北京文登学校辅导系列

线性代数解题方法和技巧

陈文灯 吴振奎 刘舒强 编著

中国财政经济出版社

北京文登学校辅导系列

线性代数解题方法和技巧

编著

北京文登学校辅导系列

线性代数解题方法和技巧

陈文灯　吴振奎　刘舒强　编著

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数解题方法和技巧／陈文灯等编著．—北京：
中国财政经济出版社，2004.8
（北京文登学校辅导系列）
ISBN 7－5005－7551－3

Ⅰ．线…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教
学参考资料　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 085741 号

北京文登学校辅导系列
线性代数解题方法和技巧
陈文灯　吴振奎　刘舒强　编著
中国财政经济出版社出版发行
URL：http：//www.cfeph.com.cn
E－mail：cfeph @ drc.gov.cn

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036
发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436
北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　18 印张　441 000 字
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月北京第 1 次印刷
定价：30.00 元
ISBN 7－5005－7551－3／F·6613
（图书出现印装问题，本社负责调换）

前　　言

高等数学(包括线性代数、概率论与数理统计)是大学理工科及经济管理类专业的重要基础课,是培养学生形象思维、抽象思维、创造性思维的重要园地。由于概念、定理、公式繁多,加之综合性较强,许多同学都觉得它难学,有的同学甚至由此产生了厌学情绪。我们曾用自己的教学经验帮助过身边学习困难的同学,他们都感到受益匪浅。为使更多学习困难的同学受益,也使学习好的同学更优秀,我们归纳、总结了近40年的教学经验和多年来考研辅导体会,编著了这本《线性代数解题方法和技巧》。相信它的出版会对不同层次学生的学习均有裨益。

本书具有以下特点:

