

GAODENG

高等专科院校试用教材

# 高等数学

下册

王朝杰 薛伯仲 翟国庆 编  
王大智 车成文 方金华

编

SHUXUE

陕西

高等专科院校试用教材

# 高等数学

下 册

王朝杰 薛伯仲 翟国庆  
王大智 车成文 方金华<sup>编</sup>

陕西科学技术出版社

高等专科院校试用教材高等数学丛书  
共四册：《高等数学》（上、下册）、  
《高等数学学习方法指导》、《线性代  
数》、《概率与统计》。本丛书由西安交  
通大学蒋传章、西北大学熊必璠主编，西  
北大学赵根榕、西北工业大学孙家永、西  
安冶金建筑学院潘鼎坤、四川经济管理干  
部学院马兴波等审稿。参加《高等数学》  
（下册）审稿的还有空军雷达学院刘晓  
帆、华中工学院汉口分院陈方年等。

高等专科院校试用教材

## 高等数学

下 册

王朝杰 薛伯仲 翟国庆 编

王大智 车成文 方金华

责任编辑 赵生久

陕西科学技术出版社出版发行

（西安北大街131号）

新华书店经销 西安新华印刷厂印刷

787×1092 毫米 32开本 10.25印张 21.8 万字

1987年10月第1版 1987年10月第1次印刷

印数：1—18,440

ISBN 7-5369-0050-3/G·16

统一书号：7202·137 定价：2.50 元

# 目 录

|                            |      |
|----------------------------|------|
| 第七章 空间解析几何与向量代数.....       | (1)  |
| 第一节 空间直角坐标系.....           | (1)  |
| 习题 7-1                     |      |
| 第二节 向量及其简单运算.....          | (4)  |
| 一、向量的概念    二、向量的加减运算       |      |
| 三、数量与向量的乘法    习题 7-2       |      |
| 第三节 向量的坐标.....             | (8)  |
| 一、向量在轴上的投影    二、向量的坐标      |      |
| 三、向量的模和方向余弦    四、线段的定比分点   |      |
| 习题 7-3                     |      |
| 第四节 数量积、向量积.....           | (19) |
| 一、两向量的数量积    二、向量积         |      |
| 习题 7-4                     |      |
| 第五节 曲面方程与曲线方程的概念.....      | (28) |
| 一、曲面方程    二、球面方程    三、曲线方程 |      |
| 习题 7-5                     |      |
| 第六节 平面的方程.....             | (32) |
| 习题 7-6                     |      |
| 第七节 空间直线的方程.....           | (39) |
| 一、直线的标准方程    二、直线的参数方程     |      |
| 三、两直线的夹角    习题 7-7         |      |

**第八节 几种常见的曲面和曲线**..... (45)

一、椭球面    二、椭圆抛物面    三、柱面

四、旋转曲面    五、空间曲线的参数方程

• 六、空间曲线在坐标面上的投影

习题 7 - 3

小结    复习题 7

**第八章 多元函数微分学**..... (61)

**第一节 多元函数**..... (61)

一、多元函数的概念    二、二元函数的几何意义

三、二元函数的极限    四、二元函数的连续性

习题 8 - 1

**第二节 偏导数**..... (70)

一、偏导数的概念    二、偏导数的几何意义

三、高阶偏导数    习题 8 - 2

**第三节 全微分**..... (79)

一、全微分的概念    二、全微分在近似计算中的应用

习题 8 - 3

**第四节 多元复合函数的求导法则**..... (86)

习题 8 - 4

**第五节 隐函数的求导法**..... (94)

习题 8 - 5

**第六节 偏导数的几何应用**..... (97)

一、空间曲线的切线及法平面    二、曲面的切平面及法线

习题 8 - 6

**第七节 多元函数的极值**..... (105)

习题 8 - 7

小结 复习题 8

**第九章 重积分** ..... (115)

**第一节 二重积分的概念及性质** ..... (115)

一、二重积分的实例      二、二重积分的概念

三、二重积分的性质

习题 9—1

**第二节 在直角坐标系中二重积分的计算法** ..... (122)

习题 9—2

**第三节 在极坐标系中二重积分的计算法** ..... (136)

习题 9—3

**第四节 二重积分的应用** ..... (143)

一、几何方面的应用      二、物理方面的应用

习题 9—4

**第五节 三重积分** ..... (153)

一、三重积分的概念      二、在直角坐标系中的计算法

习题 9—5

小结 复习题 9

**第十章 曲线积分与曲面积分** ..... (162)

**第一节 对弧长的曲线积分** ..... (162)

一、对弧长的曲线积分的概念      二、对弧长的曲线积分的计算法

习题 10—1

**第二节 对坐标的曲线积分** ..... (169)

一、对坐标的曲线积分的概念      二、对坐标的曲线积分的计算法

三、两类曲线积分之间的关系

习题 10—2

第三节 格林公式及其应用 ..... (178)

