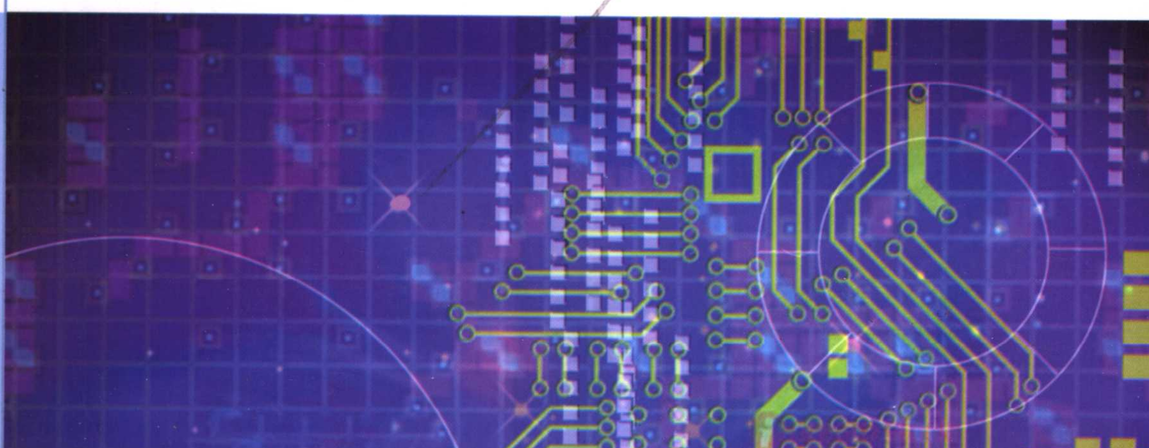
教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

信号处理原理学习指导

（本科）

徐明星　田　彪　编

3



中央廣播电視大學出版社

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材

信号处理原理学习指导(本科)

徐明星　田　埗　编

中央广播电视大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

信号处理原理学习指导/徐明星,田旐编．—北京：
中央广播电视大学出版社，2005.1
教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材．本科
ISBN 7－304－02955－2

Ⅰ．信…　Ⅱ．①徐…②田…　Ⅲ．信号处理—电视
大学—教材　Ⅳ．TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 010750 号

教育部人才培养模式改革和开放教育试点教材
信号处理原理学习指导（本科）
徐明星　田　旐　编

出版·发行：中央广播电视大学出版社
电话：发行部：010－68519502　　总编室：010－68182524
网址：http://www.crtvup.com.cn
地址：北京市海淀区西四环中路 45 号
邮编：100039
经销：新华书店北京发行所

策划编辑：何勇军　　**责任编辑**：吴国艳
印刷：北京密云胶印厂　　**印数**：0001-11000
版本：2005 年 1 月第 1 版　　2005 年 2 月第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　　**印张**：7　**字数**：170 千字

书号：ISBN 7－304－02955－2/TP·250
定价：12.00 元

（如有缺页或倒装，本社负责退换）

前　　言

信号处理原理课程是中央广播电视大学计算机科学与技术专业的一门专业基础课程。该课程主要介绍关于信号及信号处理的一些概念和基本方法，主要内容包括：信号的基本概念和基本运算、连续时间傅里叶变换、离散时间傅里叶变换、离散傅里叶变换及其快速算法、拉普拉斯变换、Z 变换、离散系统及其分析方法、数字滤波器的基本原理等。

本书以中央广播电视大学计算机科学与技术专业信号处理原理课程的教学大纲为依据，围绕大纲重点要求的考核内容，针对各章节的要求，通过讲解重要知识点、解析典型例题，以及一些有代表性的配套练习题，帮助学生从整体上把握课程的知识框架，理解主教材的知识要点。

希望同学们在学习过程中勤于思考、善于总结，注意举一反三，很好地把握本课程的重点，努力提高自己分析、解决问题的能力。此外，我们也希望本书能对同学们的课程复习起到比较好的帮助作用。

本书第一、二、五章和实验部分由徐明星编写，第三、四章由田㴇编写。由于时间仓促，水平有限，书中难免存在错误和不足之处，恳请读者提出宝贵意见，以便及时修改。作者联系方式为：xumx@ tsinghua. edu. cn，tianxiao@ crtvu. edu. cn.