(1)广泛使用表格法,使有关内容、解题方法和技巧一目了然。

(2)从浩瀚的题海中归纳、总结出的题型解法,对同学们解题具有很大的指导作用。

(3)用系列专题分析对教材的难点、重点进行了诠释(包括对某些题型的分析),对同学们掌握这方面的知识能起到事半功倍的效果。

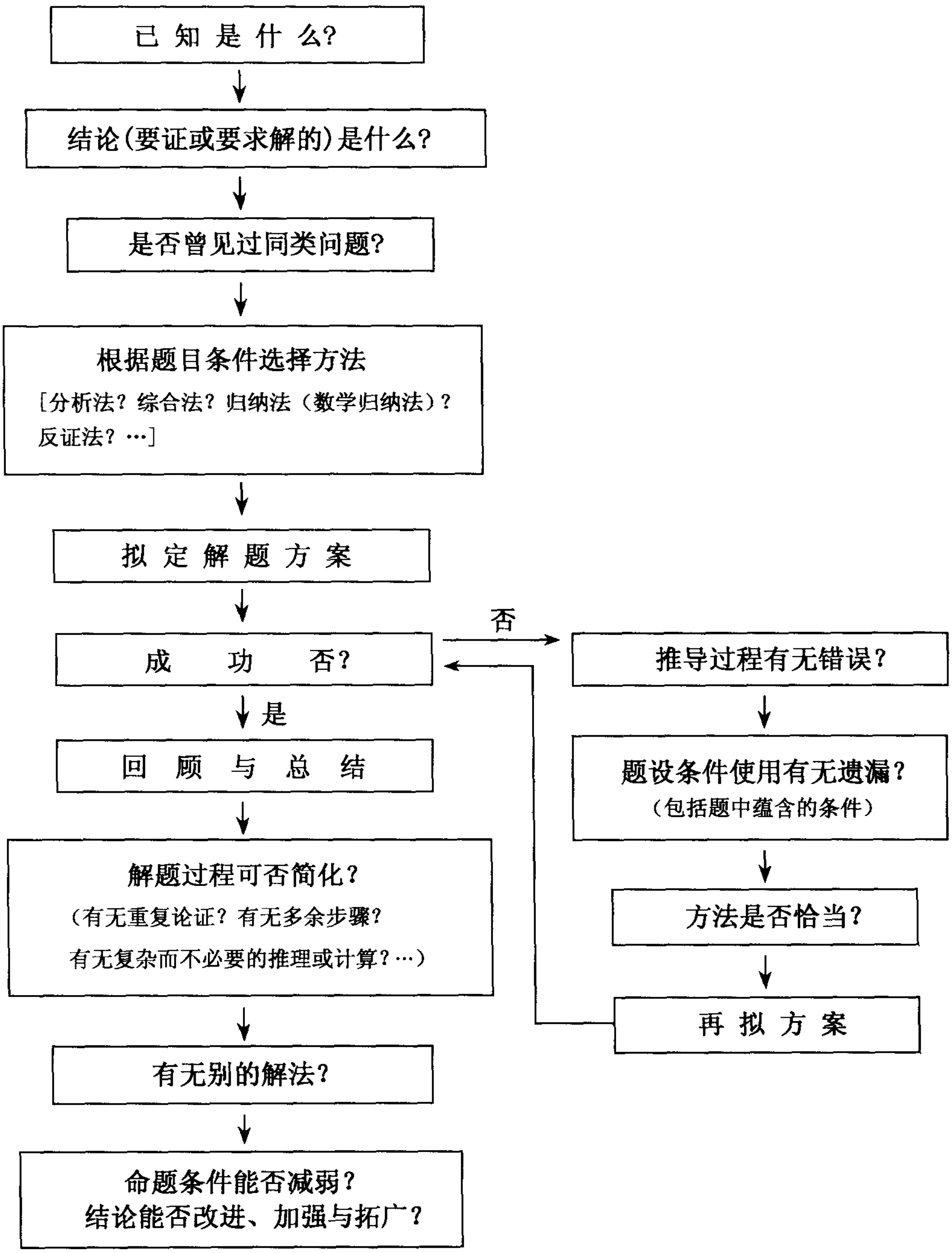
本书是针对考研、参加数学竞赛的同学撰写的,对在读的本科生、专科生以及数学教师同仁也具有很高的参考价值。

由于时间仓促,作者水平有限,错误和不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

作　　者

于2004年8月

解题步骤的一个框图


已 知 是 什 么?
结论(要证或要求解的)是什么?
是否曾见过同类问题?
根据题目条件选择方法
[分析法？综合法？归纳法（数学归纳法）？反证法？…]
拟 定 解 题 方 案
成 功 否？
否
是
推导过程有无错误？
题设条件使用有无遗漏？
（包括题中蕴含的条件）
方法是否恰当？
再 拟 方 案
回 顾 与 总 结
解题过程可否简化？
（有无重复论证？有无多余步骤？
有无复杂而不必要的推理或计算？…）
有无别的解法？
命题条件能否减弱？
结论能否改进、加强与拓广？

目　　录

第一章 行 列 式

行列式的出现已有 300 余年,1683 年日本数学家关孝和在《解伏题之法》中首先引入此概念.

1693 年,莱布尼兹(G.W.Leibniz)著作中亦有行列式叙述,但人们仍认为此概念在西方源于数学家柯西(A.L.Cauchy).

1750 年,克莱姆(G.Cramer)出版的《线性代数分析导言》一书中已给出行列式的今日形式.

1841 年,雅谷比(C.G Jacobi)在《论行列式形成与性质》一书中对行列式及其性质、计算作了较系统的阐述.

此后,范德蒙(A.T.Vandermonde)、裴蜀(E.Bezout)、拉普拉斯(P.S.M.de Laplace)等人在行列式研究中也作了许多工作.

但行列式在当今线性代数中似已被淡化,原因是:首先它的大多数功能已被矩阵运算取代,而矩阵(代数)理论与计算已相当成熟;再者是电子计算机的出现与飞速发展,已省去人们许多机械而繁琐的计算.然而行列式也有其自身的魅力:技巧性强、形式漂亮,因而它在历年考研中不断出现.

