'99考研辅导教材

1999年硕士研究生入学考试单元测练

(数学分册)

[理工类]

编写 考研命题研究组

主编 北京大学 邓明华

科学技术文献出版社

考研辅导教材

1999年硕士研究生入学考试单元测练(数学分册)

(理工类)

编写 考研命题研究组

主编 北京大学 邓明华

编委 邓明华 张同信 郭守存

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

图书在版编目(CIP)数据

1999 年硕士研究生入学考试单元测练:数学分册:理工类/邓明华编著.—北京:科学技术文献出版社,1998.7

ISBN 7-5023-3065-8

Ⅰ.19… Ⅱ.邓… Ⅲ.高等数学-试题-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 16783 号

总 策 划:胡东华
责任编辑:宝 莹
封面设计:胡东华

出 版 者/科学技术文献出版社
地 址/北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
发 行 者/新华书店北京发行所
印 刷 者/中国农业出版社印刷厂
版(印)次/1998 年 7 月第 1 版,1998 年 7 月第 1 次印刷
开 本/787×1092 16 开
字 数/640 千字
印 张/23
I S B N/7-5023-3065-8/G.661
定 价/28.00 元

前　言

值此书出版之际，大部分考生已把“公共课考试科目”的主要内容基本复习了一遍，但是，应试的最终表现形式是把复习成果落实到试卷上。

考试是一门科学。尤其在临考前不多的复习时间内，要能用非常少的时间取得高分，在竞争中取胜。首先，就要科学地把握各科所考知识点的内在规律；其次，更为重要的是要掌握科学应试方法、技巧，通过在短期内的突击训练而实现提高考试成绩的目的。分单元进行测练，就是一种行之有效的应试方法。本丛书的出版意图正源于此。

目前，市场上早期复习的各种参考书很多，书中对所考知识点已进行了详细介绍，同时，适用于最后临考前的模拟冲刺书也不少，但衔接早期复习和最后冲刺之间的复习丛书却没有。为弥补此缺憾，使考生在有限的时间与精力下再加上一个应试砝码，我们按考试要求对每一科目划分出若干单元，对每一个单元严格按照考研命题标准，结合考点、重点、热点来帮助考生复习。本书正因此应运而生。

本书中每个单元共三套模拟试题。在每一单元中的第三套模拟试题参考答案中还给出每一个步骤的分数。对数学一考生，做本书全部内容；对数学二考生，做本书的第一、二、六、七、八、九单元。关于数学一和数学二适用的专业及考试内容、考试要求见《99 考研应试教程》(数学分册)〔理工类〕中的第一篇。复习本书时，最好先做题，后对答案，按研考要求在规定的时间(3 个小时)内完成，这样才能真正测出自己的水平。

您在早期复习，可参考《应试教程》丛书；中期的《单元测练》，不但会对您早期复习的质量进行考察，而且培养您的应试素质。通过单元测练，可加强对前期复习重点内容的记忆，也可发现薄弱环节，并及时结合《应试教程》，查漏补缺。后期的《最后冲刺》丛书，主要以模拟题形式，使您在考研题海中游刃而有余！从容应试！

本丛书在提供单元测练的同时，对政治和数学还总结出知识网络图，使考生从支离破碎的详细考点中解脱出来，在大脑中勾画出本科目的总体知识构架，从而使复习综合化、整体化，对问题能够从总体上全面把握，为培养你的“应试思维”、“应试能力”打下基础。同时，英语科目紧紧衔接应试教程，通览知识点，把握要点，突出重点，使考试大纲在本书中，以点、线、面的形式充分结合，科学体现，为您的考研历程打下坚实的基础。

作为本丛书的编写者，我们力图在考研的各个复习阶段，结合当前命题趋势，奉献出我们最精华的东西。使考生对考试科目的复习，形成一个系统的学科体系。

当然，本丛书编者虽出于我国最著名高等学府，并力求达到尽善尽美；但也只能说，我们竭尽全力了。其实，人生的事，又何尝不是如此。如果考生在参阅本书后，觉得有所收获，那将是我们这些编者、策划者的最大欣慰！

