初中数学

GONGSHI DINGLI
LIJIE YU YINGYONG SHOUCE

公式定理理解与应用手册

主编 郭延庆

四川出版集团
四川辞书出版社

主编 郭延庆

GONGSHI DINGLI
LIJIE YU YINGYONG SHOUCE

初中数学公式定理理解与应用手册

四川出版集团
四川辞书出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学公式定理理解与应用手册/郭延庆主编．—成都：四川出版集团：四川辞书出版社，2006.1
ISBN 7－80682－208－9

Ⅰ.初... Ⅱ.郭... Ⅲ.①数学－公式－初中－教学参考资料②数学－定律－初中－教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 002722 号

初中数学公式定理理解与应用手册

CHUZHONG SHUXUE GONGSHI DINGLI LIJIE YU YINGYONG SHOUCE

主　编　郭延庆

策　　划	方光琅
责任编辑	曾　真
封面设计	韩健勇
版式设计	王　跃
责任印制	严红兵
责任校对	曾　真
出版发行	四川出版集团 四川辞书出版社
地　　址	成都市三洞桥路 12 号
邮政编码	610031
印　　刷	成都金星彩色印务有限责任公司
开　　本	850mm×1168mm　1/32
印　　次	2006 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	8000 册
印　　张	8.375
书　　号	ISBN 7－80682－208－9/G・82
定　　价	12.00 元

前 言

本书包括初中数学的公式、定理、定律等重要知识，并对这些知识的内涵、外延、使用条件、使用注意事项等加以说明。本着有利于读者理解、掌握知识的原则，本书对有些重要条目作了适当的拓展和深化。

书中例题用于加深理解公式、定理、定律，这些题目具有典型性和代表性，部分例题选自近几年的很有训练价值的中考题，在这些题目的解析中基本上包括了中考要求学生掌握的所有解题思维方法。

本书可供初中学生随堂学习，也可供初三学生总复习使用，对初中教师命题也有相当大的参考价值。

与本书同时出版的还有《初中物理公式定理理解与应用手册》和《初中化学公式定理理解与应用手册》。

本书由郭延庆老师主编，参加本书编写的还有徐曙光、谢祥、吴薇、杨璐依、王军、李毅、李朋、邓国伟、陈卫军、张铮、刘芳、冯惠芹、韩永芳。

书中如有不妥之处，恳请读者指正，我们十分感谢！

编 者

2006 年元月

目　　录

第一部分　数与代数

第二部分　空间与图形

第三部分　统计与概率

第一部分 数与代数

一、数与式

1. 实数

知识结构图

实数
- 数的分类
- 有理数的有关概念
- 有理数的运算
- 无理数

【正数】大于 0 的数叫做正数.

【负数】在正数前面加上"－"(读作"负")号的数,叫做负数.

说明:0 既不是正数,也不是负数.

【自然数】形如 0,1,2,3,…这样的数,即自然数.

说明:

(1)0 是自然数.

(2)正整数和 0 统称自然数.

【有理数】整数和分数统称有理数.

说明:

(1)正整数、0、负整数统称整数.

(2)正分数、负分数统称分数.

(3)有时为了研究的需要,整数也可以看作分母为 1 的分数,这

时分数包括整数,在这里分数是指不包括整数的分数.

【数轴】规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.(如图 1－1)

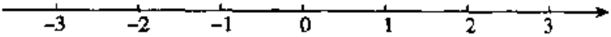

图 1—1

说明:

(1)从原点出发正方向的射线上的点即对应正数,相反方向的射线上的点即对应负数,原点对应零.

(2)所有的有理数都可以用数轴上的点表示.

(3)利用数轴可以比较数的大小:在数轴上表示的两个数,右边的数总比左边的数大.

(4)正数都大于 0,负数都小于 0;正数大于一切负数.

【相反数】只有符号不同的两个数,其中一个数为另一个数的相反数,也称这两个数互为相反数.

说明:0 的相反数是 0.

例 2 和－2 这两个数只有符号不同,所以 2 是－2 的相反数,－2 是 2 的相反数,它们互为相反数.

【倒数】乘积是 1 的两个数互为倒数.

说明:0 和任何数相乘都得 0,所以 0 没有倒数.

例 因为$(-3)\times(-\frac{1}{3})=1$,所以－3 是$-\frac{1}{3}$的倒数,$-\frac{1}{3}$是－3的倒数,它们互为倒数.

【绝对值】在数轴上,一个数所对应的点与原点的距离叫做这个数的绝对值.

数 a 的绝对值记作$|a|$.

$$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$$

说明：

(1)绝对值等于0的数，只有一个，就是0.

(2)绝对值等于一个正数的数有两个，这两个数互为相反数.

(3)任何一个数的绝对值都是一个非负数，即$|a|\geqslant 0$.