编　者

2004 年 12 月

目　　录

第1章　基本概念 …………………………………………………… (1)

1.1　本章知识点 …………………………………………………… (1)
1.2　典型例题解析 ………………………………………………… (12)
1.3　练习题 ………………………………………………………… (18)
1.4　练习题参考答案 ……………………………………………… (21)

第2章　连续时间傅里叶变换 ……………………………………… (22)

2.1　本章知识点 …………………………………………………… (22)
2.2　典型例题解析 ………………………………………………… (33)
2.3　练习题 ………………………………………………………… (46)
2.4　练习题参考答案 ……………………………………………… (52)

第3章　拉普拉斯变换简介 ………………………………………… (55)

3.1　本章知识点 …………………………………………………… (55)
3.2　典型例题解析 ………………………………………………… (57)
3.3　练习题 ………………………………………………………… (61)
3.4　练习题参考答案 ……………………………………………… (62)

第4章　Z变换 ……………………………………………………… (63)

4.1　本章知识点 …………………………………………………… (63)
4.2　典型例题解析 ………………………………………………… (68)
4.3　练习题 ………………………………………………………… (75)
4.4　练习题参考答案 ……………………………………………… (79)

第5章　离散傅里叶变换及其快速算法 …………………………… (82)

5.1　本章知识点 …………………………………………………… (82)
5.2　典型例题解析 ………………………………………………… (86)
5.3　练习题 ………………………………………………………… (89)
5.4　练习题参考答案 ……………………………………………… (92)

课程实验 …………………………………………………………… (93)

第 1 章　基本概念

1.1　本章知识点

要熟练掌握的知识点包括：

(1) Sa 函数的定义、性质，以及一些重要的表征参数——原点处的函数值和过零点的位置；

(2) 单位冲激信号的定义、性质及其物理概念，以及用冲激串表示抽样信号的方法；

(3) 信号的反褶、时移及压扩运算；

(4) 卷积和相关运算的定义和基本性质；

(5) 欧拉公式；

(6) 信号奇偶分量、实部虚部分量的求解方法。

需要掌握的知识点包括：

(1) 信号及信号处理的基本概念；

(2) 信号的描述与分类方法；

(3) 各典型信号及其基本特点；

(4) 信号的各种运算；

(5) 信号的分解方法，包括如何用正交函数分解以及完备正交函数集的定义；

(6) 帕斯瓦尔定理。

1. 信号的概念

(1)“信号”是信息的表现形式，“信息”则是信号的具体内容。

(2) 现实世界中的信号有两种：① 自然和物理信号；② 人工产生信号并经自然的作用和影响而形成的信号。

(3) 在本课程中，信号既可以代表一个实际的物理信号，也可以指数学上的函数或序列。

2. 信号的描述方法

(1) 数学描述：以一个或若干个自变量的函数或序列的形式来描述信号。

(2) 波形描述：按照函数随自变量的变化关系，把信号的波形画出来。

除了上述两种方法外，本课程要重点介绍的频谱分析所得的信号频谱分布也可以用于信号描述。

3. 信号的分类

（1）确定信号与随机信号

分类要点：给定的自变量是否对应唯一且确定的信号取值。

区分方法：任意给定一个自变量的值，如果可以唯一确定其信号的取值，则该信号是确定信号；否则，如果取值是不确定的随机值，则是随机信号。

难点：体会“取值是不确定的随机值”的含义。

（2）周期信号与非周期信号

分类要点：关系式$f(t)=f(t+T),\forall t\in\mathbf{R}$是否成立。

区分方法：对于信号$f(t)$,如果它满足关系$f(t)=f(t+T),\forall t\in\mathbf{R}$，其中$T$是有限的，则是周期信号；否则为非周期信号。

周期信号的周期是：正的最小T值。

非周期信号可以“看成是”周期信号在周期趋于无穷大时的特例。

上述结论对序列同样成立（序列是只在整数点取值的信号）。

难点：如何正确确定信号的周期T(存在与不存在、数值大小)。

（3）时间连续信号与时间离散信号

分类要点：自变量的定义域是否是整个连续区间。

区分方法：如果信号的自变量在整个连续区间内都有定义，则是时间连续信号；否则，如果信号仅在一些离散的点上才有定义，则称为时间离散信号。通常，时间离散信号被称为序列。

