普通高等教育“十五”国家级规划教材

微积分学简明教程（第二版）（下册）

曹之江　陈国庆　朱瑞英　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分学简明教程. 下册. 第二版/曹之江,陈国庆,朱瑞英编著. —北京:高等教育出版社,2005.6

ISBN 7-04-016621-6

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①曹…②陈…③朱… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026827 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 姚 晖 **封面设计** 王凌波
责任绘图 朱 静 **版式设计** 张 岚 **责任校对** 朱惠芳
责任印制 杨 明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	中国农业出版社印刷厂		
		版　　次	2000年7月第1版
开　　本	787×960 1/16		2005年6月第2版
印　　张	27.25	**印　　次**	2005年6月第1次印刷
字　　数	510 000	**定　　价**	31.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　16621-00

内 容 提 要

本书系教育部原面向21世纪课程教材《微积分简明教程》(下册)的第二版。全书包含八章和附录,内容包括:无穷和,函数的无穷和构造,含参数积分所定义的函数,多变量微分学,多变量 Riemann 积分的概念,多变量 Riemann 积分的计算,域内积分与边界积分之间的联系,外微分,空间解析几何概要。其中无穷和、函数的无穷和构造、含参数积分所定义的函数三章由曹之江撰写,其余五章和附录属本书新编,由陈国庆撰写。全书取材适中,说理透彻,主干脉络清晰,叙述简明流畅,并注重结合物理背景和数学思想的历史发展,对传统的微积分内容采用了新颖的讲法。整体内容倡导逻辑思维、形象思维、直觉思维相结合的启发式教学,体现教学内容的先进性、理论高度和体系新颖性的同时,减轻记忆负担,提高教学效率。

本书可作为数学类本科专业数学分析课程教材,同时(略去注 * 内容)可作为理工科大学数学课程教材。

郑 重 声 明

目　　录

第七章　无穷和

§1　数项级数

1.1　基本概念

假如把数学当作为一种运算的科学的话，则微积分学本质上乃是一种涉及超越加、减、乘、除及乘方、开方等代数运算的运算科学.例如在第一章里，我们所提到的基元函数——三角与反三角函数、指数与对数函数以及无理指数的幂函数等，都代表了一种超越运算，而且我们已经把这几类特殊的超越函数规范化了，使它们成为构造其他各种衍生的超越函数（即所谓初等函数）的基元.除此以外，我们在数学物理以及各种应用科学领域里，还将遇到各种代表着千万种不同的超越运算的非初等函数.于是为了使得微积分学成为一种合理而有效的运算科学，我们必须做到：(1)对所有这些规范的或未规范的“超越运算”，作出严格的既合乎逻辑又合乎经验的理论；(2)指出如何去实现这些“超越运算”的确实途径.由于我们经验所及的运算仅仅是代数运算，因此超越运算的诠释，事实上就是超越函数的代数化，即如何用代数运算逼近和表现超越运算.本章与下章，我们将从严格的意义上讨论并解答上述问题.

令$\{u_n\}$为实数列.则它的无穷项形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**无穷级数**，简称级数.u_n称为**级数的通项**（或一般项）.

对应于一个无穷级数，可有一个相应的**部分和序列**$\{S_n\}$，其中

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

反过来,对于一个任给的序列$\{S_n\}$,可以对应有一个无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,其中$u_1=S_1$,$u_n=S_n-S_{n-1}(n=2,3,\cdots)$,它以$\{S_n\}$为部分和序列.由此可见,无穷级数的理论,与序列变量的理论息息相关.

定义 1.1　令$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为无穷级数,$\{S_n\}$为其部分和序列.若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$存在,则称$S$为**无穷级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$**的和**,记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$.此时无穷级数称为是**收敛**的,否则称为是**发散的**.

例 1.1　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$.注意到$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,于是得部分和

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

从而有$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$,按定义知级数收敛,而且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

例 1.2　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\pi=-1+1-1+1-\cdots+(-1)^n+\cdots$.

此时可有　$$S_n=\begin{cases}-1, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\pi$发散.

例 1.3　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n=1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots$.

此时$S_n=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{1-r^n}{1-r}, & r\neq 1,\\ n, & r=1.\end{cases}$

于是知当$|r|<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$,级数收敛;当$|r|\geqslant 1$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,级数发散.

由上面论述可知,一个无穷级数,只有当它是收敛时,才有"和".因此"无穷和"与我们寻常所了解的有限项相加,是本质上不同的.这意味着对于无穷和的任何运算性质,必须从数学上重新经过严密审定,而不能凭经验去随意运作.这

里，我们先来考虑一下无穷和有哪些与有穷和相似的运算性质.

定理 1.1

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为任一常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n)$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n+v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 更改或增、减有限项的值，不改变级数原来的收敛、发散性.

证明仅需运用序列极限的简单运算性质，读者可自行作出.

