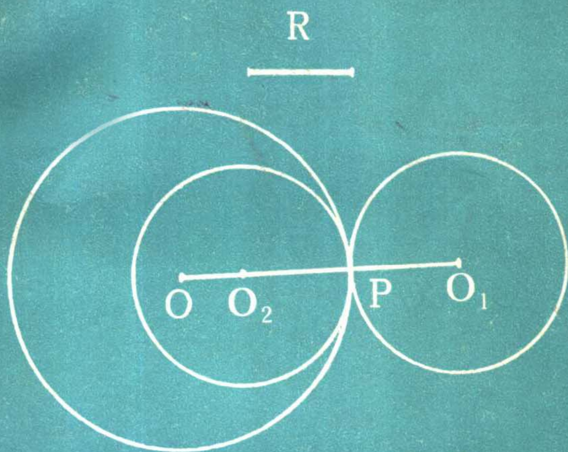
中学生课外读物



PINGMIANJIHE ZUOTU

平面几何作图

陈 珠

河北人民出版社

中学生课外读物

平面几何作图

陈　珠

河北人民出版社

中学生课外读物

平面几何作图

陈 珠

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32　7.125印张　150,000字　印数：1—30,000　1984年12月第1版

1984年12月第1次印刷　统一书号：7086·1162　定价：0.71元

前　言

几何作图是几何学的一个极其重要的内容。了解几何作图的基础知识，掌握一定的作图技能和方法，将有助于提高逻辑思维能力和绘图能力。

本书较详细地叙述了作图的基础知识、基本的作图法；以介绍三角形奠基法和交轨法为主，同时也介绍了相似法、变位法、代数分析法。内容丰富，由浅入深，分析自然、透彻，语言简明，讨论详尽。

本书注重概念和方法。例题之前，介绍有关的概念、性质、方法的意义；例题之后，均总结出规律性的解题思路，以便读者掌握解题方法和提高解题能力。在每一种作图法后面都配备与例题相应的习题，并对较难的习题做了提示。

此书适合中学生课外阅读，亦可供中学数学教师参考。

虽经反复斟酌，错误仍恐难免，欢迎读者指正。

编　者

1984年2月

目　录

一、几何作图的基础知识

（一）几何作图的意义

假如给出某一图形的一些条件，要求作出符合这些条件的图形，这类问题叫几何作图题.

几何作图是以定义、公设、公理、定理为基础，有限次地运用规定的作图工具，将具备某些性质或条件的图形作出来. 在平面几何作图中，使用的工具限于无刻度的直尺和圆规，简称尺规作图.

（二）作 图 公 法

为了便于尺规作图，欧几里德在“几何原本”一书中提出了三条公设：

1．两点之间能且仅能连结成一条线段.

2．线段可以向两个方向任意延长.

3．以任意一点为圆心，任意长为半径，可以画一个圆.

由1、2可知，确定一条直线的位置，只须确定直线上任意两点的位置；确定一条线段的位置和长度，只须确定这线段两个端点的位置.由3可知，确定一个圆的位置和大小，只须确定圆心和半径，即确定圆心和圆上任意一点的位置.