一、格林公式 二、曲线积分与路径无关的条件

三、二元函数全微分的条件 习题10—3

第四节 曲面积分 ..... (192)

一、对面积的曲面积分 二、对坐标的曲面积分

习题10—4

小结 复习题10

第十一章 无穷级数 ..... (211)

第一节 数项级数 ..... (211)

一、无穷级数概念及收敛的必要条件 二、正项级数收敛

判别准则 三、交错级数及其审敛准则

四、绝对收敛、条件收敛 习题11—1

第二节 幂级数 ..... (236)

一、函数项级数的概念 二、幂级数及其收敛半径

三、幂级数的运算 四、泰勒公式与泰勒级数

五、函数展开成幂级数的间接法 习题11—2

第三节 傅立叶级数 ..... (263)

一、三角级数、三角函数系的正交性

二、以 $2\pi$ 为周期的函数的傅立叶级数

三、函数展开为正弦或余弦级数

四、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶展开式

习题11—3

小结 复习题11

附录 常用的立体图形 ..... (293)

习题答案 ..... (299)

## 第七章 空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，处理几何问题的方法是通过直角坐标系使平面上的点和有序的二元数组相对应，从而把几何图形的研究转化为代数方程的研究。这一方法可以顺利地推广到空间解析几何，只不过与空间的一点相对应的是有序的三元数组。

本章首先引进空间直角坐标系，然后，简单地介绍向量代数的基本知识，以此为工具将进行空间平面和直线的研究，最后讨论空间曲面和曲线。

### 第一节 空间直角坐标系

为了表示空间点的位置，可建立空间直角坐标系。在空间选取一定点 $O$ ，过点 $O$ 作三条互相垂直的数轴，它们都以 $O$ 为原点。这三条轴分别叫做 $x$ 轴（横轴）、 $y$ 轴（纵轴）、 $z$ 轴（竖轴），统称为坐标轴。 $O$ 点叫坐标原点。三条坐标轴的正向按右手规则来确定：用右手握住 $z$ 轴，当右手的四个手指从 $x$ 轴正向旋转  $\frac{\pi}{2}$  到 $y$ 轴正向时，大姆指的指向就是

$z$ 轴的正向，如图7—1所示。这样的坐标系叫右手坐标系。今后都采用这种坐标系。若将 $x$ 轴和 $y$ 轴的位置互换，便成左手系。



这三条坐标轴的任意两条可以确定一个平面，即 $xoy$ 面、 $yo z$ 面和 $zox$ 面，叫做坐标面。它们是互相垂直的三个平面。三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限，如图7—2所示。在 $xoy$ 坐标面之上（ $z>0$ ）， $x$ 、 $y$ 、 $z$ 三个坐标都为正的叫第一卦限，以下按逆时针方向旋转分别称为第二、三、四卦限。在 $xoy$ 坐标面之下（ $z<0$ ）， $x$ 、 $y$ 坐标取正， $z$ 坐标取负的部分（即第一卦限的下面）叫第五卦限，其余的三部分依逆时针旋转方向分别叫第六、七、八卦限。

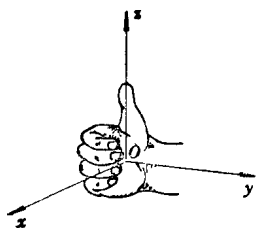


图 7—1

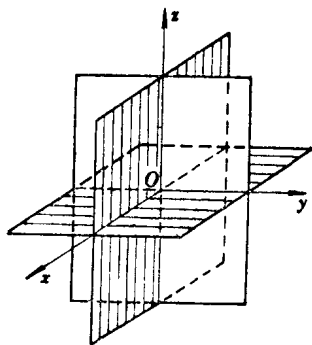


图 7—2

取定空间直角坐标系后，就可以建立空间的点与有序数之间的对应关系。

设 $M$ 为空间任一点，过 $M$ 点分别作三个平面与坐标轴垂直，它们与 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $z$ 轴的交点依次为 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ （图7—3），这三点在 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $z$ 轴上的坐标依次为 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 。于是任给空间一点 $M$ ，就有唯一的一组有序实数 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 与之对应。反之，任给一组有序实数 $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，在 $x$ 轴、 $y$ 轴、