行列式的主要应用是:求矩阵(或向量组)的秩;解线性方程组;求矩阵特征多项式等.

行列式与矩阵有着密不可分的连带关系,尽管它们本质上不是一回事(矩阵是数表,而行列式是数).

内 容 提 要

1. 矩阵

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,i=1,2,\cdots,n)$排成的($m$ 行 n 列的)矩形表:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称做 m 行 n 列的矩阵.

简记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.其中,a_{ij}称为 A 的第 i 行第 j 列元素.

当 $m=n$ 时,称 A 为方阵;简称 n 阶矩阵.

且记 $\mathbf{R}^{m\times n}$为含实元素 $m\times n$ 阵的全体(集合).特别地 $1\times n$ 的矩阵称为向量,常记 $\mathbf{R}^n$.

2. 行列式

(1) 行列式定义

行列式定义很多,其中较为直接的(构造性的)定义是:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

这里$(i_1i_2\cdots i_n)$是数字$1,2,\cdots,n$的任一排列,$\tau(i_1i_2\cdots i_n)$为排列$(i_1i_2\cdots i_n)$的**逆序数**.

矩阵(方阵)A的行列式常记为$\det A$或简记成$|A|$.

注 我们想再强调一点:矩阵与行列式本质区别在于:行列式是数;矩阵只是一个数表.

对于方阵A而言,若A_{ij}为$|A|$中划去第i行、第j列剩下的$n-1$阶矩阵,则$(-1)^{i+j}|A_{ij}|$称为a_{ij}的**代数余子式**,它常简记成A_{ij}.又$A^*=(A_{ji})_{n\times n}$为A的**伴随矩阵**.

(2) 行列式性质

①行、列互换(行变列、列变行),其值不变,即$|A|=|A^{\mathrm{T}}|$,这里A^{T}表示A转置;

②交换行列式两行(或两列)位置,行列式值变号;

③某数乘行列式一行(或列)诸元素等于该数乘行列式值;

④将某行(或列)倍数加到另外一行(或列),行列式值不变;

⑤若两行(或列)对应元素成比例,则行列式值为零;

⑥(拉普拉斯展开)行列式可按某一行(或列)展开,且

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}|A|,\text{ 其中 }\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n)$$

这里δ_{ij}称为 Kronecker 符号.特别地 $|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}(i=1,2,\cdots,n)$.

注:拉普拉斯展开实际上是指行列式可以按照某几行(或列)展开,这儿只是该展开的特例情形.

⑦若A,B均为n阶方阵,则$|AB|=|A||B|$.

⑧$|A^*|=|A|^{n-1}$,A为n阶方程,且A^*为A的伴随矩阵.

⑨$|A^{-1}|=|A|^{-1}$,A为n阶非奇异阵.

⑩$|aA|=a^n|A|$,$a\in\mathbf{R}$,且A是n阶方阵.

(3) 行列式常用计算方法

①用行列式定义(多用于低阶行列式);

②利用行列式性质,将行列式化成特殊形状(上三角或下三角形);

③用拉普拉斯(Laplace)展开;

④利用不同阶数行列式间的递推关系(常结合数学归纳法);

⑤利用著名行列式(如范德蒙(Vandermonde)行列式)的展开式;

⑥利用矩阵性质等.

(4) 几个特殊的行列式*

①Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j)$$

②Gram 行列式

设 $\boldsymbol{\alpha}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}) \in \mathbf{R}^n$，又 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j$ 的内积：

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

③循环行列式

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1}(x_0 + x_1\zeta^i + x_2\zeta^{2i} + \cdots + x_{n-1}\zeta^{(n-1)i})$$

这里 ζ 是 1 的次原根 $e^{\frac{2\pi}{n}i} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$（$e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 又可记如 $\exp\left\{\dfrac{2\pi}{n}i\right\}$）.