编者、策划者

1998.7

目　　录

第一单元　极限和一元函数微分学

第二单元　一元函数积分学

第三单元　A 向量代数与空间解析几何

第三单元　B 多元微分学

第四单元　多元积分学

第五单元　级数

第六单元　微分方程

第七单元　行列式

第八单元　线性方程组

第九单元　矩阵代数

第十单元　矩阵的特征值和特征向量

第十一单元　二次型

第十二单元　随机事件和概率

第十三单元　随机变量及其概率分布

第十四单元　二维随机变量

第十五单元　大数定律和中心极限定理

第十六单元　数理统计

第一单元　极限和一元函数微分学

知识网络图

- 连续
  - 连续函数性质
    - 有界(闭区间)
    - 取到最大,最小值(闭区间)
    - 中间值取到
  - 间断点分类(左右极限)
    - 可去间断点
    - 第一类间断点
    - 第二类间断点
- 极限及求极限的常用方法
  - 序列极限:$\varepsilon - N$ 语言
    - 极限存在准则
      - 单调有界
      - 夹逼定理
    - 积分和表示求极限
  - 函数极限:$\varepsilon - \delta$ 语言
    - 两个重要极限
    - 洛必达法则:$\frac{\infty}{\infty}$,$\frac{0}{0}$ 型(求导)
    - 等阶无穷小求极限(Taylor 展开)
- 导数
  - 几何意义:切平面和法线方程
  - 求导法则
    - 四则运算法则
    - 反函数求导
    - 隐函数求导
    - 复合函数求导(链锁法则)
    - 参数方程求导
  - 高阶导数
  - 导数和函数性质
    - 几何性质
      - 单调性　$f'(x) \neq 0$
      - 驻点　$f'(x) = 0$
      - 极值
      - 渐近线
      - 曲章
    - 罗尔定理
    - 中值定理
    - Taylor 展开
- 微分
  - 一阶微分形式不变性　$df(u) = f'(u)du$
  - 弧微分　$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

单元测练一

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. 如果函数 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,那么函数 $f(\sin x)$ 的定义域是________.

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} =$ ________.

3. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{x-1}=3$,则常数 $b=$ ________,$c=$ ________.

4. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$,则 $dy=$ ________.

5. 悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}(a>0)$ 在点$(0,a)$处的曲率 $k=$ ________,曲率半径 $R=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x}),g(x)=\dfrac{1}{2}(a^x-a^{-x}),a>1$,已知$f(x)g(y)+f(y)g(x)=g(u)$
则 $u=$ ________ ( )
(A)$x-y$ (B)$x+y$ (C)$y-x$ (D)xy.

2. 当 $x\to 0$ 时,$\operatorname{tg}x-\sin x$ 是 x^3 的 ( )
(A) 低阶无穷小量 (B) 高阶无穷小量
(C) 等阶无穷小量 (D) 同阶无穷小量

3. 若 $3a^2-5b<0$ 则方程 $x^5+2ax^3+3bx+4c=0$ ( )
(A) 无实根 (B) 有唯一实根
(C) 有三个不同实根 (D) 有五个不同实根

4. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数,$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 ( )
(A) 必要但非充分条件 (B) 充分但非必要条件
(C) 充分且必要条件 (D) 既非充分也非必要条件

5. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数$f^{(n)}(x)$是 ( )
(A)$n![f(x)]^{n+1}$ (B)$n[f(x)]^{n+1}$ (C)$[f(x)]^{2n}$ (D)$n![f(x)]^{2n}$

三、(本题满分 5 分)

证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$

四、(本题满分 16 分,每小题 4 分)

(1) 已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$,求 y'

(2) 求$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

(3) 已知$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\operatorname{arctg}t\end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

(4) 已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}$,$f'(2)=0$ 及$\int_0^2 f(x)dx=1$ 求$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$

五、(本题满分 5 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})(a > 0)$

六、(本题满分 6 分)

已知 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在

证明 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界

七、(本题满分 6 分)

求由方程 $\sin y + xe^y = 0$ 所确定的曲线，$y = y(x)$ 在(0,0)点的切线和法线方程

八、(本题满分 5 分)

写出曲线 $y = x - \dfrac{1}{x}$ 与 x 轴交点处的切线方程

九、(本题满分 5 分)

求 $f(x) = 3x^2 + x^2 |x|$ 在 $x = 0$ 处存在的最高阶导数

十、(本题满分 7 分)

要造一圆柱形油罐，体积为 v，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小，这时底直径与高的比是多少？

十一、(本题满分 7 分)

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x) \leqslant 0$

记 $F(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

证明在 (a,b) 内，$F'(x) \leqslant 0$

十二、(本题满分 8 分)

求曲线 $y = \ln x$ 上曲率最大的点.