$z$ 轴上依次取坐标为 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 的点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ，过 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 分别作与坐标轴垂直的平面，则三个平面的交点 $M$ ，就是实数组 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 所唯一的对应的点。这样，就建立了空间的点 $M$ 与一组有序实数 $(x, y, z)$ 之间的一一对应关系，称 $(x,$

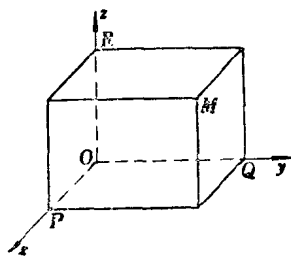


图 7—3

$y, z)$  为点 $M$ 的直角坐标，记为 $M(x, y, z)$ ，称 $x$ 为点 $M$ 的横坐标， $y$ 为点 $M$ 的纵坐标， $z$ 为点 $M$ 的竖坐标。

坐标轴上和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征：例如，如果点 $M$ 在 $x$ 轴上，则 $y = z = 0$ ；如果点 $M$ 在 $y$ 轴上，则 $z = x = 0$ ；如果点 $M$ 在 $z$ 轴上，则 $x = y = 0$ ；若点 $M$ 在 $xoy$ 坐标面上，则 $z = 0$ ；若点 $M$ 在 $yoz$ 坐标面上，则 $x = 0$ ；若点 $M$ 在 $zox$ 坐标面上，则 $y = 0$ 。显然，原点的坐标为 $(0, 0, 0)$ 。

点 $M(2, 4, 3)$ 和点 $M_1(2, 4, -3)$ 分别在第一卦限和第五卦限，而且点 $M$ 和 $M_1$ 关于 $xoy$ 坐标面对称的。一般地，点 $P(x, y, z)$ 和 $P_1(x, y, -z)$ 关于 $xoy$ 坐标面对称的。类似地可以得出关于其它坐标面对称的两点的特征。

## 习题 7—1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点所在的卦限：

$A(1, 1, 3)$ ；  $B(1, -1, 3)$ ；  $C(1, 1, -3)$ ；

$D(-1, 1, 3)$ ；  $E(-1, -1, 3)$ ；  $F(-1, -1, -3)$ 。

2. 求点 $A(1, 1, 3)$ 关于各坐标面对称的点的坐标。

3. 已知点 $A(3, 0, 0)$ 、 $B(0, 3, 0)$ 、 $C(0, 0, 3)$ 、 $D(1, 2,$

0)、 $E(1, 2, 3)$ 、 $F(1, 2, -3)$ 。在空间直角坐标系中标出它们的位置。

4. 将一正方体放在第一卦限内(边长为 $a$ )，一顶点与坐标原点重合，三个棱与三坐标轴重合。写出立方体各角的坐标。

## 第二节 向量及其简单运算

### 一、向量的概念

在物理学和工程技术中，通常遇到两类量：一类量是有大小、没有方向的量，例如，温度、时间、面积、密度和能量等，这一类量叫数量；另一类量不仅有大小而且还有方向，例如，速度、加速度和力等，这一类量叫向量或矢量。

通常用一条有向线段来表示向量。有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向。以 $A$ 为起点，以 $B$ 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$  (图 7-4)。或用符号 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{n}$ 、 $\vec{s}$ 等来表示向量。

向量的大小叫做向量的模，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\vec{a}|$ ，模等于1的向量叫做单位向量，模等于零的向量叫做零向量，零向量的方向可以看作是任意的。在应用中所遇到的向量，有些向量与起点有关，有些与起点无关。我们只讨论与起点无关的向量，并称这种向量为自由向量。因此，两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，如果它们的方向相同、模相等，就



图 7-4

说这两个向量相等，为记 $\vec{a} = \vec{b}$ ，这就是说，经平行移动后能完全重合的向量是相等的。

## 二、向量的加减运算

由物理实验知道，力、速度、加速度的相加都服从平行四边形法则，所以两向量的加法定义如下：

**定义** 将向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点放在一起，以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 作平行四边形，称对角线向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的和（图7—5），记为

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

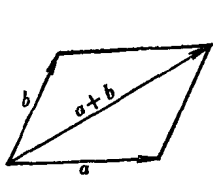


图 7—5

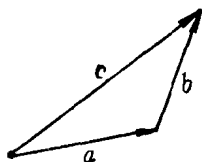


图 7—6

这种求向量的方法叫做平行四边形法则。由图7—5可以看出，两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的加法还可以按三角形法则进行，即平移向量 $\vec{b}$ ，将 $\vec{b}$ 的起点移至向量 $\vec{a}$ 的终点上，然后以 $\vec{a}$ 的起点为起点，以 $\vec{b}$ 的终点为终点作向量 $\vec{c}$ （图7—6），则