④交错矩阵

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{12} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0, & n \text{ 是奇数}; \\ P_n(\cdots, x_{ij}, \cdots)^2, & n \text{ 是偶数}, \end{cases}$$

这里 $P_n(\cdots, x_{ij}, \cdots)$ 是变量 x_{ij} 的多项式，称为 Pfaff 多项式.

一、简单的行列式计算

一些简单的行列式的计算问题，主要依据行列式的某些性质.

例 1　求行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值.

简析：这是一个 4 阶行列式，且第一行（或列）仅有两个非 0 元，故可按 Laplace 展开、降阶.

解：按行列式第一行展开有

$$原式=(-1)^{1+1}a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

注：例的推广情形如（计算方法仿例）：

问题 1 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$.

问题 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_k & b_k & & \\ & & b_{k+1} & a_{k+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b_{2k} & & & & & a_{2k} \end{vmatrix}$.

对于它们的计算又可由先建立递推关系，再归纳地计算原行列式值，具体方法可见后例.

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

简析：此例虽亦为 4 阶式，然诸行（列）中 0 元皆无，按行列展开不妥. 稍细观察可发现：每行诸元素和为定值，可用行列变换化简.

解：将 2,3,4 列加至第 1 列

$$原式=\begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$ （将第 1 列加至第 2、4 列，第 1 例乘“-”号加至第 3 列）

$$=x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\underset{\text{(按第 4 行展开)}}{=\!=\!=\!=}(-1)^{4+1}x\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix}=x^4.$$

我们再来看一个例子.

例 3 计算五阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-a & a & & & \\ -1 & 1-a & a & & \\ & -1 & 1-a & a & \\ & & -1 & 1-a & a \\ & & & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.*

简析：第 1 行(列)中有较多的 0,故可先按行列展开后再作考虑.

解 1：令原式为 D_5,按第 1 行展开得递推关系后,反复因此递推式有

$$\begin{aligned} D_5 &= (1-a)D_4 + aD_3 = (1-a)[(1-a)D_3 + aD_3] + aD_3 \\ &= [(1-a)^2 + a]D_3 + a(1-a)D_2 \qquad (\text{注意到 } D_2 = 1-a+a^2) \\ &= (1-a+a^2)[(1-a)D_2 + a(1-a)] + a(1-a)D_2 \\ &= (1-a+a^2)[(1-a)(1-a+a^2) + a(1-a)] + a(1-a)(1-a+a^2) \\ &= 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5. \end{aligned}$$

解 2：将行列式第 1 列视为 $(1,-1,0,0,0)^{\mathrm{T}} + (a,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$,这样

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & & & \\ -1 & 1-a & a & & \\ & -1 & 1-a & a & \\ & & -1 & 1-a & a \\ & & & -1 & 1-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & & & \\ & 1-a & a & & \\ & -1 & 1-a & a & \\ & & -1 & 1-a & a \\ & & & -1 & 1-a \end{vmatrix}$$

(将上式在第一个行列式从第 1 行起依次加到第 2 行后,再将所得新的第 2 行加到第 3 行,…;第二个行列式按第 1 列展开)

$$\begin{aligned} &= 1 + aD_4 \quad (\text{依此递推关系类推}) \\ &= 1 - a(1-aD_3) = \cdots = 1-a+a^2-a^3+a^4-a^5. \end{aligned}$$

解 3：将后四列统统加到第 1 列有

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & (D_4) & & \\ 0 & & & & \\ -a & & & & \end{vmatrix} \quad (\text{按第 1 列展开,这儿}(D_4)\text{表示 } D_4 \text{ 的矩阵})$$

$$\begin{aligned} &= D_4 + (-1)^{1+5}\cdot(-a)\begin{vmatrix} a & & & \\ 1-a & a & & \\ -1 & 1-a & a & \\ & -1 & 1-a & a \end{vmatrix} \\ &= D_4 - a^5 \qquad (\text{依此关系递推,注意后一项依次交替变号}) \\ &= (D_3 + a^4) - a^5 \end{aligned}$$

* 行列式空白处为 0(为方便计),下同.

$$=(D_2-a^3)+a^4-a^5$$
$$=(D_1+a^2)-a^3+a^4-a^5$$
$$=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

下面的例子与前例无大异，只是数字变了，阶数推广到了 n（注意上例的结论亦可推广到 n 的情形）.