单元测练一　参考答案

一、填空题

1. $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$　　2. 0　　3. $1, -2$

4. $-\dfrac{1}{1+x^2}dx$　　5. $\dfrac{1}{a}, a$

二、选择题

1. B　　2. D　　3. B

4. C　　5. C ?

三、证明：若 $a<1$，显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$，若 $a>1$，则：

$$0<\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\cdots\frac{a}{n}<a^{[a]}\cdot\frac{a}{n}$$

其中后一不等式成立是因为去掉了 $\dfrac{a}{[a]+1},\cdots\cdots,\dfrac{a}{n-1}$ 这些小于 1 的项.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}=0$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$

四、(1) 解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}(e^{-\sqrt{x}})=\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{x}}}}e^{-\sqrt{x}}\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{(1-e^{-2\sqrt{x}})x}}$

(2) 解　设 $y=(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

两边取对数，则有 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)$

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2\sin x+\cos)}{x}\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$

$$=\lim_{n\to0}\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}=2$$

故 $\lim\limits_{x\to0}y=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y}=e^2$

(3) 解　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t},\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\dfrac{dt}{dx}$

$$=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{2t^2}\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

(4) 解　设 $2x=t$，则

$$\int_0^1x^2f''(2x)dx=\int_0^2\frac{t^2}{4}f''(t)\frac{1}{2}dt=\frac{1}{8}\int_0^2t^2f''(t)dt$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^2t^2df'(t)=\frac{1}{8}\left[t^2f'(t)\big|_0^2-2\int_0^2tf'(t)dt\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[0-2\int_0^2tdf(t)\right]=-\frac{1}{4}\left[tf(t)\big|_0^2-\int_0^2f(t)dt\right]$$

$$=-\frac{1}{4}[1-1]=0$$

五、解　对 a^x 应用拉格朗日中值定理有

$$原式 = \lim_{n\to\infty} n^2 (a^x)'_{x=\varepsilon}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} a^{\varepsilon}\ln a, \quad \left(\frac{1}{n+1} < \varepsilon < \frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln a$$

六、证明，设 $\left|\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right| = \frac{M_1}{2}$，由函数极限的定义，取定 $\varepsilon = M_1/2$，$\exists\, \delta > 0$（不妨设 $0 < \delta < b - a$），当 $0 < x - a < \delta$ 时有：

$$\left|f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)\right| < \frac{M_1}{2},$$

$$\therefore |f(x)| \leqslant \left|\lim_{x\to a^+} f(x)\right| + \frac{M_1}{2} = M_1. \tag{1}$$

又 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a+\delta, b]$ 上有界，即取 $\exists\, M_2 > 0, \forall x \in [a+\delta, b]$，有

$$|f(x)| \leqslant M_2 \tag{2}$$

取 $M = \max(M_1, M_2) > 0$，则由(1)、(2)两式，$\forall x \in (a, b]$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

故 $f(x)$ 在 $(a, b]$ 上有界.

七、解　先求切线的斜率 $k = y'(0,0)$，为此由方程两边对 x 求导得

$$\cos y \cdot y' + e^y + xe^y y' = 0$$

解出

$$y' = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}$$

由于曲线在(0,0)点切线斜率为

$$k = y'\Big|_{(0,0)} \frac{e^y}{\cos y + xe^y}\Big|_{(0,0)} = -1$$

故切线方程为

$$y - 0 = -(x - 0)$$

即

$$y + x = 0$$

法线方程为

$$y - 0 = x - 0$$

即

$$y - x = 0$$

八、解　斜率 $k = y' = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$.

曲线与 x 轴的交点处：$y_0 = 0$，代入曲线方程 $0 = x - \frac{1}{x}$，解出 $x_1 = 1, x_2 = -1$，故曲线与 x 轴交点为 $(1,0)(-1,0)$.