因此，所谓图形的确定，就是图形上某些点的确定，而这些点的确定有时又依赖于某些线段的确定。利用这种相互之间的关系，就可以完成几何作图。

根据三条公设得出下面五种作图公法：

(1) 过两点作一直线（或由两点连结一条线段）。

(2) 以某点为圆心，定长线段为半径，作一圆。

(3) 求作两条直线（线段）的交点。

(4) 求作一圆（弧）与一直线（线段）的交点。

(5) 求作两圆（弧）的交点。

几何作图，无一不是通过多次运用以上五种作图公法作出符合条件的图形来的。

（三）几何作图不能问题

几何作图问题，如果仅限于以尺规为工具，经过有限次地运用以上五种作图公法仍不能作出符合条件的图形时，我们称这个作图问题为几何作图不能问题。

作图能与不能问题是个十分复杂的问题。如在两千多年前就有几何作图三大不能问题：

1．立方倍积问题：求作一立方体，使其体积等于一个已知立方体的体积的两倍。

2．三等分角问题：把一个任意角三等分。

3．化圆为方问题：求作一正方形，使其面积等于一个已知圆的面积。

这三个问题吸引了许多著名学者寻求其作图答案，但都未能解决。直到1882年才得出定论，这三大问题均为几何

作图不能。这个定论是借助于近代发展起来的代数方程理论得出的。

（四）解几何作图题的步骤

按一定方法和步骤把作图题解出来的过程，叫解几何作图题。

解题步骤：

1．**已知**　写出所给的条件，并以图形表示出来。

2．**求作**　指出要求作的、符合条件的图形。

3．**分析**　假定图形已作出，绘一草图，观察图中各个已知条件和未知条件之间的关系，依据定义、作图公法、公理、定理以及某些基本作图，寻求出作图方法的线索。

4．**作法**　根据分析得出的线索，运用基本作图方法，写出作图的过程。

5．**证明**　用定义、公理、定理证明所作图形符合已知条件。

6．**讨论**　从已知条件与所作图形的关系加以讨论。指出：各已知条件的位置及大小关系在什么情形下图形有解，有几解？或无解，或解不定。

初学几何作图时，以上各步应全部写出。先后顺序要有条理，每一步作图要有依据。如点、角、圆、线都须以不同字母定名，不得混淆。

当掌握了几何作图规律以后，对简单作图题可不写分析，直接写出作法、证明、讨论；对较复杂的问题，着重写分析，作法、证明可略写，讨论不可缺少，且要详尽。

（五）定位作图与不定位作图

几何作图中的术语

定点 位置已经确定的点叫定点。

定线段 位置和长度都已经确定的线段叫定线段。

定长线段 长度已经确定而位置不确定的线段叫定长线段。

定直线 位置已经确定的直线叫定直线。

定角 大小已经确定的角叫定角。

定圆 圆心和半径都确定的圆叫定圆。

定位作图 求作的图形必须作在指定的位置上，叫做定位作图。在定位作图中，凡符合条件的形状大小完全相同而位置不同的图形，应视为不同的解。如“过定圆O外一点P作圆O的切线”是一个定位作图题，又因为能作出位置不同的两条切线，所以此题应视为有两解。

不定位作图 求作的图形没有要求作在指定的位置上，叫做不定位作图。在不定位作图中，凡符合条件的形状大小不同的图形，应视为不同的解；把形状大小完全相同而位置不同的图形视为同一个解。如“求作三角形，使其三边分别等于定长线段a、b、c”是个不定位作图题。无论把三角形作在什么位置，得到的三角形的形状、大小完全相同，所以视为同一个解。

二、基本作图

（一）基本定理

前面介绍的几何作图的三条公设和五种作图公法是几何作图最基本的依据．此外还有以下主要定理作为作图的依据．

1．三角形存在的必要而且充分的条件是：三条已知边中每一边小于其它二边的和；或一条已知边小于其它二边的和而大于其它二边的差；或三条已知边中的最长边小于其它二边的和．

2．凸 n 边形的内角和等于 $(n-2)180^{\circ}$．

3．三角形的三条中线交于一点，此点内分各中线成 $2:1$ 的两线段．

4．三角形的中位线平行第三边，并且等于它的一半．

5．三角形的内角平分线内分对边所得两线段与两邻边成比例；若三角形的两边不等，则其夹角的外角平分线外分对边所得两线段与两邻边成比例．

6．三角形的面积等于它的任何一边与这边上高线乘积的一半．

7．全等三角形的判定定理和性质定理：

判定定理：

(1) 两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等。用符号“≌”表示。

(2) 两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等。

(3) 三边对应相等的两个三角形全等。

性质定理：

全等三角形的对应边相等，对应角相等。

8．平行线判定定理和性质定理：

判定定理：

两直线被第三直线所截，若

(1) 同位角相等，则两直线平行。

(2) 内错角相等，则两直线平行。

(3) 同旁内角互补，则两直线平行。

性质定理：

两平行直线被第三直线所截，则同位角相等、内错角相等、同旁内角互补。

9．一组平行直线截两直线所得的对应线段成比例。

10．若a、b、m、n为定长线段，并且 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$，则

(1) 反比定理：$\frac{b}{a}=\frac{n}{m}$；

(2) 更比定理：$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}$；

(3) 和比定理：$\frac{a+b}{b}=\frac{m+n}{n}$；

(4) 分比定理：$\frac{a-b}{b}=\frac{m-n}{n}$；$(a>b、m>n)$

(5) 和分比定理：$\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{m+n}{m-n}$；$(a>b、m>n)$

(6) 等比定理：$\dfrac{a+m}{b+n}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}$。

11．相似三角形判定定理和性质定理：

判定定理：

(1) 如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似，用符号“∽”表示相似。

(2) 如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似。

(3) 如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似。

性质定理：

相似三角形的对应角相等；对应线段[注]的比均相等，等于相似比。

12．在一圆中，同（或等）弧所对的诸圆周角相等，且等于这弧所对的圆心角的一半。

13．勾股定理及其逆定理

勾股定理　直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方。

逆定理　若三角形某两边的平方和等于第三边的平方，则它是直角三角形；第三边所对的角是直角。

注　对应线段包括对应边、中线、高线、角平分线、周长、内切圆半径、外接圆半径等。

14．(1) 在一圆中，直径所对的圆周角是直角。

(2) 等于直角的圆周角所对的弦是直径。

15．直线与圆相切的判定定理和性质定理：

判定定理：

过圆上一点的直线，若它垂直于自该点所引半径，则它是切线；这点是切点。

性质定理：

圆的切线垂直于自切点所引半径。

16．两圆若有一个公共点在连心线上，则两圆相切，公共点是切点；若圆心距离等于两圆半径之和（差），则两圆外（内）切。反之，两圆若相切，则切点在连心线上；两圆外（内）切时，圆心距等于两圆半径之和（差）。

