线性代数习题和解答

★

辽宁大学数学系代数几何
教研室代数组编

1980年2月

目　　录

第一章　行列式

§1. 数　域

1．所有形如$\alpha+\beta\sqrt{5}$（α、β表有理数）的实数集合是否是一个数域？

证明：设 $p=\{\chi|\ \chi=\alpha+\beta\sqrt{5},\ \alpha,\ \beta\text{是有理数}\}$

首先，　$0+0\sqrt{5}=0$　与　$1+0\sqrt{5}=1$　都是p中的数。

任取p中两个数$\alpha_1+\beta_1\sqrt{5}$　和$\alpha_2+\beta_2\sqrt{5}$，　其中α_1、β_1、α_2、β_2都是有理数，则

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{5})+(\alpha_2+\beta_2\sqrt{5})=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{5},$$

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{5})-(\alpha_2+\beta_2\sqrt{5})=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\sqrt{5},$$

$$(\alpha_1+\beta_1\sqrt{5})(\alpha_2+\beta_2\sqrt{5})=(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{5},$$

都是p中数。

当$\alpha_2+\beta_2\sqrt{5}\neq 0$时，必然 $\alpha_2\neq 0$ 或 $\beta_2\neq 0$，因而 $\alpha_2-\beta_2\sqrt{5}\neq 0$，于是

$$\frac{\alpha_1+\beta_1\sqrt{5}}{\alpha_2+\beta_2\sqrt{5}}=\frac{1}{\alpha_2{}^2-5\beta_2}\left[(\alpha_1\alpha_2-5\beta_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\sqrt{5}\right]$$

也是 p 中数。

所以，集合 P是一个数域。

2．所有形如$\alpha+\beta i$（α，β表有理数，$i=\sqrt{-1}$）的复数集合是否是一个数域？又当α、β只表整数时，则如何？

证明：设$p=\{\alpha+\beta i\}$

在集合p中任取二数：

$$a=\alpha_1+\beta_1 i,\qquad b=\alpha_2+\beta_2 i$$

则 有 $a+b=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i,$

$$a-b=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)i,$$

$$ab=(\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\beta_2)i,$$

依假设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$均为有理数，故$(\alpha_1+\alpha_2)$，$(\beta_1+\beta_2)$，$(\alpha_1-\alpha_2)$，$(\beta_1-\beta_2)$，$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)$，$(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)$均为有理数，所以就有 $a+b\in p$，$a-b\in p$，$ab\in p$.

由于 $\alpha_2-\beta_2 i$是 $\alpha_2+\beta_2 i$的共轭复数，故

$$\alpha_2-\beta_2 i\neq 0$$

从而

$$\alpha_2^2+\beta_2^2=(\alpha_2+\beta_2 i)(\alpha_2-\beta_2 i)\neq 0$$

于是，便有

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}$$

$$=\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}{(\alpha_2+\beta_2 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}i.$$

若令

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2},\quad \beta_3=\frac{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}.$$

则α_3,β_3均为有理数，且$\frac{a}{b}=\alpha_3+\beta_3 i$，所以有 $\frac{a}{b}\in p$.

经以上验证，集合P是一个数域。

当$p'=\{\alpha+\beta i\}$其中α,β只表整数时，由于整数集合对除法的不封闭性，故依上述步骤求得的α_3、β_3 即

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2},\qquad \beta_3=\frac{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2}$$

未必是整数，因此就一般情况而言$\frac{a}{b}\ \bar{\in} p$，所以集合p'不构成数域。

3．证明任意数域必包含所有的有理数(由此可知有理数域是最小数域)

证明：设P为任意数域，依命题知任意数域P必含有 1，即$1\in P$；根据数域对加法的封闭性知$2=1+1, 3=2+1, 4=3+1$，……均在P内，换句话说，所有正整数都在P内。又依任意数域P必含有0，再根据数域对减法的封闭性知 $-1=0-1$，$-2=0-2$，$-3=0-3$，$-4=0-4$，……也均在P内，即所有的负整数都在P内。根据数域对除法(零不作除数)的封闭性，所以，所有有理数$\frac{m}{n}$ 在P内，即任意数域包含所有有理数。