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

向量的加法符合以下规律：

(1) 交换律  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(2) 结合律  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

设 $\vec{a}$ 为一向量。和 $\vec{a}$ 的模相等而方向相反的向量叫做 $\vec{a}$ 的逆向量或负向量，记为 $-\vec{a}$ （图7—7）。由此，我们定

义向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的差为:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

由向量的加法可知: 要从  $\vec{a}$  减去  $\vec{b}$ , 只要把  $-\vec{b}$  加到向量  $\vec{a}$  上去就行了 (图 7—8)



图 7—7

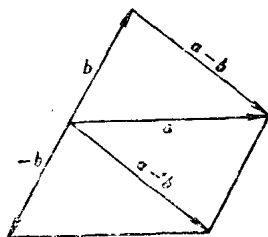


图 7—8

### 三、数量与向量的乘法

由向量的加法可知  $\vec{a} + \vec{a}$  仍为一向量, 这向量与  $\vec{a}$  同方向, 而且它的模是  $\vec{a}$  的模的 2 倍 (图 7—9), 记为

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$$

由此, 数量与向量的乘法规定如下:

**定义** 实数  $\lambda$  与向量  $\vec{a}$  的乘积仍是一个向量, 记为

$$\lambda \vec{a}$$

$\lambda \vec{a}$  的模是  $\vec{a}$  的模的  $|\lambda|$  倍, 当  $\lambda > 0$  时,  $\lambda \vec{a}$  与  $\vec{a}$  同向; 当  $\lambda < 0$  时,  $\lambda \vec{a}$  与  $\vec{a}$  的方向相反. 当  $\lambda = 0$  时,  $\lambda \vec{a}$  是一个零向量.

数量与向量的乘法满足以下运算法则:

若  $\lambda, \mu$  是实数,  $\vec{a}, \vec{b}$  是向量, 则

$$(1) \lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a};$$

$$(2) (\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a};$$

$$(3) \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$

若  $\vec{a}^0$  是方向与  $\vec{a}$  相同的单位向量, 由数乘向量的上述定义可知

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}^0,$$

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

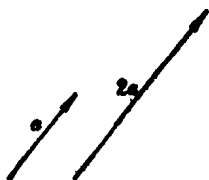


图 7—9

**例 1** 设平行四边形  $ABCD$  对角线的交点为  $M$ , 令  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ , 试用  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  表示  $\vec{AM}$  和  $\vec{BM}$  (图 7—10).

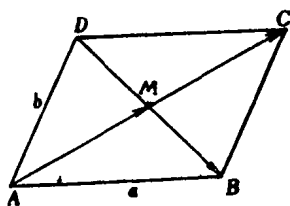


图 7—10

**解** 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC} = 2\vec{AM},$$

故

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b}).$$

由于

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{DB} = 2\vec{MB},$$

故

$$\vec{MB} = \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b}),$$

$$\vec{BM} = -\frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= -\frac{1}{2} [ - (\vec{b} - \vec{a}) ]$$

$$= \frac{1}{2} (\vec{b} - \vec{a}) .$$

## 习题 7—2

1. 设点  $M$  为平行四边形  $ABCD$  对角线的交点, 若记  $\vec{AB} = \vec{a}$ ,  $\vec{AD} = \vec{b}$ , 试用  $\vec{a}$  及  $\vec{b}$  表示向量  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$ ,  $\vec{MD}$ .
2. 若  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ , 试问等式  $|\vec{a}| = |\vec{b}| + |\vec{c}|$  及  $|\vec{a}| = |\vec{b}| - |\vec{c}|$  各在什么条件下才能成立?
3. 若  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ , 试证  $|\vec{a}| \leq |\vec{b}| + |\vec{c}|$ .