难点：理解“信号仅在一些离散的点上才有定义”的含义。

（4）模拟信号与数字信号

分类要点：信号的定义域和值域是否均连续。

区分方法：如果信号的定义域和值域都是连续的，则是模拟信号；如果信号的定义域和值域都是离散的，则是数字信号。数字信号肯定是时间离散信号。

难点：体会得到数字信号的方法和它的重要性。

（5）因果信号与非因果信号

分类要点：在信号自变量小于0时信号是否有非零值。

区分方法：如果自变量在（$-\infty$，0）开区间内信号取值均为0，则该信号为因果信号；否则就是非因果信号。如果自变量在开区间（0，∞）内时，信号取值均为0，则信号为反因果信号。对离散时间信号，也可分别称因果序列、非因果序列、反因果序列。

难点：理解“因果”一词的内涵。

（6）能量信号和功率信号

分类要点：信号的能量是否有限。

区分方法：如果信号的能量是有限的，则称为能量有限信号，简称能量信号。如果信号的功率是有限的，则称为功率有限信号，简称功率信号。

信号的能量定义：$E[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}\|f(t)\|^2\mathrm{d}t$或$E[f(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f(n)\|^2$。

信号的功率定义：$P[f(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\|f(t)\|^2\mathrm{d}t$。

或 $$P[f(n)] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\|f(n)\|^2$$

(7) 实信号与复信号

分类要点：信号取值是否为实数。

区分方法：如果信号的取值为实数，则称为实值信号，简称实信号；否则，如果信号取值为复数，则称为复值信号，简称复信号。

需要强调的是：从严格的数学定义上讲，实数是复数的一种特殊情况，即实数是虚部为零的复数。我们称一个信号是实信号，是指信号所有的取值都是实数。如果信号有部分或全部取值都是既有实部又有虚部的复数，则称该信号为复值信号。

4. 信号处理目的和数字信号处理的步骤

(1) 信号处理是对信号进行提取、变换、分析、综合等处理过程的统称，其主要目的是：去伪存真；特征抽取；编码与解码。

(2) 数字信号处理涉及的步骤：模数转换 ADC；数字信号处理 DSP；数模转换 DAC。

难点：结合实际应用来理解信号处理的目的和数字信号处理各步骤。

5. 典型信号

(1) 指数信号

表达式： $f(t) = Ke^{\alpha t}$；

要点：

① $\alpha < 0$,信号衰减;$\alpha > 0$,信号增强;

② 参数 α 绝对值越大，信号衰减或增强的速度越快；

③ $\alpha = 0$，信号是直流信号。

④ 指数信号的微分 $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 或积分 $\left(\int_{-\infty}^{t}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)$ 还是指数信号。

(2) 正弦、余弦信号

表达式： $f(t) = K\sin(\omega t+\theta)$ 和 $f(t) = K\cos(\omega t+\theta)$；

要点：K 为振幅,ω 为角频率($\omega = 2\pi f$,f 为频率),θ 为初相位。

(3) 复指数信号

表达式： $f(t) = Ke^{st}$；

要点：

① $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ 为复数;

② 欧拉公式：

$$\begin{cases} e^{\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{j}\sin\omega t \\ e^{-\mathrm{j}\omega t} = \cos\omega t - \mathrm{j}\sin\omega t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \dfrac{e^{\mathrm{j}\omega t} + e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2} \\ \sin\omega t = \dfrac{e^{\mathrm{j}\omega t} - e^{-\mathrm{j}\omega t}}{2\mathrm{j}} \end{cases}$$

③ 复指数信号与正余弦信号之间的关系：

$$f(t) = Ke^{st} = Ke^{\sigma t}\cdot e^{\mathrm{j}\omega t} = (Ke^{\sigma t}\cos\omega t) + \mathrm{j}(Ke^{\sigma t}\sin\omega t)$$

(4) Sa 函数（抽样函数）

表达式：$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t};$$

要点：

①$t=0$时，借助于罗彼塔法则求得 $\mathrm{Sa}(0)=\left.\frac{(\sin t)'}{t'}\right|_{t=0}=\left.\frac{\cos t}{1}\right|_{t=0}=1$；

②$t\neq 0$时，随着t的绝对值的增大，函数值的绝对值振荡着不断减小，向0趋近。

③ 在 $t=n\pi(n\in\mathbf{Z},n\neq 0)$ 点处，函数值为0。

④ Sa 函数波形如图 1－1 所示。

⑤ 以相邻两个过零点为端点的区间称为过零区间。

⑥ 原点附近的过零区间宽度为2π，其他过零区间宽度均为π。

⑦ Sa 函数是偶函数。

⑧ $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t=\pi,\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Sa}(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}Sa(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$。