(4)互为相反数的两个数的绝对值相等.

(5)去绝对值符号的关键在于根据已知条件判断绝对值符号内的代数式的正负性，然后把绝对值符号化去.

例1　通过绝对值比较$-\frac{5}{6}$与$-\frac{4}{5}$的大小.

解：$\because \left|-\frac{5}{6}\right|=\frac{5}{6}=\frac{25}{30}, \left|-\frac{4}{5}\right|=\frac{4}{5}=\frac{24}{30}, \frac{25}{30}>\frac{24}{30}$.

$\therefore -\frac{5}{6}<-\frac{4}{5}$.

例2　指出下列各式中的a分别是什么数？

(1)$|a|=\frac{1}{12}$；(2)$|-a|=-a$；(3)$\frac{|a|}{a}=-1$.

解：(1)$a=\pm\frac{1}{12}$.

(2)由$|-a|=-a$，可知$-a\geqslant 0$，即$a\leqslant 0$，所以a是小于等于0的有理数.

(3)由$\frac{|a|}{a}=-1$，得$|a|=-a$，且$a\neq 0$，所以a是负有理数.

例3　化简$|x|+|1-x|-|2x+1|$(其中$x<-1$).

解：$\because x<-1$.

$\therefore x<0, 1-x>0, 2x+1<0$.

$\therefore |x|+|1-x|-|2x+1|$

$=-x+(1-x)-[-(2x+1)]$

$=-x+1-x+(2x+1)$

$=-x+1-x+2x+1$

$=2$.

【有理数的加法法则】

(1)同号两数相加,取相同的符号,并把绝对值相加.

(2)绝对值不等的异号两数相加,取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值.

(3)互为相反数的两个数相加得0.

(4)任何数同0相加,仍得这个数.

说明:进行运算时,先确定和的符号,再确定和的绝对值.

例 $(-2)+(-6)=-(2+6)=-8$;$(-6)+2=-(6-2)=-4$;$5+(-5)=0$;$(-3)+0=-3$.

【加法交换律】两个数相加,交换加数的位置,和不变.

$$a+b=b+a$$

【加法结合律】三个数相加,先把前两个数相加,或者先把后两个数相加,和不变.

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

【有理数减法法则】减去一个数,等于加上这个数的相反数.

$$a-b=a+(-b)$$

$$\underset{a-b}{\text{有理数减法}} \xrightarrow[\text{利用相反数}]{\text{转化}} \underset{a+(-b)}{\text{有理数加法}}$$

说明:

(1)进行有理数的加减法运算时,可以适当地运用加法的交换律与结合律.

(2)在交换加数的位置时,要连同前面的符号一起交换.

(3)有相反数时,应先将互为相反数的数结合起来相加,以简化运算.

(4)把正数和负数分别相加,可以使运算简化.

例 求$\frac{1}{6}+\frac{2}{5}-4-6-\frac{1}{6}+15-\frac{2}{5}-7$的值.

解:原式$=(\frac{1}{6}-\frac{1}{6})+(\frac{2}{5}-\frac{2}{5})-4-6-7+15$

$=0+0-17+15=-2.$

【有理数的乘法法则】

(1)两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘.

(2)任何数同 0 相乘,都是 0.

(3)几个不等于 0 的数相乘,积的符号由负因数的个数决定,当负因数有奇数个时,积为负;当负因数有偶数个时,积为正.

(4)几个数相乘,有一个因数为 0,积就为 0.

说明:进行运算时,先确定积的符号,再确定积的绝对值.

例 $-4\times2=-8$;$-5\times(-6)=+30$;$-6\times0=0$;$-1\times2\times(-3)\times(-4)\times5=-1\times2\times3\times4\times5=-360$;$-100\times99\times(-98)\times\cdots\times(-2)\times1\times0=0$.

【乘法交换律】两个数相乘,交换因数的位置,积不变.

$$ab=ba.$$

【乘法结合律】三个数相乘,先把前两个数相乘,或者先把后两个数相乘,积不变.

$$(ab)c=a(bc).$$

【分配律】一个数同两个数的和相乘,等于把这个数分别同这两个数相乘,再把积相加.

$$a(b+c)=ab+ac.$$

【有理数的除法法则】

(1)除以一个数,等于乘上这个数的倒数. 可表示为:

$$a\div b=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}\ (b\neq0).$$

(2)两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除.

(3)0 除以任何一个不等于 0 的数,都得 0.

说明:0 不能作除数.

$$\text{有理数除法}\ a\div b \xrightarrow[\text{利用倒数}]{\text{转化}} \text{有理数乘法}\ a\cdot\frac{1}{b}$$

例1 计算：$(+\frac{3}{5})\times(-2\frac{2}{3})\div(+\frac{4}{5})$.

