号的正项级数)处理.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, S_n 表示级数的 n 项部分和, 则 $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$, 因此正项级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 是单调递增的. 从而根据单调有界列必有极限, 即可得

定理 2.1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 \iff 部分和序列 $\{S_n\}$ 有界.

由于正项级数部分和序列是正的单调列, 因此它的收敛、发散性可以分别用记号 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$ 来表示(注意, 非正项级数不能用上述记号表示收敛、发散性).

正项级数收敛发散的判别论证, 是无穷级数理论的基础, 其主要原理基于比较判别法(读者可回顾无穷积分的收敛、发散性判别论证).

定理 2.2 (第一比较判别法)

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均为正项级数, $u_n \leq v_n (n=1, 2, \dots)$, 则有

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty.$$