⑨ sinc 函数与 Sa 函数的关系：$\mathrm{sinc}(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}=\mathrm{Sa}(\pi t)$。

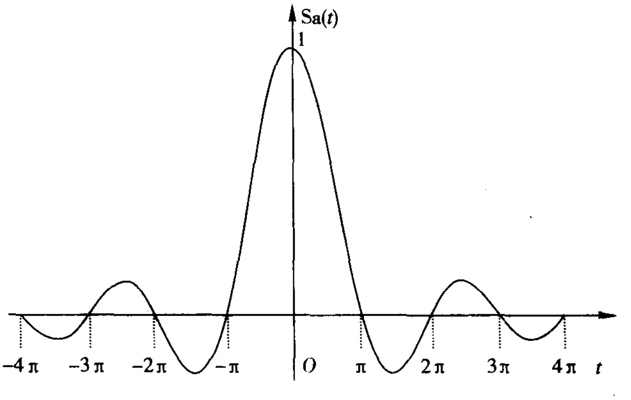


图 1－1　Sa 函数的波形

(5) 高斯信号（钟形脉冲信号）

表达式：$$f(t)=K\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2};$$

要点：高斯信号波形图如图 1－2 所示。

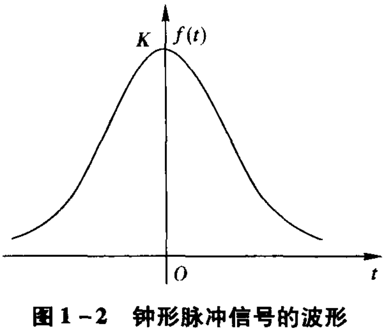


图 1－2　钟形脉冲信号的波形

(6) 单位斜变信号 $R(t)$

表达式：

$$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases}$$

要点：

① 单位斜变信号是理想信号，是不可实现的。

② 单位斜变信号波形如图 1－3 所示：

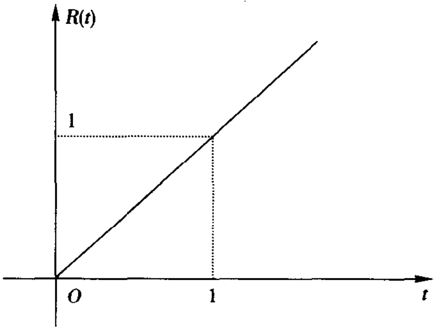


图 1－3　单位斜变信号波形

③ 截顶的单位斜变信号波形如图 1－4 所示：

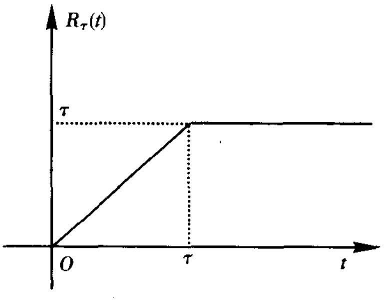


图 1－4　截顶的单位斜变信号波形

(7) 单位阶跃信号 $u(t)$

表达式：

$$u(t)=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t\geqslant 0\end{cases}$$

要点：

① 单位阶跃信号波形如图 1－5 所示：

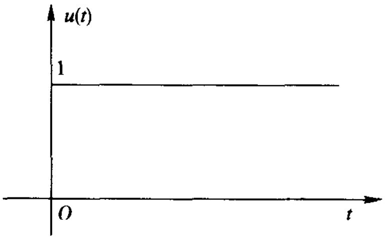


图 1－5　单位阶跃信号波形

② 单位斜变信号与单位阶跃信号的关系：$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)\mathrm{d}t$；$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)$。