对于一个有限项组成的和，若我们在和式中对被加项预先作任意的组合，然后再求和，则总的和值不变. 例如

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\\ =\ &(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+a_6,\end{aligned}$$

这称为代数和的结合律. 对于无穷和而言，我们指出，上述的"结合律"仍然成立. 设给定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，我们对无穷的被加项在不更动项的前后顺序的情况下，预先作任意的组合再求和，例如对 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 作组合求和

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots\\ =\ &v_1+v_2+\cdots+v_k+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} v_k.\end{aligned} \tag{1.1}$$

级数重组后得到一个新的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$，其中 v_k 是原级数中按顺序第 k 个组合项. 现在提出问题，若原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛或发散的，则组合后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 是否保持原来的收敛性或发散性?

定理 1.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数，$\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 为(1.1)所示的被加项经组合后所得级数，则 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，且 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

证明 令 S_n 表示 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和，Ω_k 表示 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 的部分和. 则由(1.1)知 $\Omega_k = S_{n_k}$，于是知 $\{\Omega_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子序列. 据第二章 §1，知收敛序列的任何子序列收敛至同一极限. 这就推知

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \Omega_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad \square$$

定理的逆命题不真，即组合后的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，不能推断原级数 $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$ 收敛. 例如例 1.2 中所示级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$，若依次进行两两组合，即得

$$(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0,$$

组合后的级数收敛，但原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 发散. 因此我们不能以组合后的级数的收敛，来推断原级数的收敛. 但我们可以按照组合后的级数的发散性，推断原级数的发散性(定理 1.2 的逆否命题).

例 1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$. 对级数的项进行如下的组合：

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\cdots,$$

其中 $v_1=\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$，$v_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，$v_3=\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\cdots,$ $v_k=\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}>2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2},\cdots$. 这说明 $\Omega_k=v_1+v_2+\cdots+v_k>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{k}{2}\to\infty(k\to\infty)$. 据定理 1.2 的逆否命题，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

一个有限项的和，若任意更改被加项的前后顺序，其和不变. 这称为代数和的交换律. 对于无穷和(无穷级数)而言，是否也有“交换律”? 我们在本章后面章节将证明，对于某类收敛的无穷级数，若无穷次更改被加项的前后顺序，可以改变级数的和，甚至还可以将收敛级数改变为发散级数. 因此对无穷和一般不满足“交换律”.

无穷级数理论的首要而基本的问题，是收敛与发散性的判别. 本章将主要致力于讨论这一问题.

定理 1.3 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

证明 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，则按假定可有实数 S，使 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n=S$. 由于 $u_n=S_n-S_{n-1}$，于是得

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0. \quad \square$$

定理的逆命题不成立. 如$\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

*1.2 Cauchy 收敛准则

根据实数的完备性及第六章 §1 和 §2 的有关结论，即可得

定理 1.4 （序列收敛的 Cauchy 准则）

实数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N$，只须 $n>N$，便有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，其中 p 为任一正整数.

对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，则 $S_{n+p}-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k$，于是可得相应的 Cauchy 准则.

定理 1.4′ （无穷级数收敛的 Cauchy 准则）

设 $\{u_n\}$ 为实数列. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为 $\forall \varepsilon>0, \exists N$，当 $n>N$，便有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n\right|<\varepsilon$，其中 p 为任一正整数.

附注 基于连续变量极限与离散变量极限的关系（见第二章 §2），由定理 1.4，我们可以得到关于**连续变量极限存在的 Cauchy 准则**如下：

定理 1.4″ （函数极限的 Cauchy 准则 1）

设 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上定义. 则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists M\in[a,\infty)$，使对于任何点 $x', x''>M$，都有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证明从略.

对于在有限点上的连续变量极限，同样可有

定理 1.4‴ （函数极限的 Cauchy 准则 2）

设 $f(x)$ 在 $0<|x-a|<r$ 上定义，则极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使对于任何点 x', x'' 满足 $0<|x'-a|<\delta, 0<|x''-a|<\delta$，便有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证明从略.

练习题 7.1

指出下列无穷级数的收敛性或发散性：

(1) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots$；

(2) $\dfrac{1}{10\,001}+\dfrac{1}{20\,001}+\dfrac{1}{30\,001}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

(4) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{\ln^n 3}{3^n}\right)$;

(8) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$.

§2 正项级数

2.1 第一比较判别法

一个无穷级数,如各项值均为非负,则称之为**正项级数**.若仅从收敛发散的角度来考虑问题,则各项值均为负的级数,也可视为正项级数(带负号的正项级数)处理.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,S_n 表示级数的 n 项部分和,则 $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n$,因此正项级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 是单调递增的.从而根据单调有界列必有极限,即可得

定理 2.1　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 $\{S_n\}$ 有界.

由于正项级数部分和序列是正的单调列,因此它的收敛、发散性可以分别用记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n<\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\infty$ 来表示(注意,非正项级数不能用上述记号表示收敛、发散性).

正项级数收敛发散的判别论证,是无穷级数理论的基础,其主要原理基于比较判别法(读者可回顾无穷积分的收敛、发散性判别论证).

定理 2.2　(第一比较判别法)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数,$u_n\leqslant v_n\,(n=1,2,\cdots)$,则有

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n<\infty\Longrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n<\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\infty\Longrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\infty$.