§2．二阶与三阶行列式

1．计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\3&1&4\\8&9&5\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0&a&-b\\a&0&-c\\b&c&0\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\frac{1+t^2}{1-t^2}&\frac{2t}{1-t^2}\\ \frac{2t}{t^2-1}&\frac{1+t^2}{t^2-1}\end{vmatrix}.$$

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3-3\times1\times2-2\times3\times1-2\times3\times1=18.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 1\times1\times5+1\times4\times8+1\times3\times9-1\times1\times8-1\times3\times5-1\times4\times9=5.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0+a\times c\times0+b\times d\times0-0\times0\times0-a\times b\times0-c\times d\times0 =0.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0\times0\times0+a(-c)b+ac(-b)-b\times0\times(-b)-a\times a\times0-c\times(-c)\times0 =-2abc.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{t^2-1} & \frac{1+t^2}{t^2-1} \end{vmatrix} = \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{1+t^2}{t^2-1}-\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{2t}{t^2-1}$$

$$=\frac{1+2t^2+t^4-4t^2}{(1-t^2)(t^2-1)}=\frac{(1-t^2)(1-t^2)}{(1-t^2)(t^2-1)}$$

$$=-1.$$

2．验证下列等式：

（1）$\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$，

（2）$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & b & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$，

（3）$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，

证　明：

（1）　左 $=\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix}=ad+a_1d-cb-c_1b$；

右 $=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$

$=ad-cb+a_1d-c_1b$.

故等式（1）成立。

（2）

左 $=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=bc^2+ab^2+ca^2-ba^2-cb^2-ac^2$；

右 $= (b-a)(c-a)(c-b)$

$= (bc-ba-ac+a^2)(c-b)$

$= bc^2+ab^2+ca^2-ba^2-cb^2-ac^2$.

故等式（2）成立。

（3）

$$左= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$

$$= a_1b_2b_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3\ ;$$

$$右= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$a_1b_2b_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$.

故等式（3）成立

3. 利用行列式求解下列方程组：

（1）
$$\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1. \end{cases}$$

解：因

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 11 & -7 \end{vmatrix} = -57 \neq 0,$$

故得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{-57}=\frac{23}{57};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 1 \end{vmatrix}}{-57}=\frac{28}{57}.$$

（2） $\begin{cases} \chi\cos\alpha - y\sin\alpha = a, \\ \chi\sin\alpha + y\cos\alpha = b. \end{cases}$

解；因

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$= 1 \neq 0$$

故　得

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} a & -\sin\alpha \\ b & \cos\alpha \end{vmatrix}}{1} = a\cos\alpha + b\sin\alpha;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \cos\alpha & a \\ \sin\alpha & b \end{vmatrix}}{1} = b\cos\alpha - a\sin\alpha.$$

（3） $\begin{cases} \chi + y - 2z = -3, \\ 5\chi - 2y + 7z = 22, \\ 2\chi - 5y + 4z = 4. \end{cases}$

解：因

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 63 \neq 0,$$

故　得

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{63} = \frac{63}{63} = 1,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 22\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}}{63}=\frac{126}{63}=2,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 5 & -2 & 22\\ 2 & -5 & 4\end{vmatrix}}{63}=\frac{189}{63}=3\ .$$

§3. 置　　换

1．求下面诸排列的反序数：

（1） 5,2,3,1,4；

解：排列5,2,3,1,4中1前面有3个数，划去1后得：5,2,3,4,

排列5,2,3,4中2前面有1个数，划去2后得：5,3,4；

排列5,3,4中3前面有1个数划去3后得；5,4；

排列5,4中4前面有1个数，划去4后得5；

故排列 5,2,3,1,4 共有3＋1＋1＋1＝6个反序；即

$\tau(5,2,31,4)=6$

（2） 10,9,5,1,2,6,3,7,8,4；

解：$\tau(10,9,5,1,2,6,3,7,8,4)$

$=8+3+4+6+2+2+2+2+1=25$.