③ 单位斜变信号的用途（描述其他信号）：

a. 当且仅当 $f(t)=f(t)\cdot u(t)$ 时，$f(t)$ 称为因果信号；

b. 当且仅当 $f(t)=f(t)\cdot u(-t)$ 时，$f(t)$ 称为反因果信号；

c. 单位斜变信号可以表示为 $R(t)=tu(t)$。

（8）单位矩形脉冲信号 $G_\tau(t)$

表达式：
$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$

要点：

① 脉冲宽度为 τ，中心位于原点，图形关于纵轴左右对称。

② 单位矩形脉冲信号波形如图 1-6 所示：

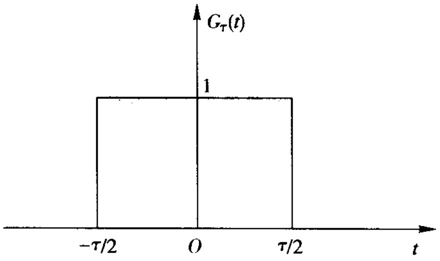


图 1-6 单位矩形脉冲信号波形

③ 用单位阶跃函数描述：$G_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2)$。

④ 脉宽：矩形脉冲的宽度（非零区间的宽度）。

⑤ 脉高：矩形脉冲的高度。

⑥ 别称：门信号、门函数、矩形窗信号、矩形窗函数。

（9）符号函数 sgn (t)

表达式：
$$\mathrm{sgn}\,(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$$

要点：

① 用以表示自变量的符号特性。

② 原点处，取值可为 1，-1 或 0。

③ 若设原点处信号值取 1，则可用单位阶跃函数表示为：$\mathrm{sgn}\,(t)=2u(t)-1$。

④ 符号函数波形如图 1-7 所示：

6. 单位冲激信号（δ 函数）

（1）定义：（狄拉克定义法）

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0\ (t\neq 0)\end{cases}$$

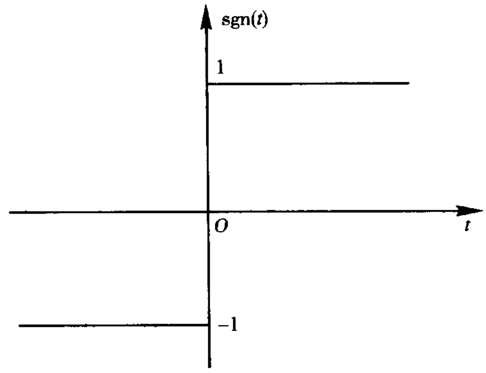


图 1-7 符号函数波形

说明：这个定义式告诉我们，单位冲激信号在非零点处的函数值为零，而它在整个时间轴上的积分却等于 1。至于函数在原点处的函数取值，则“不知道”（没有给出定义）。

（2）单位冲激信号的冲激强度为 1。

推广到位于一般位置处的冲激函数的定义，即冲激点在 t_0，冲激强度为 E 的冲激信号 δ_{E,t_0} 定义为：

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_{E,t_0}(t)\,\mathrm{d}t = E\\ \delta_{E,t_0}(t) = 0,(t \neq t_0)\end{cases}$$

（3）与单位冲激函数的关系：$\delta_{E,t_0}(t) = E\delta(t - t_0)$。

（4）绘制函数波形的方法：在冲激点处画一个带箭头的线，线的方向和长度与冲激强度的符号和大小一致，在箭头旁边用括号括起冲激强度的具体取值。

（5）单位冲击信号波形如图 1-8 所示：

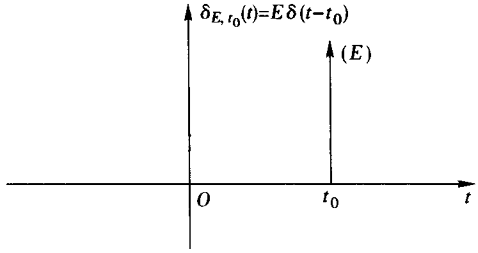


图 1-8 冲激点在 t_0，冲激强度为 E 的冲激信号 δ_{E,t_0} 波形

（6）性质：

① 对称性：δ 函数是偶函数。

② 时域压扩性：$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)(a \neq 0)$。

③ 抽样特性（筛选特性）：$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$。

(7) 周期为 T_s 的冲激串定义：$\Delta T_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$。

(8) 信号抽样后的抽样信号：$f_s(t) = f(t)\cdot\Delta T_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$。这被称为冲激串抽样或理想抽样（图 1－9）。

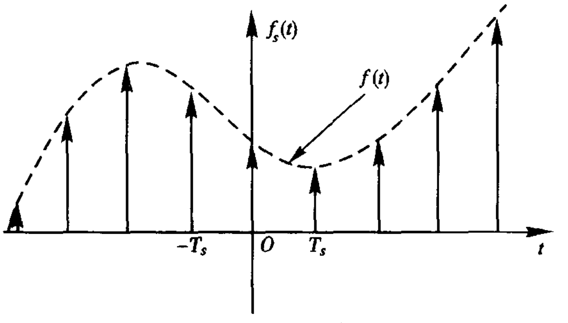


图 1－9　函数的冲激抽样

(9) 与单位阶跃函数的关系：① $u(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,\mathrm{d}t$；② $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$。