解：原式$=\frac{3}{5}\times(-\frac{8}{3})\times\frac{5}{4}$

$=-\frac{3\times8\times5}{5\times3\times4}$

$=-2$.

例2 计算：$5\frac{5}{6}\times(3\frac{1}{6}-9\frac{1}{2})\times(-1\frac{1}{35})\div(-1\frac{1}{18})$.

解：原式$=\frac{35}{6}\times(\frac{19}{6}-\frac{19}{2})\times(-\frac{36}{35})\times(-\frac{18}{19})$

$=(\frac{19}{6}-\frac{19}{2})\times\frac{35}{6}\times(-\frac{36}{35})\times(-\frac{18}{19})$

$=(\frac{19}{6}-\frac{19}{2})\times6\times\frac{18}{19}$

$=(\frac{19}{6}\times\frac{18}{19}-\frac{19}{2}\times\frac{18}{19})\times6$

$=(3-9)\times6$

$=-6\times6$

$=-36$.

例3 计算：$(-4\frac{3}{17})\times2\frac{2}{15}-8\frac{3}{17}\times14\frac{13}{15}-4\times(-14\frac{13}{15})$.

解：原式$=(-4\frac{3}{17})\times2\frac{2}{15}-14\frac{13}{15}\times(8\frac{3}{17}-4)$

$=-4\frac{3}{17}\times2\frac{2}{15}-14\frac{13}{15}\times4\frac{3}{17}$

$=-4\frac{3}{17}\times(2\frac{2}{15}+14\frac{13}{15})$

$=-\frac{71}{17}\times17$

$=-71$.

【有理数的乘方】

求 n 个相同因数的积的运算叫做乘方，即 $a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a$，记

作 a^n.

乘方的结果叫做幂. 在 a^n 中,a 叫做底数,n 叫做指数.

说明:

(1)一个数可以看作是这个数本身的一次方,即 $a^1=a$. 通常情况下指数 1 省略不写.

(2)通常 a^2(a 的二次方)叫做 a 的平方;a^3(a 的三次方)叫做 a 的立方.

(3)a^n 读作 a 的 n 次方;a^n 看作是 a 的 n 次方的结果时,读作 a 的 n 次幂.

(4)正数的任何次幂都是正数;负数的偶次幂是正数,奇次幂是负数;0 的任何次幂都是 0.

(5)表示分数和负数的乘方时,底数要加括号,以避免误解. 如:$(-2)^4$ 与 -2^4,意义不同,结果也不同,$(-2)^4$ 表示 4 个 -2 相乘,结果得 16;而 -2^4 表示 2^4 的相反数,结果得 -16. $(-2)^3$ 与 -2^3 虽然结果一样,都等于 -8,但意义不同,$(-2)^3$ 表示 3 个 -2 相乘;而 -2^3 表示 2^3 的相反数.

【有理数的混合运算顺序】

(1)如果有括号,应先算括号里面的.

(2)在没有括号的运算中,运算顺序是先高级后低级. 先算第三级运算——乘方,再算第二级运算——乘除,最后算第一级运算——加减.

(3)对于同级运算,应从左到右依次进行.

例 计算:$8\times(-\frac{3}{4})^2-24\times(-\frac{1}{6})^3\div(-\frac{1}{12})-\frac{1}{6}$.

解: 原式 $=8\times\frac{9}{16}-24\times(-\frac{1}{216})\times(-12)-\frac{1}{6}$

$=\frac{9}{2}-\frac{24\times1\times12}{216}-\frac{1}{6}$

$=\frac{9}{2}-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$

$=3\frac{1}{6}-\frac{1}{6}$

$=3.$

【开方】求一个数的方根的运算叫做开方.

说明:开方与乘方互为逆运算.

【平方根】如果一个数的平方等于a,这个数就叫做a的平方根(或二次方根).

就是说,如果$x^2=a$,那么x就叫做a的平方根.

说明:

(1)一个正数有两个平方根,它们互为相反数.

(2)0有一个平方根,它是0本身.

(3)负数没有平方根.

(4)如果$x^2=a$,那么非负数a的平方根记作$x=\pm\sqrt{a}(a\geqslant0)$.

【开平方】求一个数的平方根的运算,叫做开平方.

【算术平方根】一个数$a(a\geqslant0)$的正的平方根,叫做a的算术平方根,记作$\sqrt{a}(a\geqslant0)$.

说明:

(1)0的算术平方根是0.

(2)算术平方根$\sqrt{a}$是非负数,即$\sqrt{a}\geqslant0$.

(3)被开方数a是非负数,即$a\geqslant0$.

例 填空:

(1)100的平方根是______;$\frac{16}{25}$的算术平方根是______.

(2)$\sqrt{0.01}=$______;$\pm\sqrt{2\frac{1}{4}}=$______.