（二）基 本 作 图

为了完成较复杂的几何作图，需要熟练地掌握以下几种基本图形的作法。

1．已知三边，作三角形。

已知：线段 a、b、c。

求作：$\triangle ABC$，使 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ （图 1）。

分析：略。

作法：

(1) 作线段 $BC=a$。

(2) 以 B 点为圆心，线段 c 为半径画弧。

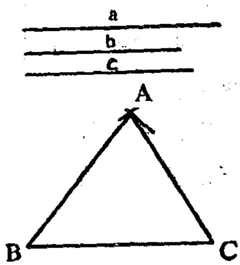


图 1

(3) 以 C 点为圆心，线段 b 为半径画弧；设两弧交点为 A。

(4) 连结AB、AC。

$\triangle ABC$ 为所求。

证明：略。

讨论：根据定理 1，当

$$\begin{cases} a+b>c, \\ b+c>a, \\ c+a>b \end{cases}$$

时，本题有一解；否则本题无解。

2．作垂线

⟨1⟩ 作线段 AB 的垂直平分线（以下简称中垂线）（图 2）。

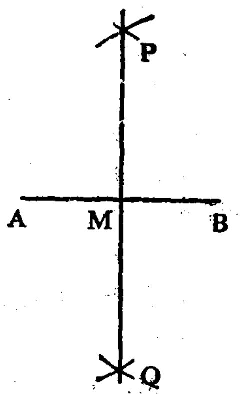


图 2

已知：定线段AB。

求作：直线 $PQ\perp$平分 AB。

分析：略。

作法：

(1) 分别以 A、B 为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$为半径作弧，设两弧交于P、Q。

(2) 连结PQ，交 AB于 M。

直线 PQ 为所求。

证明：连结PA、PB、QA、QB。

$\because\ PA=PB=QA=QB,$

$\quad PQ=PQ,$

则 $\triangle AQP\cong\triangle BQP$；

$\therefore \quad \angle APM=\angle BPM$.

又 $\quad PM=PM$,

则 $\quad \triangle APM \cong \triangle BPM$;

$\therefore \quad AM=BM$,

$\quad \angle AMP=\angle BMP=90°$.

即 $\quad PQ \perp AB$ 且 M 平分 AB.

讨论：本题恒有一解.

〈2〉过直线 AB 上一点 P 作 AB 的垂线(图 3).

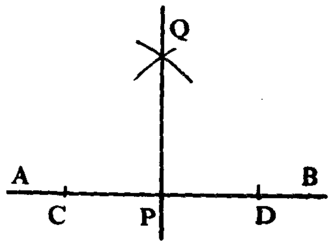


图 3

已知：定直线 AB 和 AB 上一点 P.

求作：直线 $QP \perp AB$.

分析：略.

作法：

(1) 以 P 为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于 C、D 两点.

(2) 分别以 C、D 为圆心，大于 CP 之长为半径作弧，取两弧的一个交点为 Q.

(3) 连结 PQ.

直线 PQ 为所求.

证明：略.

讨论：本题恒有一解.

〈3〉过直线 AB 外一点 P 作 AB 的垂线(图 4).

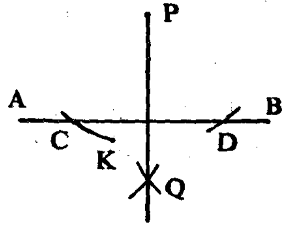


图 4

已知：定直线 AB 和 AB 外一点 P.

求作：直线$PQ \perp AB$。

分析：略。

作法：

(1) 任取一点K，使K与P位于AB异侧。以P为圆心，PK为半径作弧，交AB于C、D两点。

(2) 分别以C、D为圆心，以大于$\frac{1}{2}CD$为半径作弧，交于点Q(与P在AB异侧)。

(3) 连结PQ。

直线PQ为所求。

证明：略。

讨论：本题恒有一解。

(4) 过线段AB的端点A（不延长这线段），作这线段的垂线(图 5)。

已知：定线段AB。

求作：过A点的直线$AD \perp AB$。

分析：设图形已作成，因$AD \perp AB$，则点A在一圆周上，设圆与AD的交点为D，与AB的交点为C；根据定理14，线段CD为直径。因此，只要确定圆心O，作出圆与AB的交点C，延长CO与圆的交点就是D。

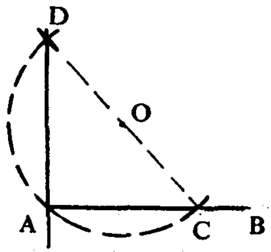


图 5

作法：

(1) 取适当一点O为圆心，以OA为半径作圆，交AB于C。