GAODENG SHUXUE

高等专科院校试用教材

高等数学 下册

王朝杰 薛伯伸 翟国庆
王大智 车成文 方金华 编

陕西

高等专科院校试用教材

高 等 数 学

下 册

王朝杰 薛伯伸 瞿国庆
王大智 车成文 方金华 编

陕西科学技术出版社

高等专科院校试用教材高等数学丛书共四册：《高等数学》（上、下册）、《高等数学学习方法指导》、《线性代数》、《概率与统计》。本丛书由西安交通大学蒋传章、西北大学熊必璠主编，西北大学赵根榕、西北工业大学孙家永、西安冶金建筑学院潘鼎坤、四川经济管理干部学院马兴波等审稿。参加《高等数学》（下册）审稿的还有空军雷达学院刘晓帆、华中工学院汉口分院陈方年等。

高等专科院校试用教材

高等数学

下册

王朝杰　薛伯伸　翟国庆　编
王大智　车成文　方金华

责任编辑　赵生久

陕西科学技术出版社出版发行
（西安北大街131号）

新华书店经销　西安新华印刷厂印刷

787×1092毫米　32开本　10.25印张　21.8万字

1987年10月第1版　1987年10月第1次印刷

印数：1—18,440

ISBN 7-5369-0050-3/G·16

统一书号：7202·137　定价：2.50元

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，处理几何问题的方法是通过直角坐标系使平面上的点和有序的二元数组相对应，从而把几何图形的研究转化为代数方程的研究。这一方法可以顺利地推广到空间解析几何，只不过与空间的一点相对应的是有序的三元数组。

本章首先引进空间直角坐标系，然后，简单地介绍向量代数的基本知识，以此为工具将进行空间平面和直线的研究，最后讨论空间曲面和曲线。

第一节　空间直角坐标系

为了表示空间点的位置，可建立空间直角坐标系。在空间选取一定点O，过点O作三条互相垂直的数轴，它们都以O为原点。这三条轴分别叫做x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称为坐标轴。O点叫坐标原点。三条坐标轴的正向按右手规则来确定：用右手握住z轴，当右手的四个手指从x轴正向旋转$\frac{\pi}{2}$到y轴正向时，大姆指的指向就是z轴的正向，如图7—1所示。这样的坐标系叫右手坐标系。今后都采用这种坐标系。若将x轴和y轴的位置互换，便成左手系。

这三条坐标轴的任意两条可以确定一个平面，即xoy面、yoz面和zox面，叫做坐标面。它们是互相垂直的三个平面。三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限，如图7—2所示。在xoy坐标面之上（$z>0$），x、y、z三个坐标都为正的叫第一卦限，以下按逆时针方向旋转分别称为第二、三、四卦限。在xoy坐标面之下（$z<0$），x、y坐标取正，z坐标取负的部分（即第一卦限的下面）叫第五卦限，其余的三部分依逆时针旋转方向分别叫第六、七、八卦限。

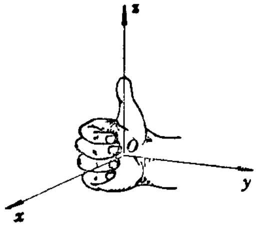

图 7 — 1

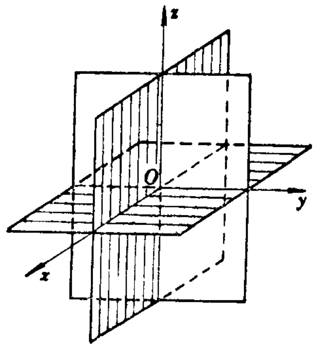

图 7 — 2

取定空间直角坐标系后，就可以建立空间的点与有序数之间的对应关系。

设M为空间任一点，过M点分别作三个平面与坐标轴垂直，它们与x轴、y轴、z轴的交点依次为P、Q、R（图 7—3），这三点在x轴、y轴、z轴上的坐标依次为x、y、z。于是任给空间一点M，就有唯一的一组有序实数x、y、z与之对应。反之，任给一组有序实数x、y、z，在x轴、y轴、