7. 信号的基本运算

(1) 四则运算：四则运算后的信号在任意一点的取值定义为原信号在同一点处函数值的相同的四则运算。

① 线性运算：对给定的常数 a 和 b，如果把 $af(t)+bg(t)$ 定义的信号记为 $L(t)$，那么对于 $\forall t_0$，必满足 $L(t_0) = af(t_0)+bg(t_0)$。

② 乘法和除法运算：如果定义信号 $M(t)=f(t)g(t)$ 或 $D(t)=f(t)/g(t)$，那么对 $\forall t_0$，必满足 $M(t_0)=f(t_0)g(t_0)$ 或 $D(t_0)=f(t_0)/g(t_0)$。

③ 难点：对于信号的除法运算，需要注意的是：如果分母函数 $g(t)$ 在某个点 t_0 处的函数值为0，那么新函数 $D(t)$ 在 t_0 处可能无定义，也可能有定义，这取决于分子函数在 t_0 处的取值，以及分子、分母函数在 t_0 处的导数情况。如果分子函数的函数值也为 0，并且利用罗彼塔法则可以求出结果，则 $D(t)$ 在 t_0 点是有定义的。Sa 函数在 $t=0$ 点有值就是一个例子。

(2) 反褶运算：

① 表达式：原信号 $f(t)$，运算后的信号 $f(-t)$；

② 运算方法：将原信号 $f(t)$ 的波形按纵轴进行对称翻转；

③ 特性Ⅰ：如果函数（信号）是偶函数（信号），则反褶是其本身；

④ 特性Ⅱ：函数（信号）经过两次反褶运算后将还原为原始函数（信号）。

(3) 时移运算：

① 表达式：原信号 $f(t)$，运算后的信号 $f(t-b)$；

② 运算方法：将原信号 $f(t)$ 的波形沿横轴平移 b 个单位（b 大于0时右移、小于0时左移，位移量是 $|b|$）。

(4) 时域压扩运算：

① 表达式：原信号 $f(t)$，运算后的信号 $f(at) = f(\mathrm{sgn}(a)\cdot|a|t)$；

② 运算方法：

a. 如果 $\mathrm{sgn}(a) < 0$ 则先对 $f(t)$ 进行反褶得到 $f_1(t) = f(-t)$，否则保持不变为 $f_1(t) = f(t)$，总之结果是 $f_1(t) = f(\mathrm{sgn}(a) \cdot t)$；

b. 对 $f_1(t)$ 进行时域压扩得到 $f_2(t) = f_1(|a|t)$：当 $|a| > 1$ 时，$f_1(|a|t)$ 以原点为基准把 $f_1(t)$ 压缩到原来的 $\frac{1}{|a|}$；当 $0 < |a| < 1$ 时，$f_1(|a|t)$ 则把 $f_1(t)$ 扩展到原来的 $\frac{1}{|a|}$ 倍。

③ 参数名称：非零常数 a 为尺度变换因子或压扩因子 。

④ 别称：尺度变换。

⑤ 说法：称 $f(at)$ 为按压扩因子 a 对 $f(t)$ 进行时域压扩 。

(5) 微分和积分运算：

① 微分：原信号为 $f(t)$，运算后为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)]$；

② 积分：原信号为 $f(t)$，积分后为 $\int_{-\infty}^{t} f(t)\mathrm{d}t$；

③ 连续 n 次微分或积分运算算子分别为：$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n$ 和 $\left(\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t\right)^n$ 。

(6) 卷积运算：

① 定义：函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积为：$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$；