例 4 计算 n 阶行列式：
$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}.$$

解：将 D_n 第 2 至第 n 列全部加到第一列得：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n} \quad \text{（按第一列展开）}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}} +(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & & & \\ 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$=D_{n-1}+(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-1}=D_{n-1}+1.$$

递推地可有：

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+(n-1)=2+(n-1)=n+1.$$

注 1：例的推广情形为（它又称为三对角行列式，与之相应的矩阵称为三对角矩阵）：

问题 计算
$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & b & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{vmatrix}.$$

略解：可分 $bc=0$ 与 $bc\neq 0$ 两种情形考虑. 对于 $bc=0$，情况较简单.

对于 $bc\neq 0$，考虑辅助多项式 $x^2-ax+bc$，其两根 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=a$，$x_1x_2=bc$.

按第一行展开有 $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$,如此下去可得逆推式,最后有

$$\begin{cases}D_n-x_1D_{n-1}=x_2^n;\\ D_n-x_2D_{n-1}=x_1^n,\end{cases}\quad(n=2,3,\cdots)$$

若 $x_1\neq x_2(a^2-4bc\neq0)$ 有 $D_n=\dfrac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}$, 其中 $x_{12}=\dfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4bc})$

若 $x_1=x_2(a^2-4bc=0)$ 由 $D_n=x_1D_{n-1}+x_1^n(n=2,3,\cdots)$,注意到 $D_1=a=x_1+x_2=2x_1$ 则有

$$D_n=(n+1)x_1^n=(n+1)\left(\frac{1}{a}\right).$$

注 2: 前例的三种解法中均用到了**递推**方法,相较之下,解法 3 似较简洁,须注意后一项的交替变号(与展开式有关)

仿此方法不难解决下面的问题:

问题 1 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & 1 & \alpha+\beta & & \end{vmatrix}_{n\times n}$

[**答**: $\alpha=\beta$ 时,$D_n=(n+1)\alpha^n$;$\alpha\neq\beta$ 时,$D_n=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})/(\alpha-\beta)$]

这类行列式相应的矩阵称为“三对角阵”,它是一类甚为重要的矩阵.这方面的问题又比如可见:

问题 2 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}3 & 2 & & & & \\ 1 & 3 & 2 & & & \\ & 1 & 3 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 3 & 2\\ & & & & 1 & 3\end{vmatrix}_{n\times n}$

若令 $\alpha+\beta=3,\alpha\beta=2$ 解得 α,β 后代入上面问题 1 的答案中,可直得得到结论.今考虑另外解法

略解: 将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n=3D_{n-1}-2D_{n-2}=(1+2)D_{n-1}-(1\times2)D_{n-2},$$

故 $$D_n-D_{n-1}=2(D_{n-1}-D_{n-2}),\tag{*}$$

且 $$D_n-2D_{n-1}=D_{n-1}-2D_{n-2}.\tag{**}$$

由(*)有 $$D_n-D_{n-1}=2^{n-2}(D_2-D_1),\tag{1}$$

由(**)有 $$D_n-2D_{n-1}=D_2-2D_1.\tag{2}$$

$2\times(1)-(4)$有 $D_2=7,\quad D_1=3.$

故 $D_n=2^{n-1}(D_2-D_1)-(D_2-2D_1)=2^{n-1}\cdot2^2-1=2^{n+1}-1.$

当然下面的问题解法也与例类同:

问题 3 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1+x^2 & x & & & & \\ x & 1+x^2 & x & & & \\ & x & 1+x^2 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & x & 1+x^2 & x\\ & & & & x & 1+x^2\end{vmatrix}$

略解：按第一行展开可有递推式 $D_n=(1+x^2)D_{n-1}-x^2D_{n-2}$，

一般地 $D_k-D_{k-1}=x^{2(k-2)}(D_2-D_1)$，令 $k=n,n-1,\cdots,1$ 后两边相加有：

$$D_n-D_1=(x^{2(n-2)}+x^{2(n-3)}+\cdots+x^2+1)(D_2-D_1),$$

即 $D_n=x^{2n}+x^{2(n-1)}+x^{2(n-2)}+\cdots+x^4+x^2+1$.