(3)$\sqrt{16}$的平方根是______.

答案:(1)±10;$\frac{4}{5}$;(2)0.1,$\pm\frac{3}{2}$;(3)±4.

【立方根】如果一个数的立方等于a,这个数就叫做a的立方根

(或三次方根).

就是说,如果 $x^3=a$,那么 x 就叫做 a 的立方根.

说明:

(1)正数有一个正的立方根.

(2)负数有一个负的立方根.

(3)0 的立方根仍是 0.

(4)如果 $x^3=a$,那么 a 的立方根记作 $x=\sqrt[3]{a}$.

(5)对于任何有理数 a,都只有一个立方根,且 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

【开立方】求一个数的立方根的运算,叫做开立方.

【无理数】无限不循环小数叫做无理数.

说明:无理数有两个本质属性,一是"无限",二是"不循环",只有满足这两个条件的小数才是无理数.

例　下列各数中,哪些是有理数?哪些是无理数?

$-3, 2.8, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{-27}, \sqrt{36}, \pi-2, \sqrt[3]{3}, 0.\dot{5}, \frac{22}{7}$,

$0.010010001\cdots\cdots, 4^{-2}$.

解:有理数有 $-3, 2.8, \sqrt[3]{-27}, \sqrt{36}, 0.\dot{5}, \frac{22}{7}, 4^{-2}$.

无理数有 $\sqrt{\frac{1}{2}}, \pi-2, \sqrt[3]{3}, 0.010010001\cdots\cdots$.

【实数】有理数和无理数统称实数.

说明:每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示,数轴上的每一个点都表示一个实数,实数与数轴上的点是一一对应的.

例　已知实数 x、y 满足 $\sqrt{2x-1}+(y+2)^2=0$,则 x、y 的值分别是____________.

解:由题意,得 $\begin{cases}2x-1=0\\ y+2=0\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=-2\end{cases}$

【科学记数法】把一个大于10(或者小于1)的数记成$a\times10^n$的形式(其中$1\leqslant a<10$,n为整数),这种记数法叫做科学记数法.

说明:

(1)用科学记数法表示一个大于10的数时,10的指数n比原数的整数位数少1.

(2)用科学记数法表示一个小于1的正数时,10的指数n等于原数中左边第一个不为0的数前面所有0的个数的相反数.

(3)用科学记数法表示一个负数时,不要忘了数的符号"—",再将其绝对值用科学记数法表示出来即可.

例 用科学记数法表示下列数字:

(1)12000;(2)0.000012;(3)−600000;(4)−0.00302.

解:(1)$12000=1.2\times10^4$;

(2)$0.000012=1.2\times10^{-5}$;

(3)$-600000=-6\times10^5$;

(4)$-0.00302=-3.02\times10^{-3}$.

【近似数】接近准确数而不等于准确数的数叫做这个数的近似数,也叫近似值.

【精确度】表示近似数精确的程度(精确到什么数位)叫做精确度.

说明:一个近似数四舍五入到哪一位,就说这个数精确到哪一位.

例 对于6.2049,如取6,则精确到个位;如取6.2,则精确到十分位(或精确到0.1);如取6.20,则精确到百分位(或精确到0.01);这里6.2与6.20不一样,不能随便把最后一个0去掉.

【有效数字】一个近似数,从左边第一个不是0的数字起,到精确到的数位止,所有的数字,都叫做这个近似数的有效数字.

说明：

(1)关于有效数字，要注意从左边第一个不是0的数字算起，中间的0以及末尾的0都是有效数字.

(2)在实际表示时，常与科学记数法结合起来.

例　用四舍五入法，按照括号内的要求对下列各数取近似值：

(1)0.7296(精确到百分位)；

(2)0.7296(精确到0.001)；

(3)72960(保留两个有效数字).

解：(1)$0.7296\approx0.73$；

(2)$0.7296\approx0.730$；

(3)$72960\approx7.3\times10^4$.

考考你

1. 一个数的相反数与这个数的倒数的和等于零，则这个数的绝对值等于(　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

2. 如果$|-a|=3$，那么$a=$________.

3. 当$x>1$时，$|1-x|+1=$______(　　).

A. x　　B. $-x$　　C. $2-x$　　D. $x-2$

4. x是整数，且$|x|<2$，则x的取值个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 计算$(-\frac{1}{1991})^3\cdot(-1991)^2=$________.

6. 计算$18+32\div(-2)^3-(-4)^2\times5=$________.

7. $-3^4+(-3)^4=$________.

8. $8^{1990}\times0.125^{1990}$________.

9. 计算：$(-3)^{2n+1}+3\cdot(-3)^{2n}=$________.

10. 我国古代数学家祖冲之在公元5世纪算得π的近似值是3.1415926，若保留四个有效数字，则π的近似值是________.