在点(1,0)处，$k_1 = 2$，切线方程为 $y = 2(x-1)$，即

$$2x - y - 2 = 0$$

在点处$(-1,0)$处，$k_2=2$，切线方程为 $y=2(x+1)$，即

$$2x-y+2=0$$

九、解　$f(x)$ 的分段表达式为　$fx=\begin{cases}4x^3 & x\geq 0\\ 2x^3 & x<0\end{cases}$

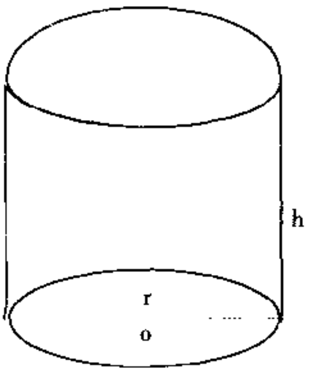
易求得 $f'(0)=f''(0)=0$，且 $f''(x)=\begin{cases}24x & x>0\\ 0 & x=0\\ 12x & x<0\end{cases}$

用定义可求得 $f_+^{(3)}(0)=24, f_-^{(3)}(0)=12$

因而 $f^{(3)}(0)$ 不存在，$f(x)$ 在 $x=0$ 存在的最高阶导数为 $f''(0)=0$

十、解　设表面积为 A，则

$$\begin{cases}A=2\pi r^2+2\pi rh, & ①\\ V=\pi r^2 h. & ②\end{cases}$$



由 ② 解出 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，代入 ① 得函数：

$$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}(r>0)$$

$$A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{4\pi}{r^2}\left(r^3-\frac{V}{2\pi}\right)$$

$$=\frac{4\pi}{r^2}\left[r-\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right]\left[r^2+r\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}+\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}\right]$$

唯一极值嫌疑点为 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$（驻点）.

由此问题的实际意义知，这种表面积必有最小值，并

且最小值就在此驻点处取得，故 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，此油罐的表面积最小（如图）.

这时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$，因此底直径与高的比为 $2r:h=1:1$.

十一、证明：由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，知 $F(x)$ 在(a,b)内可导

因此：$F'(x)=\dfrac{1}{x-a}f(x)-\dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$

$$=\frac{1}{x-a}\left[f(x)-\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt\right]$$

由积分中值定理，知存在 $\varepsilon, a<\varepsilon<x$，

使 $f(\varepsilon)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$，

所以 $F'(x)=\dfrac{1}{x-a}\{f(x)-f(\xi)\}$

又由于 $f'(x)\leqslant 0, x\in(a,b)$

知：$f(x)$ 在(a,b)内为函数，因此当 $x>\xi$ 时，$f(x)\leqslant f(\xi)$ 又因 $\dfrac{1}{x-a}>0$，故可知 $F'(x)\leqslant 0, x\in(a,b)$

十二、解　$y'=\dfrac{1}{x}, y''=-\dfrac{1}{x^2}$，曲率为：

$$k(x)=\frac{\left|-\frac{1}{x^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k'(x)=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-3x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^3}=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}$$

令 $k'(x)=0$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，舍去 $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$(因为它不在 $\ln x$ 的定义域内)

当 $x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$k'(x)>0$，$k(x)$ 单调增加.

当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$k'(x)<0$，$k(x)$ 单调减少.

因此，$k(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得唯一的极大值，实际也是最大值. 于是 $y=\ln x$ 上曲率最大的点为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\ln 2}{2}\right)$$

单元测练二

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$ ________

2. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+bx+c}{x-1}=3$,则常数 $b=$ ________,$c=$ ________.

3. 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,则 $\varphi(x)=$ ________,其定义域为 ________.