z轴上依次取坐标为x、y z的点P、Q、R，过P、Q、R分别作与坐标轴垂直的平面，则三个平面的交点M，就是实数组x、y、z所唯一的对应的点。这样，就建立了空间的点M与一组有序数实数（x，y，z）之间的一一对应关系，称（x，y，z）为点M的直角坐标，记为M（x，y，z），称x为点M的横坐标，y为点M的纵坐标，z为点M的竖坐标。

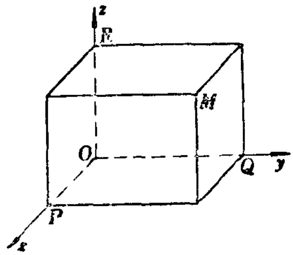

图 7—3

坐标轴上和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征：例如，如果点M在x轴上，则$y=z=0$；如果点M在y轴上，则$z=x=0$；如果点M在z轴上，则$x=y=0$；若点M在xoy坐标面上，则$z=0$；若点M在yoz坐标面上，则$x=0$；若点M在zox坐标面上，则$y=0$。显然，原点的坐标为（0，0，0）。

点$M(2,4,3)$和点$M_1(2,4,-3)$分别在第一卦限和第五卦限，而且点M和M_1关于xoy坐标面是对称的。一般地，点$P(x,y,z)$和$P_1(x,y,-z)$关于xoy坐标面是对称的。类似地可以得出关于其它坐标面对称的两点的特征。

习题 7—1

1．在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：

$A(1,1,3)$；　$B(1,-1,3)$；　$C(1,1,-3)$；

$D(-1,1,3)$；　$E(-1,-1,3)$；　$F(-1,-1,-3)$。

2．求点$A(1,1,3)$关于各坐标面对称的点的坐标。

3．已知点$A(3,0,0)$、$B(0,3,0)$、$C(0,0,3)$、$D(1,2,$

0）、E（1,2,3）、F（1,2,-3）．在空间直角坐标系中标出它们的位置．

4．将一正方体放在第一卦限内（边长为a），一顶点与坐标原点重合，三个棱与三坐标轴重合．写出立方体各角的坐标．

第二节 向量及其简单运算

一、向量的概念

在物理学和工程技术中，通常遇到两类量：一类量是只有大小、没有方向的量，例如，温度、时间、面积、密度和能量等，这一类量叫数量；另一类量不仅有大小而且还有方向，例如，速度、加速度和力等，这一类量叫向量或矢量．

通常用一条有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以A为起点，以B为终点的有向线段所表示的向量记为$\overrightarrow{AB}$（图7—4）．或用符号$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{n}$、$\vec{s}$等来表示向量．

向量的大小叫做向量的模，向量$\overrightarrow{AB}$与$\vec{a}$的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$和$|\vec{a}|$，模等于1的向量叫做单位向量，模等于零的向量叫做零向量，零向量的方向可以看作是任意的．在应用中所遇到的向量，有些向量与起点有关，有些与起点无关．我们只讨论与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量．因此，两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，如果它们的方向相同、模相等，就说这两个向量相等，为记$\vec{a}=\vec{b}$，这就是说，经平行移动后能完全重合的向量是相等的．

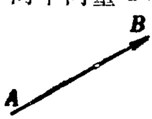

图7—4

二、向量的加减运算

由物理实验知道，力、速度、加速度的相加都服从平行四边形法则，所以两向量的加法定义如下：

定义 将向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的起点放在一起，以$\vec{a}$和$\vec{b}$作平行四边形，称对角线向量$\vec{c}$为向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的和（图7—5），记为