（3） 5,4,3,6,2,1.

解：$\tau(5,4,3,6,2,1)$

$=1+4+6+1=12$。

2．分解下列诸置换为互相独立的轮换的乘积。

解：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&7&4&1&5&3&2\end{pmatrix}$

$=(1,6,3,4)(2,7)$.

（2）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&4&1&6&2\end{pmatrix}$

$=(1,3,4)(2,5,6)$.

（3）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\9&4&5&3&7&6&2&8&1\end{pmatrix}$

$=(1,9)(2,4,3,5,7)$

3．证明：任一置换分解为互相独立的轮换时，除因子次序外，其分法是唯一的。

证明　假设任意置换A，分解为互相独立的轮换时，除因子次序外有两种分法：

$$A=(i_1i_2\cdots i_r)\cdots(j_1j_2\cdots j_s)\cdots(l_1l_2\cdots l_t)\qquad(1)$$

$$A=(i'_1\ i'_2\cdots i'_{r'})\cdots(j'_1\ j'_2\cdots j'_{s'})\cdots(l'_1\ l'_2\cdots\ l'_{t'})\qquad(2)$$

在分法（1）中任取一个轮换$(j_1j_2\cdots j_s)$，那么在分法（2）中一定能找到一个与j_1，相同的数码，譬如$(j'_1\ j'_2\cdots j'_{s'})$中的某数码与$j_1$相同，不防假定$j_1=j'_1$。

由于置换A是一一对应，在（1）中有$j_1\to j_2$，而在（2）中$j'_1\to j'_2$，于是必有$j_2=j'_2$，同理$j_3=j'_3$，…，$j_s=j'_s$，所

以得到 $(j_1 j_2 \cdots j_s) = (j'_1\ j'_2 \cdots j'_{s'})$

即在（1）中任取一个轮换，一定能在（2）中找到一个相同的轮换。同理在（2）中任取一个轮换，也一能在（1）中找一个相同的轮换。故分法（1）与分法（2）除因子次序外，完全相同。问题得证。

证法②：用反证法。

假定上面的分法（1）与分法（2）除因子次序外也是不同的两种分法，那么至少应有一个数码h存在，使得在分法（1）中 $h \to \kappa$，而在分法（2）中 $h \to m$，且 $\kappa \neq m$。于是得出在同一置换A中的一个数码对应两个不同的数码κ和m。此与署换是一一对应，即与置换的定义相矛盾。故除因子次序外，分法（1）与分法（2）必会全相同，问题得证。

4．计算置换的乘积

（1） $A = (1,2,4)(5,7)(3,6)$

$B = (1,3)(4,7,5)$

求：AB

解：$AB = (1,2,4)(5,7)(3,6)(1,3)(4,7,5)$

$= (1,5,7,4,3,6)(5)$

$= (1,2,7,4,3,6)$

（2） $A = (1,4)(2,3)(5,8,10)(6,7,9)$

$B = (1,4,8,10,9,2,3)(6,7)$

求：AB

解：$AB = (1,4)(2,3)(5,8,10)(6,7,9)$

$(1,4,8,10,9,2,3)(6,7)$

$= (1,8,9,7,2)(3)(4)(5,10)(6)$

$= (1,8,9,7,2)(5,10)$.

（3） $A=(3,2,4)(1,7,8)(5,6)$ ，

$B=(4,1,3)(2,6)$ ，

$C=(3,1,2)(4,8)$

求：ABC及BAC

解：$ABC=(3,2,4)(1,7,8)(5,6)$

$(4,1,3)(2,6)(3,1,2)(4,8)$

$=(1,7,4,8)(3,6,5)(2)$

$=(1,7,4,8)(3,6,5)$ ，

$BAC=(4,1,3)(2,6)(3,2,4)$

$(1,7,8)(5,6)(3,1,2)(4,8)$

$=(1,3)(2,5,6,8)(4,7)$.