4. 设 $f(x)=x^4\ln(2+x)$,则 $f^{(8)}(0)=$ ________

5. 悬链线 $y=ach\frac{x}{a}(a>0)$ 在点 $(0,a)$ 处的曲率 $k=$ ________,曲率半径 $R=$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1. 若 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限均为 A,则 $f(x)$ 在点 x_0: ( )

A. 有定义　　B. 极限存在　　C. 连续　　D. $f(x_0)=A$

2. 如果对于任意 $a>0$, ( )

A. $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上无界,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$;

B. $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上有界,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$;

C. 存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|<a$,则 $\lim\limits_{n\to0}f(x)=a$;

D. 存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)|<a$,则 $\lim\limits_{n\to0}f(x)=0$;

3. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$,则当 $\triangle x\to0$ 时,该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是 $\triangle x$ 的. ( )

A. 等阶无穷小;　　B. 同阶但不等阶的无穷小;

C. 低阶无穷小;　　D. 高阶无穷小

4. 设 $f(x)$ 有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则 $f^{(n)}(x)=$ ( )

A. $n[f(x)]^{n+1}$　　B. $n![f(x)]^{n+1}$

C. $[f(x)]^{n+1}$　　D. $(n+1)!(f(x)]^{n+1}$

5. 设偶函数 $f(x)$ 有连续二阶导数,且 $f''(0)\neq0$,则 $x=0$ ( )

A. 不是 $f(x)$ 的驻点　　B. 一定是 $f(x)$ 的极值点

C. 一定不是 $f(x)$ 的极值点　　D. 不能确定是否为 $f(x)$ 的极值点

三、(本题满分 6 分)

若对一切 n,$a_n<b_n$ 或 $a_n\leqslant b_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.则有 $a\leqslant b$.

四、(本题满分 6 分)

已知 $\begin{cases}x=\operatorname{arctg}\sqrt{t},\\ y=\ln(1+t)\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}\big|_{t=0}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{t=0}$

五、(本题满分 6 分)

求由方程 $\sin y+xe^y=0$ 所确定的曲线,$y=y(x)$ 在 $(0,0)$ 点的切线和法线方程

六、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}e^x+b, x\leqslant 0\\ \sin ax, x>0,\end{cases}$ 确定 a,b 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$

七、(本题满分 6 分)

求由方程 $\cos(xy)=x^2y^2$ 所确定的函数 y 的微分.

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导二次,且 $f''(x)<0$,又 $f(0)=0$,证明对于 $[0,1]$ 中的任何一点 a,都有 $f(a)\leqslant 2f(\frac{a}{2})$

九、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 $(a,b)(0<a<b)$ 内可导,试证:存在 $\xi\in(a,b)$ 使得:

$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$

十、(本题满分 8 分)

试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得点 ε 总是位于区间的正中间.

十一、(本题满分 6 分)

求曲线 $y=\ln x$ 在与 x 轴各点处的曲率圆方程.

十二、(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,连接 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的直线段 AB 与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c)),(a<c<b)$,证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使 $f''(\xi)=0$.

单元测练二　参考答案

一、填空题

1. 1　　　　2. 1, -2

3. $\sqrt{\ln(1-x)}$ $x \leqslant 0$　　4. -630

5. $\frac{1}{a}$, a.

二、选择题

1. B　　2. D　　3. B　　4. B　　5. B

三、证：(用反证法)设 $b \not< a$，取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

因 $\lim\limits_{n\to\infty} an = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} bn = b$，故存在 N_1，使得当 $n > N_1$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon = \frac{a-b}{2}$

存在 N_2，使得当 $n > N_2$ 时，有 $|b_n - b| < \varepsilon = \frac{a-b}{2}$

令 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，

有 $|a_n - a| < \frac{a-b}{2}$　　$|b_n - b| < \frac{a-b}{2}$

即 $n > N$ 时，有 $-\frac{a-b}{2} < an - a < \frac{a-b}{2}$

$-\frac{a-b}{2} < bn - b < \frac{a-b}{2}$

$\therefore$ 当 $n > N$ 时，有 $a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

$$b_n < \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2}$$

$\therefore$ 当 $n > N$ 时，有 $a_n > b_n$，这与对一切 n，$a_n < b_n$，或 $a_n \leqslant b_n$ 相矛盾

所以 $a \leqslant b$.

四、解：$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}$，$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+t}$，故 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2\sqrt{t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}} = 2(1+t)$$

于是：$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0} = 0$，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0} = 2$

五、解　先求切线的斜率 $k = y'(0,0)$，为此由方程两边对 x 求导得：

$\cos y \cdot y' + e^y + xe^y y' = 0$

解出：$y' = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}$

由于曲线在(0,0)点切线斜率为：

$k = y'|_{(0,0)} = -\frac{e^y}{\cos y + xe^y}\Big|_{(0,0)} = -1$