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

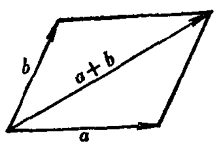

图7—5

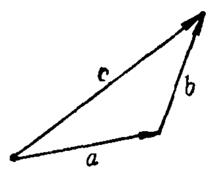

图7—6

这种求向量和的方法叫做平行四边形法则．由图7—5可以看出，两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的加法还可以按三角形法则进行，即平移向量$\vec{b}$，将$\vec{b}$的起点移至向量$\vec{a}$的终点上，然后以$\vec{a}$的起点为起点，以$\vec{b}$的终点为终点作向量$\vec{c}$（图7—6），则

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

向量的加法符合以下规律：

（1）交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

（2）结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

设$\vec{a}$为一向量．和$\vec{a}$的模相等而方向相反的向量叫做$\vec{a}$的逆向量或负向量，记为$-\vec{a}$（图7—7）．由此，我们定

义向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差为：

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

由向量的加法可知：要从 $\vec{a}$ 减去 $\vec{b}$，只要把 $-\vec{b}$ 加到向量 $\vec{a}$ 上去就行了（图 7—8）

图 7—7

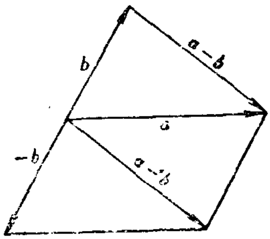

图 7—8

三、数量与向量的乘法

由向量的加法可知 $\vec{a}+\vec{a}$ 仍为一向量，这向量与 $\vec{a}$ 同方向，而且它的模是 $\vec{a}$ 的模的 2 倍（图 7—9），记为

$$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$$

由此，数量与向量的乘法规定如下：

定义 实数λ与向量 $\vec{a}$ 的乘积仍是一个向量，记为

$$\lambda\vec{a}$$

$\lambda\vec{a}$ 的模是 $\vec{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反。当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 是一个零向量。

数量与向量的乘法满足以下运算法则：

若λ、μ是实数，$\vec{a}$、$\vec{b}$ 是向量，则

（1） $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

（2） $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

（3） $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$。

若 $\vec{a}^0$ 是方向与 $\vec{a}$ 相同的单位向量，由数乘向量的上述定义可知

$$\vec{a}=|a|\ \vec{a}^0,$$

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

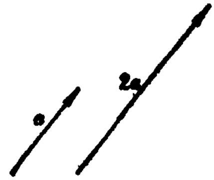

图 7—9

例 1　设平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点为 M，令 $\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AD}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示 $\vec{AM}$ 和 $\vec{BM}$（图7—10）。

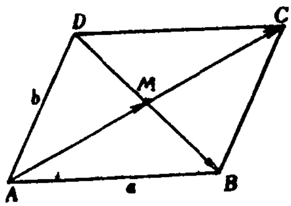

图 7—10

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}=2\vec{AM},$$

故

$$\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}).$$

由于 $$\vec{a}-\vec{b}=\vec{DB}=2\vec{MB},$$

故 $$\vec{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),$$

$$\vec{BM}=-\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

$$=-\frac{1}{2}\left[-(\vec{b}-\vec{a})\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}).$$

习题7—2

1. 设点M为平行四边形$ABCD$对角线的交点，若记$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用$\vec{a}$及$\vec{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

2. 若$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. 试问等式$|\vec{a}|=|\vec{b}|+|\vec{c}|$及$|\vec{a}|=|\vec{b}|-|\vec{c}|$各在什么条件下才能成立？

3. 若$\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$，试证$|\vec{a}|\leqslant|\vec{b}|+|\vec{c}|$.