② 简记：$f_1(t) * f_2(t)$ 或 $(f_1 * f_2)(t)$；

③ 两个关于 t 的函数(信号) 经过卷积运算后仍然是关于 t 的函数(信号) 。

④ 卷积运算的几何解释（作图法卷积的步骤)：

a. 将 $f_2(\tau)$ 关于 τ 进行反褶得到 $f_2(-\tau)$；

b. 再平移至 t_0 得到 $f_2(-(\tau - t_0)) = f_2(t_0 - \tau)$；

c. 与 $f_1(\tau)$ 相乘得到 $f_1(\tau) \cdot f_2(t_0 - \tau)$；

d. 对 τ 进行积分得到 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t_0 - \tau)\mathrm{d}\tau$，这就是 $s(t_0)$；

e. 变化 t_0，就可以得到 $s(t)$ 。

在上述一个信号的反褶信号的滑动过程中，它与另外一个信号的重合面积随 t 的变化曲线就是所求的两个信号的卷积的波形。

⑤ 基本性质（以数学算子的形式简化性质的表述)：

a. 交换律：$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$；

b. 分配律：$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$；

c. 结合律：$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$。

⑥ 与单位冲激函数的卷积：$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$。

⑦ $f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2) = f_1(t - t_1 - t_2) * f_2(t) = f_1(t) * f_2(t - t_1 - t_2)$。

⑧ 微分：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)\right] = \left[\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}\right] * f_2(t)$。

⑨ 积分：$\int_{-\infty}^{t} (f_1 * f_2)(\lambda)\mathrm{d}\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^{t} f_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \left(\int_{-\infty}^{t} f_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right) * f_2(t)$；

⑩ 卷积的微分和积分性质推广：$(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$。

⑪ $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。

(7) 相关运算：

① 定义：设$f_1(t)$ 和$f_2(t)$ 为能量信号，则它们的相关定义为：

$$R_{f_1f_2}(t)=R(f_1(t),f_2(t))=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2^*(\tau-t)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau+t)f_2^*(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$R_{f_2f_1}(t)=R(f_2(t),f_1(t))=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_1^*(\tau-t)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau+1)f_1^*(\tau)\mathrm{d}\tau$$

其中上面两个式子中的右上标“ * ”，表示复数的共轭运算。

② $f_1=f_2=f$时,为自相关函数,简记为$R_f(t)$：

$$R_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)f^*(\tau-t)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau+t)f^*(\tau)\mathrm{d}\tau$$

③ 性质：

a. $R_{f_1f_2}(t)=R_{f_2f_1}^*(-t)$；

b. 若$f(t)$ 是实信号,则$R_f(t)=R_f(-t)$,即实信号的自相关函数是偶函数。

④ 相关与卷积的关系:$R_{f_2f_1}(t)=f_1^*(-t)*f_2(t)$。

8. 信号的分解

(1) 直流分量与交流分量：

① 分解是唯一的：任一信号$f(t)$ 可唯一地分解为直流分量和交流分量。

② 直流分量:$f_D=\mathrm{Dc}[f(t)]=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\mathrm{d}t$，可以看作是信号平均值。

③ 交流分量:$f_A(t)=\mathrm{Ac}[f(t)]$ 与横轴围成的面积为0,$\int_{-\infty}^{\infty}f_A(t)\mathrm{d}t=0$。

④ 单位阶跃信号 $u(t)$ 的交流分量是符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$ 的二分之一。

(2) 偶分量与奇分量：

① 分解是唯一的：任一信号$f(t)$ 可唯一地分解为偶分量和奇分量。

② 偶分量:$f_e(t)=\mathrm{Ev}[f(t)]=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$。

③ 奇分量:$f_o(t)=\mathrm{Od}[f(t)]=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$。

④ 偶信号的偶分量是其本身，奇分量为零。

⑤ 奇信号的奇分量是其本身，而偶分量为零。

(3) 实部分量与虚部分量：

① 分解是唯一的：任一复信号$f(t)$ 含有唯一确定的实部分量和虚部分量。

② 实部分量:$f_r(t)=\mathrm{Re}[f(t)]=\frac{1}{2}\left(f(t)+f^*(t)\right)$。

③ 虚部分量:$f_i(t)=\mathrm{Im}[f(t)]=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(f(t)-f^*(t)\right)$。

④ 实信号的虚部为零，纯虚信号的实部分量为零。

⑤ 信号模的平方，等于信号与其自身共轭的乘积，也等于实部和虚部的平方和。

(4) 脉冲分量：信号可以近似地表示为一组矩形脉冲的和。

(5) 正交函数分量：如果一个函数可以用一组相互正交的函数的线性组合来表示，我们就称某个正交函数与相应的线性系数的乘积为该函数在该正交函数上的正交分量。

① 正交函数：如果在区间 (t_1, t_2) 上的函数 f_1 和 f_2 互不含有对方的分量，则称 f_1 与 f_2 在 (t_1, t_2) 上正交。

② 函数正交的充要条件是它们的内积为0，$\langle f_1, f_2\rangle = 0$。

③ 正交函数集：

函数集 $\{g_n(t): 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 在 (t_1, t_2) 区间上正交的条件为：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t) g_n(t) \mathrm{d}t = K_n \delta(m-n), \forall n, K_n \neq 0$$