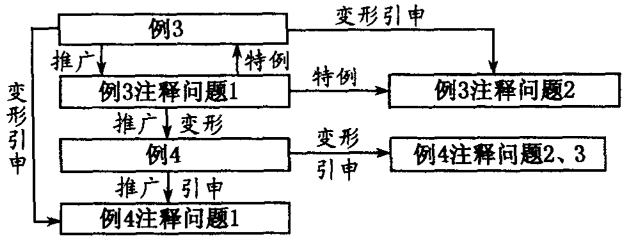
进而，下面的问题亦是与例有关的，只不过形式不同而已．详细讨论请见后面章节内容．

问题 4 试证 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的 n 个特征根皆正．

问题 5 求证 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & & & & \\ 1 & a & 1 & & & \\ & 1 & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a & 1 \\ & & & & 1 & a \end{pmatrix}$ 的最大、最小分别满足 $\lambda_{\max}\geqslant a+1$，和 $\lambda_{\min}\leqslant a-1$.

这些问题我们后文将述及并解答．

又前面的两例与注释中的问题间的关系请见下表：



例 5 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & & & & \\ & a & b & & & \\ & & a & b & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & a & b \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{n\times n}$

简析：此行列式虽系 n 阶，但注意到它的第一列（或行）仅有两个非 0 元素，Lapace 展开似应为首选方案．

解：按 D_n 第 1 列展开得两个 $n-1$ 阶行列式：

$$D_n=(-1)^{1+1}\cdot a\cdot\begin{vmatrix} a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \\ & & & & a \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}\cdot b\cdot\begin{vmatrix} b & & & & \\ a & b & & & \\ & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & b \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 6 若五阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}=a$，计算下面行列式，这里 $b\neq 0$：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \frac{1}{b}a_{12} & \frac{1}{b^2}a_{13} & \frac{1}{b^3}a_{14} & \frac{1}{b^4}a_{15} \\ ba_{21} & a_{22} & \frac{1}{b}a_{23} & \frac{1}{b^2}a_{24} & \frac{1}{b^3}a_{25} \\ b^2a_{31} & ba_{32} & a_{33} & \frac{1}{b}a_{34} & \frac{1}{b^2}a_{35} \\ b^3a_{41} & b^2a_{42} & ba_{43} & a_{44} & \frac{1}{b}a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

解： 将 D 第一行提出 $\frac{1}{b^4}$，第 2 行提出 $\frac{1}{b^3}$，第 3 行提出 $\frac{1}{b^2}$，第 4 行提出 $\frac{1}{b}$ 得

$$D=\frac{1}{b^{10}}\begin{vmatrix} b^4a_{11} & b^3a_{12} & b^2a_{13} & ba_{14} & a_{15} \\ b^4a_{21} & b^3a_{22} & b^2a_{23} & ba_{24} & a_{25} \\ b^4a_{31} & b^3a_{32} & b^2a_{33} & ba_{34} & a_{35} \\ b^4a_{41} & b^3a_{42} & b^2a_{43} & ba_{44} & a_{45} \\ b^4a_{51} & b^3a_{52} & b^2a_{53} & ba_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

从上式行列式第 1、2、3、4 列分别提出 b^4、b^3、b^2、b 有

$$D=\frac{b^{10}}{b^{10}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{25} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{55} \end{vmatrix}=a.$$

下面是一个典型行列式问题，它的计算模式几乎是固定的，但其变化及花样是缤纷的——它们以不同形式或问题出现在各类试题中.这也如前面的三对角阵行列式的计算一样.