## 第三节 向量的坐标

### 一、向量在轴上的投影

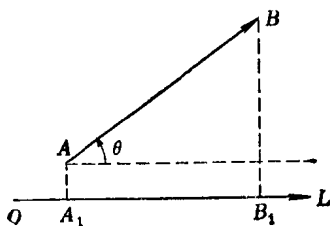


图 7—11

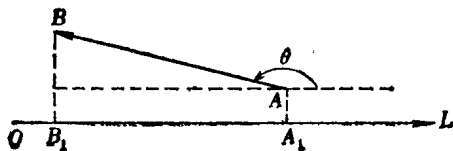


图 7—12

设向量  $\vec{AB}$  与轴  $L$  同在一平面上,  $\vec{AB}$  与  $L$  轴正向的夹角为  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )。过点  $A$  和点  $B$  分别作  $L$  的垂线, 设垂足分别是  $A_1$  和  $B_1$  (图 7—11)。在  $L$  轴上的有向线段  $\overline{A_1B_1}$  的值, 是一个实数, 它的绝对值是  $|\overline{A_1B_1}|$ , 当  $\overline{A_1B_1}$  与  $L$  的指向相

同时，其值为正；当  $\overrightarrow{A_1B_1}$  与  $L$  指向相反时，其值为负（图 7—12）；当  $\overrightarrow{A_1B_1}$  与  $L$  垂直时其值为零。

**定义** 有向线段  $\overrightarrow{A_1B_1}$  的值  $A_1B_1$  叫做向量  $\vec{AB}$  在  $L$  轴上的投影，记为  $Prj_L \vec{AB}$ ，即

$$Prj_L \vec{AB} = A_1B_1$$

也就是说向量在轴上的投影等于该向量的模乘以此向量与轴正向的夹角的余弦。

向量在轴上的投影是一数量，当  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  时， $Prj_L \vec{AB} > 0$ ；当  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  时， $Prj_L \vec{AB} < 0$ ；当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时， $Prj_L \vec{AB} = 0$ 。

下面讨论两个向量  $\vec{a_1}$  和  $\vec{a_2}$  的和在  $L$  轴上的投影。如图 7—13 所示，显然有

$$Prj_L (\vec{a_1} + \vec{a_2}) = A_1 A_3$$

$$\begin{aligned} & A_1 A_2 + A_2 A_3 \\ &= Prj_L \vec{a_1} + Prj_L \vec{a_2} \end{aligned}$$

即两个向量之和在轴上的投影等于这两个向量在轴上投影之和。把这个结论推广到多个向量之和的投影就是

$$\begin{aligned} Prj_L (\vec{a_1} + \vec{a_2} + \cdots + \vec{a_n}) &= Prj_L \vec{a_1} + Prj_L \vec{a_2} \\ &+ \cdots + Prj_L \vec{a_n} \end{aligned} \quad (1)$$

这个公式叫做投影定理，对空间向量在任何轴上的投影也同样适用。

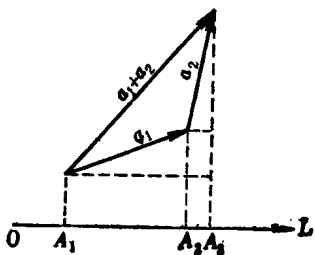


图 7—13



## 二、向量的坐标

在任一空间直角坐标系 $oxyz$ 中,在 $x$ 轴上取一单位向量,其方向与 $x$ 轴正向相同,记为 $\vec{i}$ ;类似地在 $y$ 轴上取单位向量 $\vec{j}$ ,在 $z$ 轴上取单位向量 $\vec{k}$ .并称这样的三个单位向量为基本单位向量。

对于任意一向径 $\vec{OM}$ ,设其终点坐标为 $M(x, y, z)$ ,将

此向径沿三个坐标轴的方向分解,即由 $M$ 点分别作与三个坐标轴垂直的平面,依次得交点 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ,该三点就是点 $M$ 在三个坐标轴上的投影(图7—14)。

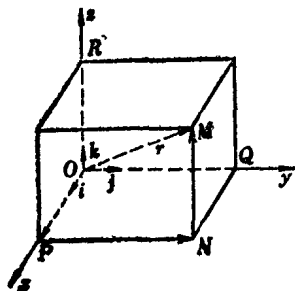


图 7—14

根据向量的加法

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PN} + \vec{NM}$$

$$\text{而 } \vec{OP} = x\vec{i},$$

$$\vec{PN} = \vec{OQ} = y\vec{j}$$

$$\vec{NM} = \vec{OR} = z\vec{k}.$$

于是有

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}\quad (2)$$

或简记为  $\vec{OM} = \{x, y, z\}$

其中 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 是 $\vec{OM}$ 在三个坐标轴上的投影。

向量 $\vec{OP}$ 、 $\vec{OQ}$ 、 $\vec{OR}$ 分别称为 $\vec{OM}$ 在 $x$ 轴、 $y$ 轴、 $z$ 轴上的分向量。

下面讨论一般向量的情形。