其中，
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

④ 任一函数 $f(t)$ 在 (t_1, t_2) 上可表示为该函数集内函数的线性组合：

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t)$$

⑤ 正交分量的系数为：

$$c_n = \frac{\langle f(t), g_n(t)\rangle}{\langle g_n(t), g_n(t)\rangle} = \frac{\langle f(t), g_n(t)\rangle}{K_n} = \frac{1}{K_n}\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_n(t) \mathrm{d}t$$

9. 用完备正交函数集表示信号

(1) 完备正交函数集定义1：

在 (t_1, t_2) 内，用正交函数集 $\{g_n(t): 1 \leqslant n \leqslant N\}$ 近似任一函数，即

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t)$$

其均方误差为 $\overline{\varepsilon_N^2} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left[f(t) - \sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t)\right]^2 \mathrm{d}t$。若 $\lim\limits_{N\to\infty} \overline{\varepsilon_N^2} = 0$，则称 $\{g_n(t): 1 \leqslant n < \infty\}$ 为完备正交函数集，此时 $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n g_n(t)$。

(2) 完备正交函数集定义2：

对正交函数集 $\{g_n(t): 1 \leqslant n \leqslant N\}$，若不存在函数 $x(t)$，$0 < \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \mathrm{d}t < \infty$，满足 $\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_n(t) \mathrm{d}t = 0, \forall n$，则称该正交函数集是完备的。

(3) 帕斯瓦尔定理：$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) \mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2 K_n$

定理表达了信号在时域和变换域（此处是正交函数的系数域）之间的一种能量守恒关系。

1.2　典型例题解析

例 1　下列对于“信号”的说法，不正确的是［D］。

A. 信号是消息的表现形式

B. 声音和图像都是信号

C. 信号可以分为周期信号和非周期信号

D. 信号都可以用确定的时间函数来描述

分析： 此题的选项分别涉及了信号的定义、信号的例子、信号的分类（周期信号与非周期信号）、信号的描述方法等内容。选项 ABC 都是正确的。对于选项 D，根据信号的分类，并不是所有的信号都有确定的时间函数，所以选项 D 中的说法是不对的。

对于信号的各种分类方法，要注意分别把握它们的分类要点。比如下面几个例题就考查了几种不同的分类方法。

例 2　下面关于信号分类的说法不正确的是［BD］。

A. 信号不是确定信号，就是随机信号

B. 信号不是模拟信号，就是数字信号

C. 信号不是实信号，就是复信号

D. 信号不是指数信号，就是斜变信号

分析： 本题考查了确定信号与随机信号、模拟信号与数字信号、实信号与复信号等几种不同的分类方法。而指数信号与斜变信号是具体的信号名称，不属于课程介绍的分类方法。

例 3　下面说法正确的是［C］。

A. 时间连续信号一定是模拟信号

B. 时间离散信号一定是数字信号

C. 若一个信号只在自变量的非负半轴左闭区间 $[0, \infty)$ 才取非零值，而在 $(-\infty, 0)$ 区间内取值均为 0，则称这样的信号为因果信号

D. 功率信号是指信号的功率是无限的

分析： 本题考查了模拟信号、数字信号、因果信号、功率信号的定义（特点）。关于前三者，要注意各信号的定义域与值域的特点，而功率信号则要注意它的定义，抓住要点。

例 4　下列关于确定信号的说法错误的是［BC］。

A. 确定信号可以由一个确定的数学表达式所表示，或其波形是唯一确定的

B. 确定信号必须是时间连续的

C. 确定信号必须是周期的

D. 确定信号在某个时间处的值是确定的

分析： 确定信号是本课程研究的对象，与它相对的是随机信号。选项 AD 说明，确定信号的含义是判定一个信号是否是确定信号的标准。在确定信号中，有些是时间离散信号，所以选项 B 是不对的。有些确定信号也不是周期的，所以选项 C 也是不对的。

例 5　关于周期信号，下列说法中，正确的说法是［AB］。

A. 周期信号是无始无终的信号　　　　B. 周期信号的波形是重复出现的