5．证明任一置换A的逆署换是由A所唯一确定的。

证明：设B，C皆为A的逆署换，据A的逆署换定义有

$$AB=BA=I \qquad AC=CA=I$$

于是 $C=CI=C(AB)=(CA)B=IB=B$

即证得了A的逆置换是由A所唯一确定的。

6．证明任一置换A与其逆置换A^{-1}之奇偶性相同。

证明：设

$$A=\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_n \\ j_1 j_2 \cdots j_n \end{pmatrix}$$

根据5题知A的逆置换是由A唯一确定的，且置换的不同记法不改变置换的奇偶性，故有

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} j_1 j_2 \cdots j_n \\ i_1 i_2 \cdots i_n \end{pmatrix}$$

根据奇，偶置换的定义，A 和A^{-1}的奇偶性皆由排列，i_1，i_2，…，i_n 和排列j_1，j_2，…，j_n 的奇偶性异还是同来决定（二排列奇偶性相异，A和A^{-1}皆为奇置换；二排列奇偶性相同，A和A^{-1}皆为偶置换），故置换A与其逆置换有相同的奇偶性。

7．决定下列诸置换之奇偶性

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$=(1,3,7,4,2,5)(6,8)$；

因$n-d=8-2=6$ 为偶数，故此置换为偶置换。

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$=(1,5,4,6,9)(2,8)(3,7)$；

因$n-d=9-3=6$为偶数，故此置换为偶置换。

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

$=(1,5,3)(2,9,8,7)(4)(6)(10)$；

因$n-d=10-5=5$为奇数，故此置换为奇置换。

（4）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 7 & 6 & 10 & 2 & 1 & 11 & 4 & 12 & 3 & 9 & 13 & 15 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

$=(1,5,2,7,11,9,12,13,15,14,8,4,10,3,6)$；

因$n-d=15-1=14$为偶数，故此置换为偶置换。

8．问下列排列是奇排列还是偶排列？

16，13，14，11，15，10，9，12，3，8，7，6，5，4，1，2

解：设

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16\\16&13&14&11&15&10&9&12&3&8&7&6&5&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$=(1,16,2,13,5,15)(3,14,4,11,7,9)$$

$$(6,10,8,12)。$$

因n-d＝16－3＝13为奇数，故置换A是奇置换。又A的上排列为偶排列，据奇偶置换定义，A的下排列，即题所给的排列 16，13，14，11，15，10，9，12，，3，8，7，6，5，4，1，2必为奇排列

§4. n阶行列式

1．决定6阶行列中式 $a_{35}a_{21}a_{13}a_{66}a_{42}a_{54}$ 前面应加之符号。

证明：因置换

$$\begin{pmatrix}3&2&1&6&4&5\\5&1&3&6&2&4\end{pmatrix}=(3,5,4,2,1)(6)$$

为偶置换，故依n阶行列式定义，$a_{35}a_{21}a_{13}a_{66}a_{42}a_{54}$前应正号。

2．证明在n阶行列式中，其项

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

前所加之符号为正或负，可由$i_1,i_2,\cdots,i_n$，为偶或奇排列而定。

证明：依据n阶行列式定义，$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 前所加之符号由置换

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}$$

的奇偶性来决定。但A的上排列 1，2，…，n恒为偶排列，于是，若A的下排列$i_1,i_2,\cdots i_n$为奇排列，则A为奇置换 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$，前加负号；若$i_1$，$i_2$，$\cdots i_n$为偶排列，则A为偶置换，

$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$前加正号。所以说

$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$

前加正号或负号由，i_1，i_2，…，i_n为偶排列或奇排列而定。

3．设一个n阶行列式D如下：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn}\\ a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

其左上角与右下角又分别组成一个k阶行列式D_1及一个n-k阶行列式D_2

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$