第三节　向量的坐标

一、向量在轴上的投影

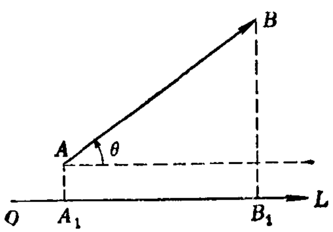

图7—11

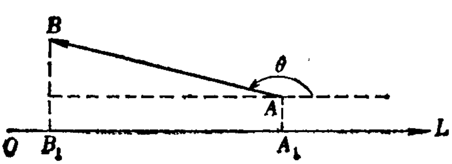

图7—12

设向量$\overrightarrow{AB}$与轴L同在一平面上，$\overrightarrow{AB}$与L轴正向的夹角为$\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$过点$A$和点$B$分别作$L$的垂线，设垂足分别是$A_1$和$B_1$（图7—11）. 在$L$轴上的有向线段$\overline{A_1B_1}$的值，是一个实数，它的绝对值是$|\overline{A_1B_1}|$，当$\overline{A_1B_1}$与$L$的指向相

同时，其值为正；当$\overline{A_1B_1}$与L指向相反时，其值为负（图7—12）；当$\overline{A_1B_1}$与L垂直时其值为零。

定义 有向线段$\overline{A_1B_1}$的值A_1B_1叫做向量$\overrightarrow{AB}$在L轴上的投影，记为$Prj_L\overrightarrow{AB}$，即

$$Prj_L\overrightarrow{AB}=A_1B_1$$

也就是说向量在轴上的投影等于该向量的模乘以此向量与轴正向的夹角的余弦。

向量在轴上的投影是一数量，当$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$时，$Prj_L\overrightarrow{AB}>0$；当$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$时，$Prj_L\overrightarrow{AB}<0$；当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$Prj_L\overrightarrow{AB}=0$。

下面讨论两个向量$\vec{a}_1$和$\vec{a}_2$的和在L轴上的投影．如图7—13所示，显然有

$$Prj_L(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=A_1A_3$$
$$A_1A_2+A_2A_3$$
$$=Prj_L\vec{a}_1+Prj_L\vec{a}_2$$

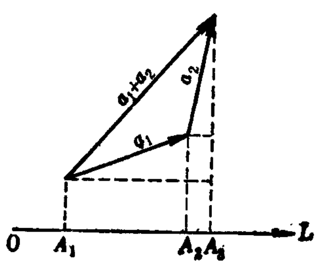

图 7—13

即两个向量之和在轴上的投影等于这两个向量在轴上投影之和。把这个结论推广到多个向量之和的投影就是

$$Prj_L(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n)=Prj_L\vec{a}_1+Prj_L\vec{a}_2+\cdots+Prj_L\vec{a}_n \qquad (1)$$

这个公式叫做投影定理，对空间向量在任何轴上的投影也同样适用。

二、向量的坐标

在任一空间直角坐标系$oxyz$中，在x轴上取一单位向量，其方向与x轴正向相同，记为$\vec{i}$；类似地在y轴上取单位向量$\vec{j}$；在z轴上取单位向量$\vec{k}$。并称这样的三个单位向量为基本单位向量。

对于任意一向径$\overrightarrow{OM}$，设其终点坐标为$M(x,y,z)$，将此向径沿三个坐标轴的方向分解，即由M点分别作与三个坐标轴垂直的平面，依次得交点P、Q、R，该三点就是点M在三个坐标轴上的投影（图7—14）。

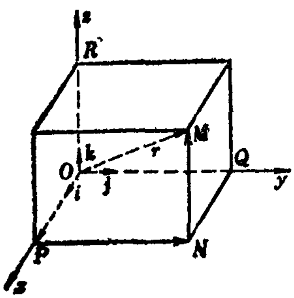

图 7—14

根据向量的加法

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}$$

而 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$,

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{OQ}=y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OR}=z\vec{k}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\\&=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\end{aligned}\qquad(2)$$

或简记为 $\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$

其中x、y、z是$\overrightarrow{OM}$在三个坐标轴上的投影。

向量$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$分别称为$\overrightarrow{OM}$在x轴、y轴、z轴上的分向量。

下面讨论一般向量的情形。